

سیستم‌های کنترل خطی

دکتر علی خاکی صدیق





فهرست

یازده

۱

۱. آشنایی با سیستم‌های کنترل

۲

۱-۱ اصول کنترل

۷

۲-۱ تاریخچه مختصر کنترل اتوماتیک

۱۱

۳-۱ چند مثال عملی از سیستم‌های کنترل

۱۸

۴-۱ تعاریف

۲۰

مسائل

۲۲

مراجعة فصل اول

۲۳

کتابشناسی

۲۵

۲. نمایش سیستم‌های کنترل خطی

۲۶

۱-۲ مقدمه

۲۶

۲-۲ توابع تبدیل

۳۱

۳-۲ دیاگرام‌های بلوکی

۳۲

۱-۳-۲ اجزاء اصلی دیاگرام‌های بلوکی

۳۳

۲-۳-۲ عملیات جبری بلوک دیاگرامی

۳۶

۳-۳-۲ رسم دیاگرام بلوکی سیستم‌های فیزیکی

۳۹

۴-۲ نمودارهای گذر سیگنال

۴۲

۱-۴-۲ جبر نمودار گذر سیگنال

۴۴

۲-۴-۲ نمایش نمودار گذر سیگنال سیستم‌های خطی

۵۲

۵-۲ توصیف فضای حالت سیستم‌های کنترل

۵۴

۱-۵-۲ بدست آوردن معادلات حالت از تابع تبدیل

۶۰	۲-۵-۲ انتخاب متغیرهای حالت
۶۴	۳-۵-۲ رابطه بین تابع تبدیل و معادله فضای حالت
۶۷	۶-۲ مدلسازی موتورهای DC
۷۳	مسائل
۸۳	مراجع فصل دوم
۸۴	کتابشناسی
۸۵	۳. تحلیل عملکرد گذرا و ماندگار سیستم‌های کنترل
۸۶	۱-۳ مقدمه
۸۷	۲-۳ ورودیهای استاندارد برای تحلیل عملکرد سیستم‌های کنترل
۹۱	۳-۳ پاسخ حالت ماندگار
۹۱	۳-۳-۱ پاسخ حالت ماندگار به ورودیهای پله، شیب و سهموی
۹۴	۳-۳-۲ ورودیهای سینوسی و چند جمله‌ای
۹۶	۴-۳ پاسخ حالت - گذرا
۹۷	۴-۳-۱ پاسخ میرای شدید
۹۸	۴-۳-۲ پاسخ میرای بحرانی
۱۰۰	۴-۳-۳ پاسخ میرای ضعیف
۱۱۳	۵-۳ اثرات اضافه کردن صفر و قطب به توابع تبدیل
۱۱۳	۵-۵-۱ قطب‌های غالب توابع تبدیل
۱۱۵	۵-۵-۲ اثر قطب‌های غالب اضافی
۱۱۷	۵-۵-۳ اثر صفرهای اضافی
۱۱۷	۶-۲ تحلیل خطای حالت ماندگار سیستم‌های کنترل
۱۱۹	۶-۳-۱ نوع سیستم
۱۲۱	۶-۳-۲ خطای حالت ماندگار
۱۲۶	۷-۳ اثرات فیدبک بر عملکرد سیستم‌های کنترل
۱۲۶	۷-۳-۱ اثرات فیدبک بر بهره و ثابت زمانی سیستم
۱۲۸	۷-۳-۲ اثر فیدبک بر اغتشاشات خارجی
۱۳۱	۷-۳-۳ اثر فیدبک بر حساسیت سیستم
۱۳۶	۸-۳ تحلیل پایداری
۱۳۷	۸-۳-۱ روش روث
۱۴۴	۸-۳-۲ روش هرویتز

مسائل

مراجع فصل سوم

کتابشناسی

۴. مکان ریشه

۱-۱ مقدمه

۲-۱ رسم ریشه‌های معادله مشخصه

۳-۴ خواص اساسی مکان ریشه

۴-۴ قواعد ترسیم مکان ریشه

۵-۴ نمودارهای مسیرهای ریشه

مسائل

مراجع فصل چهارم

کتابشناسی

۵. تحلیل پاسخ فرکانسی

۱-۱ مقدمه

۲-۱ دیاگرام‌های بود

۱-۲-۵ ترسیم نمودارهای بود

۲-۲-۵ مراحل ترسیم دیاگرام‌های بود

۳-۲-۵ سیستم‌های غیر می‌نیمم فاز

۴-۲-۵ سیستم‌های تأخیردار

۵-۲-۵ شناسایی تابع تبدیل سیستم توسط دیاگرام بود

۳-۵ نمودارهای نایکوئیست

۱-۳-۵ نمودارهای نایکوئیست سیستم‌های نوع صفر، یک و دو

۲-۳-۵ نمودار نایکوئیست سیستم‌های تأخیردار

۳-۳-۵ خلاصه‌ای از قواعد کلی رسم نمودارهای نایکوئیست

۴-۵ معیار پایداری نایکوئیست

۵-۵ نمودارهای نایکوئیست معکوس

۶-۵ اعمال معیار پایداری نایکوئیست به نمودارهای نایکوئیست معکوس

۷-۵ مقادیر حاشیه‌های بهره و فاز

۸-۵ چارت نیکولز

۲۰۷

۲۱۶

۲۲۲

۲۲۴

۲۲۷

۲۲۸

۲۲۹

۲۳۴

۲۳۶

۲۴۰

۲۴۲

۲۴۶

۲۴۹

۲۵۴

۲۶۰

۲۶۹

۲۷۲

۲۷۶

۲۸۲

۲۸۸

۲۹۲

۲۹۹

۴۰۰

۴۰۲

۴۰۴

۴۰۶

۴۱۲

۴۱۷

۱-۸-۵ پاسخ فرکانسی حلقه-بسته

۹-۵ مشخصه‌های عملکرد سیستم براساس پاسخ فرکانسی

مسائل

مراجع فصل پنجم

کتاب شناسی

۶. روش‌های جبران‌سازی سیستم‌های کنترل

۱-۶ مقدمه

۲-۶ انواع جبران سازها

۱-۲-۱ جبران ساز پیش فاز

۱-۲-۲ جبران ساز پس فاز

۱-۲-۳ جبران ساز پس - پیش فاز

۴-۲-۶ کنترل کننده‌های PID، PI و PD

۳-۶ طراحی جبران سازها با استفاده از مکان ریشه

۱-۳-۶ طراحی جبران سازهای پیش فاز با استفاده از مکان ریشه

۲-۳-۶ طراحی جبران سازهای پس فاز با استفاده از مکان ریشه

۳-۳-۶ طراحی جبران سازهای پس - پیش فاز با استفاده از مکان ریشه

۴-۶ طراحی جبران سازها با استفاده از روش پاسخ فرکانسی

۱-۴-۶ طراحی جبران سازهای پیش فاز با استفاده از روش پاسخ فرکانسی

۲-۴-۶ طراحی جبران سازهای پس فاز با استفاده از روش پاسخ فرکانسی

۳-۴-۶ طراحی جبران سازهای پس - پیش فاز با استفاده از روش پاسخ فرکانسی

۴-۴-۶ جبران سازی با استفاده از چارت نیکولز

مسائل

مراجع فصل هفتم

کتاب شناسی

۷. تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل در فضای حالت

۱-۷ مقدمه

۲-۷ حل معادلات حالت و خروجی

۳-۷ معادله مشخصه

۴-۷ کنترل پذیری و رؤیت پذیری



۴۱۷	۱-۴-۷ مفاهیم کنترل پذیری و رؤیت پذیری
۴۲۱	۲-۴-۷ آزمونهای کنترل پذیری و رؤیت پذیری
۴۲۷	۳-۴-۷ کنترل پذیری و رؤیت پذیری در توابع تبدیل
۴۲۹	۵-۷ طراحی سیستمهای کنترل در فضای حالت
۴۳۰	۱-۵-۷ جایابی قطب با فیدبک حالت
۴۳۵	۲-۵-۷ طراحی رؤیتگر
۴۳۷	۳-۵-۷ سیستم حلقه - بسته فیدبک حالت با رؤیتگر مسائل
۴۴۳	مراجع فصل هفتم
۴۵۰	کتاب شناسی
۴۵۱	
۴۵۲	منابع
۴۵۴	واژه‌نامه فارسی - انگلیسی
۴۶۰	واژه‌نامه انگلیسی - فارسی
۴۶۵	فهرست راهنمای



۱

آشنایی با سیستم‌های کنترل

اهداف فصل:

- ۱- آشنایی با ایده کنترل: کنترل به معنی عام و کنترل اتوماتیک
- ۲- معرفی سه استراتژی اصلی در سیستم‌های کنترل: کنترل حلقه - باز، کنترل پیش خور و کنترل حلقه - بسته
- ۳- مروری مختصر بر تاریخچه کنترل اتوماتیک
- ۴- معرفی چند سیستم کنترل اتوماتیک مهندسی
- ۵- تعاریف برخی لغات بکار گرفته شده در متن کتاب

۱-۱ اصول کنترل

در جامعه صنعتی و پیشرفته امروز سیستم‌های کنترل اتوماتیک جزء لاینکی از زندگی روزمره ما بشمار می‌آیند. اگرچه تاریخچه اولین سیستم کنترل ساخت بشر را به چند صد سال قبل از میلاد نسبت می‌دهند، لیکن مسلم آنست که تحول اساسی در زمینه طراحی و ساخت سیستم‌های کنترل اتوماتیک، با طراحی و ساخت اولین گاورنر توسط جیمز وات در دوران انقلاب صنعتی رخ داده است. امروزه اکثر وسایل خانگی مانند ماشین لباسشویی، آبگرمکن، خشککن، توستر، حرارت مرکزی ساختمانها و غیره و یا در اتومبیل‌ها، هوایپیماهای مسافربری و جنگنده، کشتیهای بزرگ و کوچک، ربات‌ها، وسایل پیشرفته مهندسی و پژوهشی و ... همگی از نوعی سیستم کنترل بهره‌مند هستند و عملکرد آنها بدون سیستم کنترل، به کلی مختلف و یا بسیار ضعیف می‌گردد.

لغت «کنترل» را مهندسین، حسابتارها، افسران ارتش، مدیران کارخانه‌ها و صنایع، مردمان ورزشی، و بسیاری از افراد دیگر استفاده می‌کنند. اگرچه هر کدام از این افراد با زمینه‌های کاری بسیار متفاوت، در محیط‌های مختلف، با اهداف و وسایل مختلف کار می‌کنند، لیکن همگی آنها به نوعی در محدوده‌های مختلف کاری اعمال کنترل کرده و ایده‌های اولیه این افراد از کنترل مشابهت‌هایی نیز دارد.

مهندسين کنترل، که مخاطبان اصلی این کتاب هستند، به اعمال کنترل در سیستم‌های مهندسی می‌پردازنند. این سیستم‌ها و یا فرایندهای صنعتی می‌توانند موشکهای پیشرفته هدایت شونده، ماشین‌های کاغذ یا شیشه‌سازی، اقمار مصنوعی در فضا، نیروگاههای قدرت، پالایشگاههای نفت، موتورهای الکتریکی (و یا دیزلی)، ربات‌ها، آتنزهای ردیاب و یا بسیاری از ماشین‌ها و فرایندهای دیگر باشند. تفاوت‌های عمده‌ای بین ساختار ایده‌های کنترلی مهندسین کنترل و سایر استفاده کنندگان از ایده کنترل، به طور عام وجود دارد. مهندسین کنترل ایده کنترل را در کنترل فرایندهای صنعتی بکار می‌گیرند. در واقع آنان (برخلاف سایر موارد ذکر شده) خود کنترل کننده یک موشک، قمر مصنوعی و یا پالایشگاه نفت نیستند، بلکه سیستم‌های کنترل اتوماتیکی را طراحی می‌کنند و با اعمال این سیستم‌های طراحی شده، به کنترل سیستم مورد نظر خواهند پرداخت.

قبل از آنکه بتوان کنترل را به هر مفهوم در هر نوع سیستمی اعمال کرد باید یک هدف و

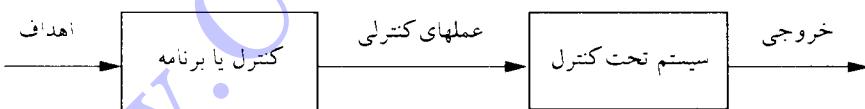
انگیزه مشخص برای اعمال کنترل وجود داشته باشد که ما آنرا مشخصه‌های عملکرد سیستم می‌نامیم. برای مثال مدیر کارخانه سعی دارد تا با اعمال یک سری قوانین و برقاری نظمی خاص در کارخانه به تولید بیشتر یا کیفیت بهتر با قیمت ارزانتر برسد. مرتبی ورزشی قصد دارد تا با انعام یکسری تمرینات و دستورات، بر تیم مقابله پیروز گردد. بدینهی است که برای انجام این عملیات و اجرای برنامه‌های مناسب، کنترل کننده باید آزادی عمل کافی در تغییر دادن سیستم تحت کنترل داشته باشد. مدیر کارخانه با ارایه برنامه‌هایی به قسمت‌های مختلف کارخانه انتظار انجام آنها را داشته و مرتبی ورزشی نیز به ورزشکاران تحت نظر خود دستوراتی را می‌دهد. باید توجه داشت که تقریباً هیچگاه در عمل آزادی کامل به کنترل کننده داده نمی‌شود و همواره محدودیتهاي در راه رسیدن به هدف و اجرای برنامه و اعمال کنترل وجود دارد که غیر قابل تغییر می‌باشند. مدیر کارخانه نمی‌تواند برای پایین آوردن قیمت از مواد او لیه ایده‌آل استفاده کند (به دلایل اقتصادی) و یا اینکه به کارگران مزدی پرداخت نکند و یا اینکه ابزار و ماشین آلات مورد نیاز را به طور آنی فراهم آورد، هم چنین مرتبی ورزشی نمی‌تواند از ورزشکاران انتظار داشته باشد که تمامی روز را بدون وقفه به انجام تمرینات بگذرانند و یا اینکه عکس العملهای خارق العاده‌ای از خود نشان دهند. تمامی این موارد محدودیتهاي کنترل را شامل می‌شود و ماهیت این محدودیتها ممکن است به گونه‌ای باشند که دسترسی به کلیه اهداف تعیین شده را به طور سریع امکان پذیر نسازد. برای رسیدن به یک کارخانه مطلوب یا تیم ورزشی نمونه با مشخصه‌های عملکرد داده شده، مدیر کارخانه و یا مرتبی ورزشی ممکن است که ماهها و یا حتی سالها وقت لازم داشته باشد. هم چنین ممکن است که برآورده کردن کلیه مشخصات عملکرد نیز امکان پذیر نباشد که در اینصورت باید با بازنگری در اهداف سیستم، آنها را به اهدافی قابل دسترسی تغییر داد.

برای کنترل کننده (مدیر کارخانه یا مرتبی ورزشی) یا طراح سیستم کنترل (مهندس کنترل) بسیار مهم است که بتواند دنباله حوادث را پس از اعمال یکسری برنامه‌ها و دستورات پیش‌بینی کند. با این پیش‌بینی او قادر خواهد بود که دستورات خود را تعدیل کند و یا برنامه کلی سیستم را در جهت مطلوب تغییر دهد. این پیش‌بینی با در دست داشتن یک مدل از سیستم که نشان دهنده رفتار آن است، امکان پذیر است. مدلی که مدیر کارخانه از کارخانه خود دارد ممکن است شامل قابلیت مدیران و کارگران، ظرفیت و کیفیت تولید ماشین آلات

کارخانه و ... باشد. مدلی که مرتبی ورزشی استفاده می‌کند ممکن است شامل آب و هوا و شرایط محیطی برگزاری مسابقه، توانایی افراد تیم خود و تیم مقابل با بررسی بازیهای قبلی آنها و ... باشد. دقت کنید که ممکن است مدلسازی در این موارد ارادی نباشد لیکن کنترل کننده قطعاً به این چنین چارچوبی برای طراحی و برنامه‌ریزی نیاز داشته و آنرا حداقال در ذهن خویش خواهد ساخت.

سه استراتژی اساسی اعمال کنترل. سه استراتژی اساسی اعمال کنترل که کلیه روشهای کنترلی به نحوی جزو یکی از آنها هستند، عبارتند از: کنترل حلقه - باز^۱، کنترل پیش‌خور^۲ و کنترل فیدبک^۳ یا پس‌خور.

کنترل حلقه - باز. اگر هدف تعیین شده برای یک مدیر کارخانه بهینه کردن سطح تولید کارخانه تحت نظر او باشد، بر اساس عملکرد گذشته کارخانه و مدلی که از آن در دسترس دارد، یک برنامه معین برای عملیات کارخانه جهت رسیدن به هدف مشخص شده، تعیین می‌کند. این برنامه به صورت دستورات کنترلی به سیستم تحت کنترل (کارخانه و اجزاء آن) اعمال می‌گردد. موقتیت این استراتژی به دقت و صحبت مدل و اطلاعات موجود در رابطه با عملکرد سیستم بستگی دارد و کنترل کننده فرض می‌کند که عوامل خارجی اثر چندانی بر عملکرد سیستم ندارند و هیچگونه بررسی در حین عمل از رفتار سیستم به عمل نمی‌آورد. اساس این استراتژی در شکل ۱-۱ نشان داده شده است.



شکل ۱-۱ کنترل حلقه - باز

استراتژی کنترل که در آن خروجی هیچ نقشی بروی عمل کنترل ندارد، سیستم کنترل حلقه - باز نامیده می‌شود. به عبارت دیگر، در کنترل حلقه - باز خروجی سیستم (تولید کارخانه، بازی

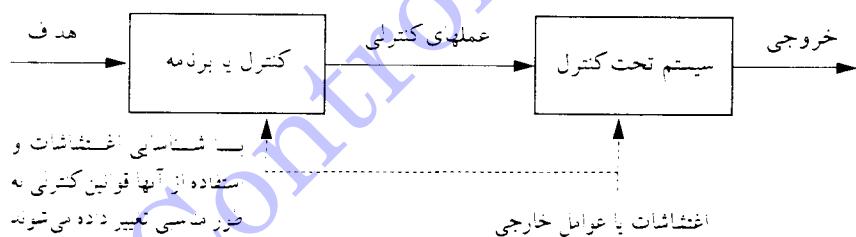
1- Open-loop control

2- Feedforward control

3- Feedback control

بازیگران و نتیجه آن) برای مقایسه با اهداف و مشخصه‌های مطلوب عملکرد داده شده به کار گرفته نمی‌شود.

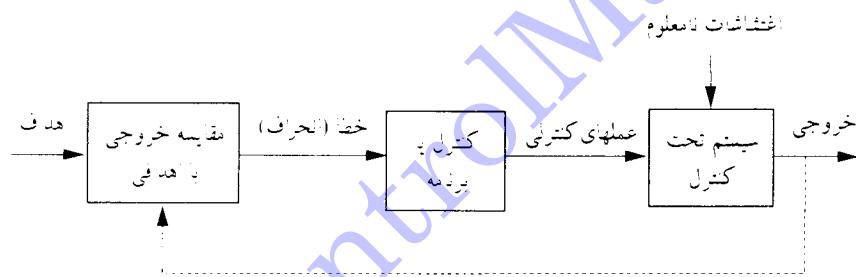
کنترل پیش‌خور. بدینهی است اگر عوامل خارجی بر سیستم تحت کنترل اثر قابل توجهی داشته باشد، نادیده گرفتن آنها توسط کنترل کننده، به اختلال در عملکرد سیستم منجر می‌گردد. ممکن است در شرایط خاصی، بتوانیم این عوامل خارجی را از بین برده و یا آنها را تضعیف کنیم، در غیر اینصورت برای اجتناب از اختلال در عملکرد سیستم، باید استراتژی کنترل را عوض کنیم. در واقع با تغییر و بهبود مدل، اثر این عوامل خارجی یا اغتشاشات را پیش‌بینی می‌کنیم و با در نظر گرفتن آنها قوانین کنترلی را مجدداً بررسی می‌نماییم. در این برسیها، فرامین کنترل به گونه‌ای طراحی خواهد شد تا اثر این اغتشاشات را به حداقل برسانند. به این چنین استراتژی کنترلی که در آن عوامل خارجی در نظر گرفته شده، و اعمال کنترلی برای مقابله با آنها طراحی می‌شوند، کنترل پیش‌خور گفته می‌شود. شکل ۲-۱ نحوه عملیات در استراتژی کنترل پیش‌خور را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۱ کنترل پیش‌خور

کنترل فیدبک یا کنترل حلقه - بسته. کنترل پیش‌خور تنها در صورتی یک استراتژی کنترل کننده عملی است که اغتشاشات کم و یا معینی وجود داشته باشد و بتوان آنها را براحتی اندازه گرفت. لیکن اگر تعداد اغتشاشات بسیار زیاد و یا اینکه زمان وقوع و ماهیت آنها نامعلوم باشد، آنگاه از استراتژی کنترل پیش‌خور نمی‌توان استفاده کرد. در این حالت از استراتژی سوم کنترل استفاده می‌شود. در این استراتژی با مشاهده خروجی، انحراف رفتار کلی سیستم از رفتار مطلوب (مشخصه‌های عملکرد تعیین شده یا اهداف سیستم) را در نظر گرفته برای اصلاح این انحراف عمل می‌نماییم. اساس این استراتژی در شکل ۳-۱ نشان داده شده

است. دقت کنید که در اینجا نیز اغتشاشات خارجی وجود دارد و بر رفتار سیستم اثر می‌گذاردند. اگر خروجی سیستم با مشخصه‌ها و اهداف تعیین شده مطابقت نداشته باشد، خطای بوجود می‌آید و این خطأ یا انحراف به سیستم کنترل اعمال می‌گردد و سیستم کنترل با توجه به خطأ، فرمان کنترلی مناسبی را صادر می‌کند. همانطور که در شکل ۳-۱ مشاهده می‌گردد در این سیستم کنترل خروجی سیستم اندازه‌گیری شده و توسط یک مقایسه کننده با اهداف سیستم یا مشخصه‌های عملکرد تعیین شده مقایسه می‌گردد. خطای ایجاد شده از این مقایسه به سیستم کنترل برای صدور فرامین کنترلی مناسب، اعمال می‌گردد. به عنوان مثال، مدیر کارخانه می‌تواند دائمًا مقدار تولید را اندازه‌گرفته و با میزان مطلوب مقایسه نماید و در صورتیکه بیشتر و یا کمتر از میزان مطلوب باشد، بر اساس آن دستورات لازم را جهت تصحیح خطای ایجاد شده صادر نماید.



شکل ۳-۱ کنترل فیدبک پ- حلقه - بسته

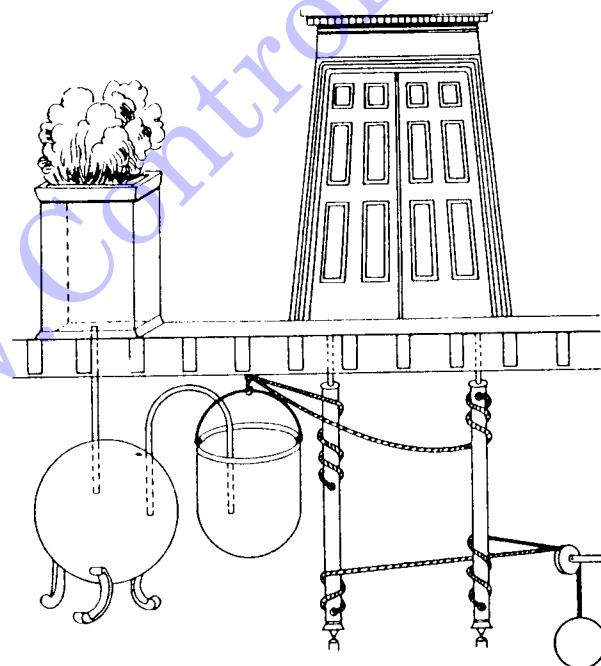
عبارت کنترل فیدبک برای توصیف این استراتژی به کار گرفته می‌شود. در کنترل فیدبک فرامین کنترلی اعمال شده به سیستم براساس مقدار و میزان خطای موجود در پاسخ سیستم محاسبه می‌شوند. بدین معنی که پس از مشاهده و اندازه‌گیری خروجی سیستم، این خروجی با مقدار مطلوب آن مقایسه می‌گردد و اختلاف به سیستم کنترل ارایه می‌شود. به جای عبارت کنترل فیدبک از عبارت کنترل حلقه - بسته^۱ نیز استفاده می‌شود. (عبارت حلقه - بسته در مقابل عبارت حلقه - باز بکار گرفته می‌شود).

۱- Closed-loop control

توجه کنید که در استراتژی کنترل حلقه - بسته (برخلاف کنترل حلقه - باز و پیش خور)، اطلاع از یک مدل کاملاً دقیق از سیستم الزامی نیست. زیرا خطاهای ایجاد شده در خروجی سیستم تحت کنترل بدلیل اطلاعات ناکافی از مدل سیستم، با تصحیح کنترل کننده کاهش پیدا می‌کند (همانند موقعیکه سیستم تحت اغتشاش قرار گیرد).

۲-۱ تاریخچه مختصر کنترل اتوماتیک

در رابطه با اولین سیستم کنترل اتوماتیک و یا طراح آن اطلاع دقیقی در دست نیست و در واقع با کندوکاو در زوایای تاریخ علم نمی‌توان شخص یا اشخاصی را پیدا کرد که بتوان پیدايش اولین سیستم کنترل را مسؤول به آنها دانست. لیکن آنچه که مسلم است، اولین مثالهای عملی از سیستم‌های کنترل به سالهای قبل از میلاد مسیح برمی‌گردد. به عنوان نمونه یکی از اولین سیستم‌های کنترل حلقه - باز، برای باز کردن دربهای یک معبد بوده است. این سیستم کنترل بازکردن اتوماتیک درب، در شکل ۴-۱ نشان داده شده است. ورودی به سیستم همانطور که از



شکل ۴-۱ اولین سیستم کنترل برای باز کردن دربهای معبد

شکل ۴-۱ مشاهده می شود، روشن کردن آتشی بروی محراب بوده است. با گرم شدن هوای زیر آتش، هوای به حرکت درآمده آب را از مخزن به داخل سطحی هدایت می کرده است. با سنگین شدن سطل و حرکت آن به طرف پایین، توسط طناهایی که به اهرمهایی وصل شده بودند، وزنه طرف مقابل به سمت بالا به حرکت درمی آمده است. به همین ترتیب می توان با خاموش کردن آتش، دربهای معبد را بست. با کم کردن آتش و سردتر شدن هوای داخل مخزن، فشار هوا کاهش پیدا می کند و آب از سطل به داخل مخزن منتقل می شود. بنابراین، سطل سیکتر شده و با سنگین تر بودن وزنه مخالف به سمت پایین حرکت می کند، که خود باعث بسته شدن دربهای می گردد. به نظر می رسد که با پایین آمدن حاکم معبد و حرکت به سوی دربهای این دربهای به طور خودکار (با سیستم کنترلی بدوز از چشم حاضران) باز و بسته می شدند و لذا برای آنان تجلی از قدرت خدايانشان بوده است!

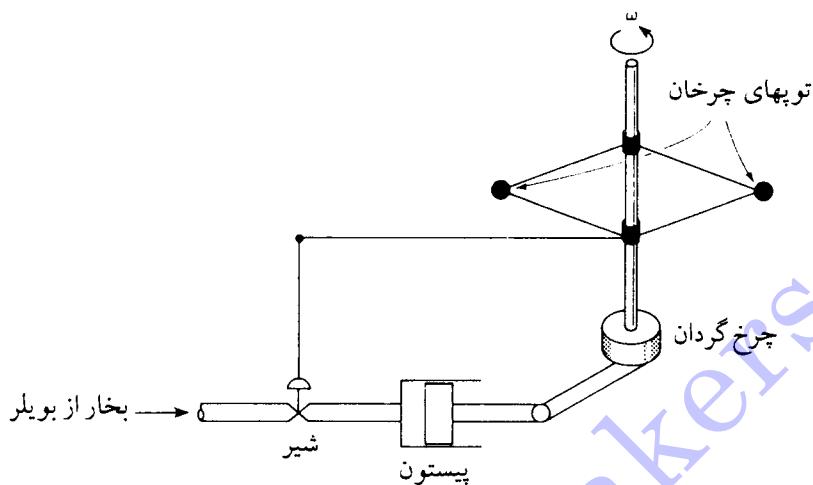
در بین سالهای ۱۷۶۷ تا ۱۷۸۸ (تاریخ دقیق آن معلوم نیست)، جیمز وات اولین سیستم کنترل اتوماتیک (بدون دخالت بشر) را برای کنترل سرعت اختراع کرد. این سیستم را گاورنر توپ گردان^۱ جیمز وات^۲ می نامند. گاورنر توپ گردان جیمزوات در شکل ۵-۱ نشان داده شده است. هدف این سیستم کنترل، ثابت نگه داشتن سرعت چرخش است. ایده کلی این سیستم کنترل بدین ترتیب است که با چرخش توپهای گردان، مقدار ورودی بخار به سیستم توسط شیر نشان داده شده در شکل ۱-۵ تعیین می گردد. در واقع هر چه این توپها سرعت بچرخند، بخار کمتری وارد سیستم می گردد. همچنین و به طور همزمان نرخ فشار بخار به روی پیستون و چرخ گردان سرعت چرخش توپها را تعیین می کند. یکی از اشکالات فراوان این سیستم نوسانات سرعت چرخشی آن حول یک مقدار نامی سرعت است. در حدود سالهای ۱۸۶۸ ماکسول^۳ با پایه ریزی یک چارچوب نظری برای تحلیل سیستم، توانست با بکارگیری نظریه معادلات دیفرانسیل پایداری سیستم گاورنر جیمزوات را بررسی و دلایل نوسانات داخل سیستم را بر حسب عبارات ریاضی بخوبی بیان دارد. بدنبال مطالعات ماکسول یک مهندس روسی به نام ویشنگرادسکی^۴ پاسخ دقیقتی را برای پایداری یک گاورنر توپ گردان درجه سوم ارایه کرد. از اولین کاربردهای تئوریهای توسعه یافته کنترل

1- Flyball governer

2- James watt

3- Maxwell

4- Wischnegradsky



شکل ۵-۱ گاورنر توب گردان جیمزوات

می‌توان از بکارگیری آنها برای مطالعه هدایت اتوماتیک کشتی توسط مینورسکی^۱ در سال ۱۹۲۲ نامبرد.

دهه‌های ۱۹۲۰ و ۱۹۳۰ شاهد توسعه چشمگیر در زمینه کنترل اتوماتیک بوده است. این پیشرفتها بطور عمده در سایه ارتباط دادن علوم مخابرات و الکترونیک با کنترل اتوماتیک حاصل گردید. از افراد شاخص این زمانها می‌توان از هوی ساید^۲ در دهه ۱۹۲۰ و نایکوئیست^۳ در دهه ۱۹۳۰ نامبرد. هوی ساید توансست با ادامه مطالعات تئوری یک قرن پیش لابلس و فوریه، ابزار ریاضی مناسب را برای مطالعه سیستم‌های مخابراتی توسعه دهد و واحد بسیار مهم لگاریتمی را برای اهداف مهندسی بکار گیرد. نایکوئیست نیز که یک فیزیکدان به شمار می‌آمد، پس از مطالعات فراوان در رابطه با پدیده نویز به مسئله پایداری در آمپلی فایرها تکرار کننده^۴ پرداخت و موفق شد که با استفاده از نظریه آنالیز مختلط، یکی از معتبرترین روش‌های بررسی پایداری را پایه گذاری کند.

1- Minorsky

2- Heaviside

3- Nyquist

4- Repeater

در سال ۱۹۳۴، هیزن^۱ مقاله‌ای تحت عنوان "نظریه سرومکانیزم‌ها" در مجله انتستیتوی فرانکلین انتشار داد و این اولین استفاده از لغت سرومکانیزم^۲ بود که بعداً برای توصیف بسیاری از سیستم‌های کنترل فیدبک بکار گرفته شد. می‌توان گفت که مقاله هیزن^۳ غازی برای مطالعه بسیار جدی در این زمینه جدید مهندسی بود. لغت سرومکانیزم از دو لغت خدمتکار (با برد) و مکانیزم مشتق شده است و لذا سرومکانیزم یک مکانیزم برد مانند را نمی‌کند.

جنگ دوم جهانی زمینه بسیار مناسب را برای پیشرفت‌های بسیار در زمینه مهندسی کنترل اتوماتیک آماده کرد. در این دوران با صرف هزینه‌های بسیار زیاد بر روی پروژه‌های نظامی مانند ردیابی آتش، کنترل توپ ضد هوایی و اتوپاینوت‌های پیشرفت‌های برای هوایپیماهای جنگی به شکوفایی مهندسی کنترل کمک بسیار زیادی شد. زیرا در این پروژه‌ها، سیستم کنترل طراحی شده می‌بایست سرعت و وقت را به عنوان دو مشخصه عمنکرد پاسخ، به خوبی برآورده سازد. البته در بین سالهای ۱۹۴۵ تا ۱۹۴۰ بسیاری از پیشرفت‌های چشمگیر بدست مدد در زمینه کنترل اتوماتیک بدليل ماهیت نظامی تحقیقات انجام شده محرومانه نمی‌شدند و در دسترس عموم محققین در این زمینه قرار نمی‌گرفتند. در سالهای بعد از جنگ و برداشتن مقررات امنیتی دوران جنگ، حجم وسیعی از اطلاعات در اختیار دانشمندان این رشته قرار گرفت و دستاوردهای بسیار زیادی نیز در این زمینه بدست مدد از سال ۱۹۴۵ تا کنون در کمی بیش از نیم قرن، صدها کتاب و هزاران مقاله و گزارش‌های فنی در این زمینه نوشته شده است. همچنین سیستم‌های کنترل به بسیاری از سیستم‌های صنعتی با ماهیتها و کاربردهای فوق العاده متفاوت با موقفيت اعمال گردیده‌اند.

تا قبل از سالهای دهه ۱۹۶۰ (سالهای ۱۹۳۵ تا اوخر ۱۹۵۰) روش‌های اصیل در تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل، روش‌های پاسخ فرکانسی مانند بود^۴ و روش‌های تبدیل لاپلاس همراه با روش مکان ریشه توسط ایوانز^۵ بودند. در سالهای ۱۹۶۰ به بعد با پیشرفت‌های حاصله در پروژه بولو و مسافرت به کره ماه، روش‌های مدرن فضایی حالت که توسط کالمان^۶، باسی^۷ و چند نفر دیگر معرفی گردیده بودند، با موقفيت در چندین پروژه، به کار گرفته شدند. این تاریخ تولد کنترل مدرن^۸ را رقم می‌زند. با توسعه سریع در طراحی و ساخت کامپیوترهای بزرگ، بسیاری

۱- Hazen

2- Servomechanism

3- Bode

4- Evans

5- Kalman

6- Bucy

7- Modern control

از محاسبات که تا آن زمان انجام آنها غیرممکن به نظر می‌رسید، با این کامپیوترها بسادگی انجام داده می‌شدند. در این دهه روشها و الگوریتمهای پیچیده و مشکل بهینه‌سازی به کمک همین کامپیوترها پیشرفت شایانی نمودند.

دهه ۱۹۷۰ شاهد پیشرفت‌های پیشتری در زمینه کامپیوتر با معرفی میکروپروسسورها بود. توسط میکروپروسسورها اعمال تکنیک‌های بسیار پیچیده کنترلی به سادگی و ارزانی امکان پذیرگشت. کنترل دیجیتال^۱ و سیستم‌های کنترل دیجیتال مستقیم^۲ در این دوران رونق فراوانی پیدا کردند. دهه‌های ۱۹۷۰ به بعد، شاهد پیشرفت‌های بسیار زیادی در زمینه نظریه سیستم‌های کنترل چند متغیره^۳، کنترل تطبیقی^۴، کنترل مقاوم^۵، کنترل هوشمند^۶ و غیره نیز بوده است.

۱-۳ چند مثال عملی از سیستم‌های کنترل

در این بخش چند مثال عملی از کاربرد سیستم‌های کنترل در قسمتهای مختلف صنعت ارایه می‌شود.

آنتن‌های ردیاب. در صنعت مخابرات آنتن‌های وجود دارند که توسط یک ماهواره باهم در ارتباط می‌باشند. داده‌های مختلف، همانطور که در شکل ۱-۶ نشان داده شده است، از یک آنتن فرستاده شده و توسط آنتن دیگری دریافت می‌گردد. ماهواره سیگنانالی را که حاوی این داده‌ها است از یک آنتن دریافت کرده و آن را به آنتن دیگری که در نقطه دیگری روی زمین قرار دارد ارسال می‌کند. برای برقراری و تداوم این ارتباط رادیویی، دو آنتن مستقر بروی زمین همواره باید به سمت قمر مصنوعی قرار گرفته باشند و برای این کار بکارگیری یک سیستم کنترل مؤثر الزامی است. مسأله کنترل در این حالت حرکت دادن دقیق آنتن به طرف جهت و زاویه مناسب است. شکل ۱-۷ یک آنتن ماهواره مخابراتی را نشان می‌دهد. حرکتهای چرخشی این آنتن به طرف بالا یا پایین یا چرخش حول محور عمود بر زمین است. برای

1- Digital control

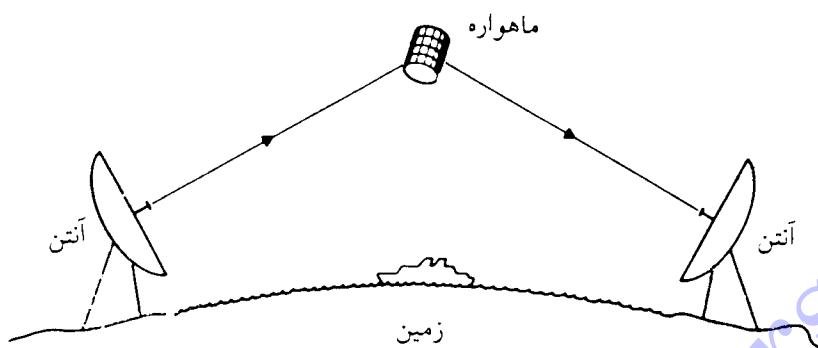
2- Direct digital control

3- Multivariable control

4- Adaptive control

5- Robust control

6- Intelligent control

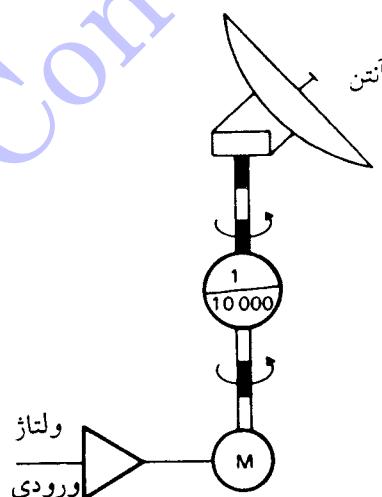


شکل ۱-۶ ارتباط دو آنزن برای ارسال و دریافت داده توسط یک ماهواره.



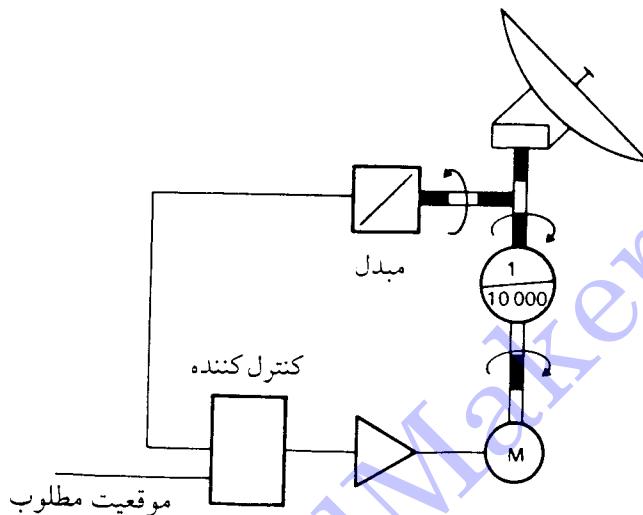
شکل ۷-۱ یک آنزن ماهواره مخابراتی

هر کدام از این دو حرکت یک سیستم کنترل وجود دارد. سیستمهای کنترل موجود در آنتن بسیار شبیه به هم عمل می‌کنند و لذا در اینجا تنها به بررسی یکی از این سیستم‌ها می‌پردازیم. محرك، یا وسیله‌ای که آنتن را می‌چرخاند یک موتور الکتریکی است که در شکل ۸-۱ با یک دایره که در وسط آن حرف M نوشته شده نشان داده شده است. شفت موتور با یک خط راهراه نشان داده شده است و پیکان روی آن جهت حرکت چرخش را نشان می‌دهد. شفت موتور یک جعبه دنده که به صورت دایره دوم رسم شده است را به حرکت در می‌آورد. نسبت دنده ۱۰۰۰۰ به ۱ بر روی آن نشان داده شده است. شفت بعد از جعبه دنده، باعث چرخش آنتن می‌شود. قدرت محركه موتور از یک تقویت‌کننده قدرت الکتریکی تأمین می‌شود که با یک مثلث نشان داده شده است. ولتاژ اعمال شده به ورودی تقویت‌کننده قدرت باعث چرخش آنتن حول محور افقی می‌شود. بدینهی است که آنتن باید در برابر تغییرات ایجاد شده توسط جریان باد همواره به سمت ماهواره نشانه رود و از اینرو کنترل حلقه - باز برای این سیستم مناسب نیست. یک سیستم کنترل حلقه - بسته برای کنترل موقعیت چرخشی آنتن در شکل ۸-۱ نشان داده شده است. یک مبدل موقعیت بر روی آنتن برای اندازه‌گیری موقعیت خروجی θ_0 که جهت افقی آنتن بوده، سوار شده است. مبدل موقعیت چرخشی با یک بلوك مربعی در



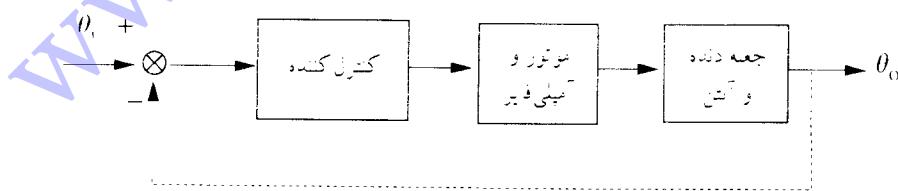
شکل ۸-۱ دیاگرام سیستم محرك آنتن

سمت چپ شفت محرك آنتن نشان داده شده است. سیستم کنترل نیز در شکل ۹-۱ آورده شده است.



شکل ۹-۱ سیستم حلقه - بسته آنتن

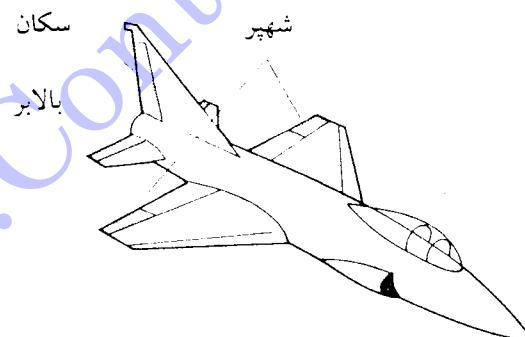
خروجی مبدل، ولتاژی متناسب با زاویه افقی θ_0 است. ولتاژ به بلوک کنترل یعنی از مقایسه با زاویه مطلوب θ_0 ارسال می‌گردد. در صورتیکه خطای موقعیت بین θ_0 و θ_1 وجود داشته باشد، یک ولتاژ خطا متناسب با تفاضل $(\theta_1 - \theta_0)$ توسط یک مقایسه کننده تولید می‌گردد. براساس این ولتاژ خطا، فرامین کنترلی از سیستم کنترل ارسال می‌گردد که با ایجاد گشتاوری برای کاهش خطا، آنتن را در جهت مناسب به چرخش درمی‌آورد. دیگر این بلوکی سیستم کنترل موقعیت آنتن در شکل ۱۰-۱ نشان داده شده است.



شکل ۱۰-۱ دیگر این بلوکی سیستم کنترل ردیاب موقعیت.

کنترل پرواز هواپیما. شکل ۱۱-۱ یک هواپیما و سطوح کنترلی آن را نشان می‌دهد. سطوح کنترل یک هواپیما همانطور که در شکل ۱۱-۱ نشان داده شده‌اند، عبارتند از بالابر^۲، شهرپ^۳ و سکان^۴. این سطوح نیروها و ممانهای لازم را جهت حرکت در آوردن هواپیما در جهتهای مورد نظر خلبان، فراهم می‌کنند. در واقع بالابر حرکت فراز^۵ (حرکت به طرف بالا یا پایین در طول محور افقی هواپیما)، شهرپ حرکت چرخشی و سکان حرکت به طرف زاویه راست و یا چپ هواپیما را تولید می‌کند. کنترل چهارمی که در این نوع هواپیماها بکار گرفته می‌شود، تغییر در پیشرانه^۶ است که از موتورهای هواپیما بدست می‌آید. بدینهی است که برای کنترل پرواز یک هواپیما، کلیه این امکانات کنترلی بکار گرفته می‌شوند و در جنگنده‌های پیشرفته‌تر سطوح کنترلی دیگری نیز به آنها افزوده شده‌اند. پرواز دقیق و مطمئن یک هواپیما بستگی کامل به دقت و کارایی سیستم کنترل آن دارد و در صورت از کار افتادن یک یا چند ابزار کنترلی، پرواز هواپیما بسیار مشکل و خطربناک خواهد بود.

علاوه بر سطوح کنترلی که برای هدایت هواپیما از آنها استفاده می‌شود، کلیه هواپیماها سنسورهای حرکتی دارند که مقایسه از تغییرات در متغیرهای حرکت که در اثر عوامل مختلفی ایجاد می‌شوند را فراهم می‌آورند. سیگنال‌های این سنسورها توسط یک واحد نمایش در



شکل ۱۱-۱ هواپیما با سطوح کنترلی آن

1- Control surfaces

2- Elevator

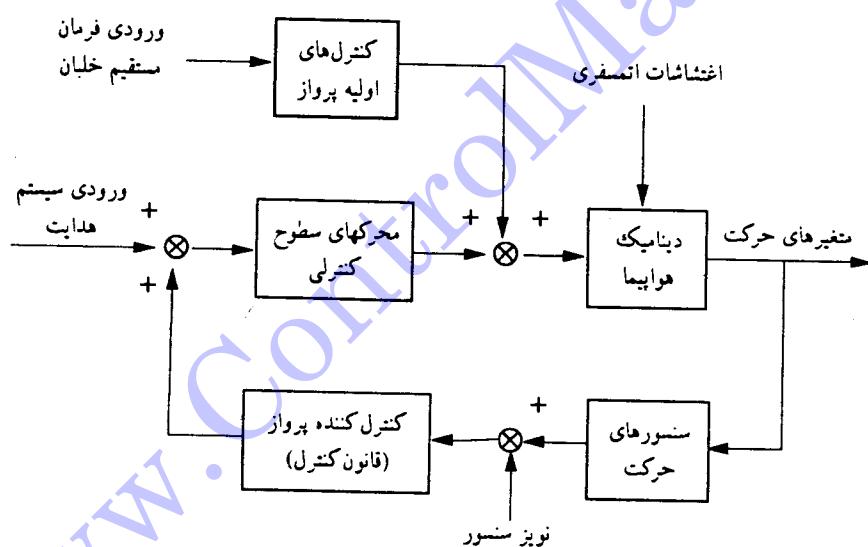
3- Aileron

4- Rudder

5- Pitch

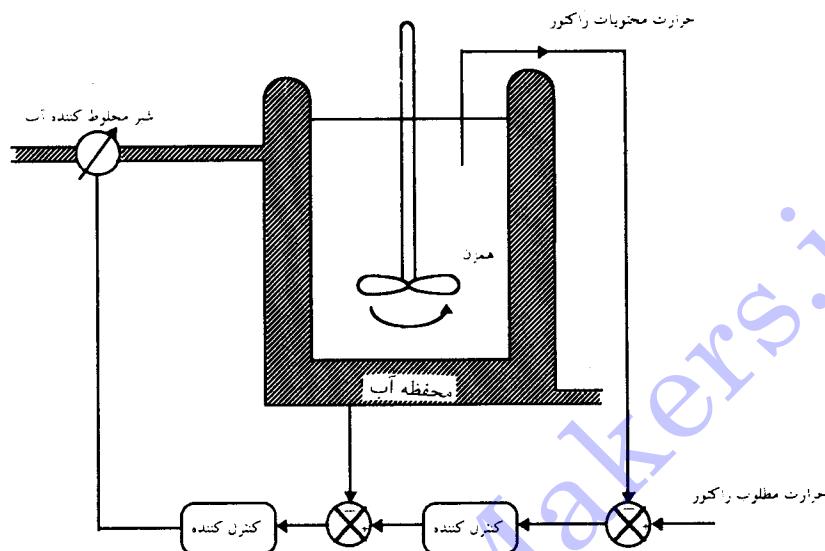
6- Thrust

اختیار خلبان گذاشته شده است و از طرف دیگر به سیستم کنترل پرواز فیدبک می‌شوند. ساختار کلی یک سیستم کنترل پرواز در شکل ۱۲-۱ نشان داده شده است. هدف کنترل کننده، مقایسه حرکت دستور داده شده (حرکت مورد نظر خلبان) با حرکت اندازه‌گیری شده است. در صورت بروز خطا، دستور کنترلی لازم توسط کنترل کننده برای تصحیح خطای ایجاد شده صادر می‌گردد. فرامین کنترلی با ارسال سیگنال‌های فرمان به محرکها، باعث انحرافاتی در سطوح کنترلی شده که خود موجب اعمال نیرو یا ممان کنترلی مناسب می‌شوند. لذا با تولید این نیرو یا ممان کنترلی، هوایپما بر مسیر صحیح و مطلوب حرکتی قرار خواهد گرفت. مسئله مورد بررسی در این کتاب علاوه بر تحلیل سیستم، طراحی کنترل کننده نشان داده شده در شکل ۱۲-۱ می‌باشد.



شکل ۱۲-۱ ساختار کلی یک سینم کنترل پرواز

کنترل درجه حرارت یک راکتور حفاظت‌دار. شکل ۱۳-۱ یک راکتور را نمایش می‌دهد که برای کنترل درجه حرارت محتویات آن، از یک پوشش محتوی آب گرم استفاده می‌شود. اگرچه با اندازه‌گیری درجه حرارت داخل راکتور و پس خواردن مستقیم آن می‌توان با



شکل ۱۳-۱ کنترل درجه حرارت راکتور

یک کنترل کننده، شیر آب گرم ورودی به حفاظ دربرگرفته راکتور را کنترل کرد، لیکن با اعمال دو حلقة کنترل به صورت نشان داده شده در شکل ۱۳-۱ می‌توان در عمل کنترل بهتری بدست آورد. درجه حرارت حفاظ پوششی راکتور در یک حلقة داخلی کنترل می‌شود. مقدار مطلوب درجه حرارت این محفظه، خروجی کنترل کننده اول می‌باشد. ورودی کنترل کننده اول نیز خطای ایجاد شده از مقایسه درجه حرارت مطلوب راکتور و درجه حرارت محتویات آن می‌باشد. برای مؤثر بودن سیستم کنترلی ارایه شده، پاسخ محفظه دربرگیرنده راکتور در مقایسه با پاسخ محتویات راکتور به تغییرات و تنظیمهای کنترلی، باید سیزد سریعتر باشد. با تنظیم کنترل کننده دوم هرگونه خطای ایجاد شده بین درجه حرارت محفظه و درجه حرارت مطلوب آن به سرعت با اجرای فرامین کنترلی مناسب توسط شیر کنترلی با کم و زیاد کردن ورودی آب گرم به درون محفظه از بین خواهد رفت. وظیفه کنترل کننده اول نیز صفر کردن خطای ایجاد شده بین درجه حرارت مطلوب و درجه حرارت راکتور از طریق تعیین یک ورودی مطلوب برای کنترل کننده دوم است.

۴-۱ تعاریف

در این بخش برخی از تعاریف و اصطلاحات را که در مطالعه سیستم‌های کنترل به آنها برخورد خواهیم داشت، جهت مراجعه سریع خواننده ارجایه می‌کنیم (شکل ۱۴-۱ را ببینید).

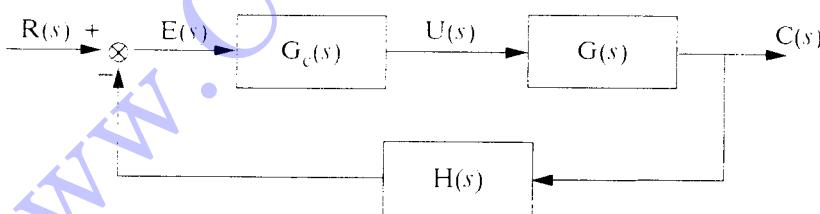
سیستم، مجموعه‌ای از عناصر است که با هم عمل می‌کنند تا کار معینی را انجام دهند به طوریکه انجام این کار توسط هیچکدام از عناصر به تنها بی امکان پذیر نباشد. سیستم تحت کنترل (s) $G(s)$ را دستگاه^۱ یا فرایند^۲ نامیده و در این کتاب با عنوان سیستم، نامیده شده است.

ورودی مرجع، ورودی مرجع (s) $R(s)$ که نقطه نشانده^۳ یا خروجی مطلوب^۴ نیز نامیده می‌شود، نشان دهنده پاسخ مطلوب سیستم است. به عبارت دیگر هدف یا مشخصه عملکرد مطلوب سیستم موقعی برآورده می‌گردد که خروجی سیستم به این مقدار برسد.

خروچی سیستم، خروچی سیستم (s) $C(s)$ که خروجی کنترل شده^۵ نیز نامیده می‌شود، سیگنالی است که از سیستم تحت کنترل بدست می‌آید و مایل به اندازه‌گیری و کنترل آن می‌باشیم. خروچی در حقیقت پاسخ واقعی سیستم در هر واحد زمانی است.

خطای سیستم، سیگنال خطای (s) $E(s)$ ، تفاوت بین خروجی مطلوب سیستم (ورودی مرجع) و خروجی واقعی آن است. در شکل ۱۴-۱، $E(s) = R(s) - C(s)$ تعريف می‌شود.

کنترل کننده، کنترل کننده (s) $G_c(s)$ عنصری است که برای تعیین سیگنال کنترلی مناسب جهت اعمال به سیستم بکار گرفته می‌شود.



شکل ۱۴-۱ یک سیستم کنترل

- 1- Plant
- 2- Process
- 3- Set-point
- 4- Desired output
- 5- Controlled output

عنصر فیدبک. عنصری است که در مسیر خروجی به مقایسه کننده قرار می‌گیرد. اگر $H(s) = 1$ باشد، سیستم را حلقه - بسته با فیدبک واحد می‌نامند. اگر $H(s) \neq 1$ باشد، سیستم حلقه - بسته با فیدبک غیر واحد خواهد بود. در این حالت خطای سیستم تفاضل ورودی مرجع و خروجی واقعی سیستم است و نه تفاضل خروجی عنصر فیدبک و ورودی مرجع. ورودی کنترل. ورودی کنترل $(s)U$ که عمل کنترلی^۱ یا سیگنال کنترلی^۲ نیز نامیده می‌شود، خروجی سیستم کنترل و ورودی اعمال شده به سیستم تحت کنترل است. مسیر پیشرو. مسیر از سیگنال خطای $(s)E$ تا خروجی $(s)C$ را مسیر پیشرو می‌نامند و $G_c(s)$ و $G(s)$ را شامل می‌گردد.

مسیر بی‌ار. مسیر بی‌از خروجی است که از $(s)H$ عبور می‌کند. اغتشاش یا نویز. سیگنال اغتشاش^۳ یا نویز، یک سیگنال ورودی به سیستم است که در هر نقطه‌ای بجز ورودی مرجع می‌تواند وارد سیستم گردد و اثر نامعینی بر روی عملکرد طبیعی سیستم بگذارد.

سیستم خطی و سیستم غیر خطی. سیستمه خطی سیستمی است که اصل جمع آثار^۴ در آن صادق باشد. اصل جمع آثار بیان می‌دارد که خروجی یک سیستمه خطی $(t)y$ ناشی از ورودیهای مختلف مانند $(t)x_1, (t)x_2, \dots, (t)x_n$ که هم‌مان عمل می‌کنند. برابر با مجموع پاسخها بر اثر عمل کردن هر ورودی به تنها ی است. به عبارت دیگر اگر $(t)y$ پاسخ ناشی شده از $(t)x_i$ باشد، آنگاه

$$y(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t)$$

سیستمی را غیر خطی^۵ گویند که اصل جمع آثار در آن صادق نیست. تقریباً اکثریت سیستمهای بجز سیستم‌های ساده، در عمل غیر خطی هستند. لیکن این سیستم‌ها را عموماً می‌توان در حول یک نقطه کار معین خطی کرد و از مدل خطی شده برای تحلیل و طراحی سیستم در گستره خطی استفاده نمود.

1- Control action

2- Control signal

3- Disturbance signal

4- Superposition principle

5- Nonlinear

سیستم تغییر ناپذیر با زمان و تغییر پذیر با زمان. سیستم تغییر ناپذیر با زمان^۱ سیستمی است که در آن پارامترها و مشخصه‌های سیستم با زمان تغییر پیدا نمی‌کنند و حال آنکه در

سیستم تغییر پذیر با زمان^۲، پارامترها و مشخصه‌های سیستم با زمان تغییر پیدا می‌کنند. سیستم زمان - پیوسته و سیستم زمان - گستته. سیستم زمان - پیوسته^۳ سیستمی است که در آن سیگنال‌ها، تابع پیوسته‌ای از زمان می‌باشند. سیستم زمان - گستته^۴ سیستمی است که در آن سیگنال‌ها به صورت گستته، پالسی ظاهر شده و به عبارت دیگر سیگنال‌ها بر خلاف

حالات پیوسته تنها در لحظه‌های مختلف زمانی مقدار پیدا می‌کنند.

سرو مکانیزم. به آن از دسته سیستم‌های مکانیکی اطلاق می‌شود که در آنها خطای حالت - ماندگار برای یک سیگنال ثابت ورودی صفر است. به عبارت دیگر در سیستم‌های سرو^۵ حالت دنبال روندگی ورودی مرجع توسط خروجی وجود دارد. در این سیستم‌ها خروجی الزاماً باید ورودی مرجع را دنبال کند.

رگلاتور.^۶ به سیستم‌هایی اطلاق می‌شود که در آنها خروجی حالت - ماندگار برای سیگنال ثابت، مقداری ثابت دارد. در این سیستم‌ها حالت دنبال روندگی در پاسخ سیستمه وجود ندارد.

سیستم کنترل حلقه - باز. سیستمی که در آن خروجی اثری بر زوی سیگنال ورودی نداارد. سیستم کنترل حلقه - بسته. سیستمی است که در آن خروجی به گونه‌ای بر ورودی اثر می‌گذارد که خروجی در مقداری مطلوب باقی بماند.

در این کتاب تنها سیستم‌های خطی، تغییر ناپذیر با زمان و زمان - پیوسته در نظر گرفته خواهند شد.

مسایل

- ۱-۱- در یک نانوایی مشخصه عملکرد مطلوب سیستم میزان برشتگی نان است. ورودی به سیستم که توسط یک شیر کنترل می‌شود، نرخ گازوییل وارد شده به منبع تولید

1- Time invariant

2- Time varying

3- Continuous-time

4- Discrete-time

5- Servo

6- Regulator

حرارت برای گرم کردن تنور است. دو نوع سیستم کنترل حلقه - باز و حلقه - بسته برای سیستم کنترل نانوایی را توسط نانوا توضیح دهد.

- ۲-۱ کدامیک از بندهای (الف) تا (و) برای کنترل حلقه - باز، کنترل حلقه - بسته و کنترل پیش خور الزامی است؟

(الف) یک مدل برای تعیین اثرات اعمال کنترل.

(ب) یک مدل برای تعیین اثرات عوامل خارجی.

(ج) یک هدف.

(د) اندازه‌گیری اثرات عوامل خارجی.

(ه) اندازه‌گیری اثر کنترل.

(و) مقایسه بین هدف و اثر کنترل.

- ۳-۱ از یک ترمومترات برای کنترل درجه حرارت آب گرم یک مخزن استفاده می‌شود. اگر آب را از موقعیکه سرد است گرم کنند، با استفاده از رسم درجه حرارت آب بر حسب زمان، اساس عملکرد چنین وسیله‌ای را توضیح دهد. چرا از یک سیستم ساده حلقه - باز به جای این سیستم استفاده نمی‌شود؟

- ۴-۱ کنترل سیگنال‌های ترافیک را در چهارراه به دو روش حلقه - باز و حلقه - بسته توضیح دهید.

- ۵-۱ یک سیستم کنترل دست ربات را با رسم شکل‌های مناسب توضیح دهد.

- ۶-۱ در یک سیستم کنترل سطح مایع، چه مشکلاتی ممکن است با استفاده از کنترل حلقه - باز رخ دهد؟ آیا می‌توان این مشکلات را با بکارگیری یک روش حل - بسته بر طرف کرد.

- ۷-۱ اساس کار سیستم کنترل آسانسورها را توضیح دهد.

- ۸-۱ به سیستمی که چند ورودی و چند خروجی داشته باشد، سیستم چند متغیره گویند. یک سیستم عملی را مثال بزنید که تعداد ورودی و خروجی‌های آن از یک بیشتر است.

مراجع فصل اول

- [1-1] Bennett, S., *A history of control engineering 1800-1930*, Peter peregrinus Ltd, 1986.
- [1-2] Bode, H. W., *Feedback - The history of an idea*, in selected papers on mathematical trends in control theory, Dover, New York, pp 106-123, 1964.
- [1-3] Maskrey, R. H. and Thayer, W. J., *A brief history of electrohydraulic servomechanisms*, ASME J. of Dynamic Systems, Measurement and control, pp 110-116, 1978.
- [1-4] Mayr, O., *Origins of feedback control*, MIT press, Cambridge, Mass., 1971.
- [1-5] Singh, M., *Encyclopedia of systems and control*, Pergamon press, 1987.
- [1-6] IEEE Standard dictionary of Electrical and Electronics terms, Wiley - Interscience, New York, 1972.
- [1-7] Black, H.S., *Inverting the negative feedback amplifier*, IEEE Spectrum, pp 55-60, 1977.
- [1-8] Hazen, H. L., *Theory of servomechanisms*, J. Franklin Institute, 218, pp 543-580, 1934
- [1-9] Maxwell, J. C., *On governors*, Proceedings of the Royal Society (London), 16, pp 270-283, 1868.
- [1-10] Minorsky, N., *Control problems*, J. Franklin Institute., 232, p. 451, 1941.

کتاب شناسی

در اکثر کتابهای مهندسی کنترل مقدمه‌ای در رابطه با مفاهیم کنترل، تعاریف و تاریخچه کنترل وجود دارد. مرجع [1] تعاریف و اصطلاحات مهندسی کنترل را بر حسب استاندارد IEEE ارایه کرده است. در مراجع [1] تا [5] می‌توان مثالهای عملی از سیستم‌های کنترل را پیدا کرد. مرجع [11] مثالهای عملی از کنترل در مهندسی پزشکی دارد. واحد (1) از مرجع [24] مقدمه‌ای جامع بر مهندسی کنترل است. مراجع [1-4] تا [1-1] در رابطه با تاریخچه مهندسی کنترل فوق العاده سودمند می‌باشند. مرجع [5-1] دایرة المعارفی از کلیه مباحث کنترلی تا سال ۱۹۸۷ است که در رابطه با مقدمه‌ای بر کنترل و تاریخچه آن بسیار جامع است. مرجع [1-6] کتاب لغت استاندارد IEEE در مهندسی برق و الکترونیک است. مراجع [1-7] تا [1-10] نیز تنها چند نمونه از نمونه‌های زیاد مقالات کلاسیک و پایه در نظریه کنترل اتوماتیک محسوب می‌شوند.

۲

نمایش سیستم‌های کنترل خطی

اهداف فصل:

- ۱- آشنایی با مفهوم تابع تبدیل و بدست آوردن توابع تبدیل سیستم‌های کنترل و اجزاء آنها.
 - ۲- رسم دیاگرام‌های بلوکی و نمودارهای گذر سیگنال برای یک سیستم کنترل و بررسی چگونگی کاربرد آنها.
 - ۳- آشنایی با نمایش سیستم توسط متغیرهای حالت و مفاهیم اولیه فضای حالت.
 - ۴- مدلسازی سیستم‌های فیزیکی.
 - ۵- آشنایی با مدلسازی موتورهای DC، به عنوان یک نمونه سیستم صنعتی.
- توجه: قبل از مطالعه این فصل آشنایی با تبدیل لاپلاس و کاربردهای آن الزامی است.

۱-۲ مقدمه

در مسایل عملی مهندسی کنترل، قبل از شروع تحلیل سیستم به منظور طراحی سیستم کنترل، در دست داشتن یک مدل دقیق ریاضی از سیستم الزامی است. در واقع اولین قدم در راه طراحی سیستم کنترل برای یک سیستم، مدلسازی آن سیستم توسط بیان مشخصه‌های آن با معادلات ریاضی است. لذا بدست آوردن مدل ریاضی سیستم که نمایانگر مشخصه‌های آن است، از اهمیت فوق العاده‌ای برخوردار می‌باشد.

بدون شک توصیف کامل عملکرد و عملیات سیستم فیزیکی بر حسب معادلات ریاضی، یک مجموعه بسیار پیچیده از تعداد زیادی معادله و روابط ریاضی را بهمراه خواهد داشت که به علت پیچیدگی بیش از اندازه برای تحلیل و طراحی سیستم مناسب نخواهد بود. از طرف دیگر، مدل ریاضی سیستم فیزیکی نباید بیش از اندازه ساده باشد، ساده سازی بیش از اندازه موجب می‌شود که مشخصه‌های مهم سیستم در مدل آن وارد نشود و تحلیل انجام شده بر اساس مدل، غلط یا غیرکافی باشد و هم‌چنین سیستم کنترل طراحی شده براساس این چنین مدلی نامناسب خواهد بود. بنابراین در تعیین مدل ریاضی یک سیستم فیزیکی، باید مشخصه‌های مهم و اساسی سیستم در مدلسازی در نظر گرفته شوند و در این انتخاب مقدار متناسبی تجربه و دید عملی لازم است.

برای سیستم‌های دینامیکی مورد بررسی در این کتاب، معادلات دیفرانسیل یک صورت متناسب برای توصیف ریاضی سیستم است.

۲-۲ توابع تبدیل

همانطور که در مقدمه اشاره شد، برای تحلیل درست و دقیق یک سیستم، بدست آوردن مدل آن لازم است. این مدل می‌تواند توسط روش‌های پیشرفته شناسایی سیستم^۱ از داده‌های ورودی - خروجی^۲ سیستم، یا با ترکیب اطلاعات اجزاء جداگانه تشکیل دهنده سیستم بدست آورده شود. در هر دو صورت، با تعیین مدل می‌توان پاسخ^۳ سیستم به ورودی‌های وارد به آن را بدست آورد. به عبارت دیگر، خروجی مدل ریاضی سیستم در پاسخ به ورودی اعمال

1- System identification

2- Input-output data

3- Response

شده به آن باید با خروجی سیستم واقعی در پاسخ به همان ورودی، یکسان باشد. مدل ریاضی را می‌توان به صورت تابعی در نظر گرفت که به ازاء ورودی‌های مختلف، خروجی‌های متناظر با سیستم واقعی را نشان می‌دهد. این چنین تابعی را تابع تبدیل^۱ می‌نامند.

در سیستم‌های دینامیکی رابطه بین ورودی سیستم (t) و خروجی سیستم (t) را می‌توان به صورت یک معادله دیفرانسیل به صورت زیر نوشت

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0)y(t) = (b_mD^m + b_{m-1}D^{m-1} + \dots + b_1D + b_0)u(t) \quad (1-2-2)$$

که در آن

$$Dy(t) = \frac{dy}{dt}, D^2y(t) = \frac{d^2y}{dt^2}, \dots$$

هم چنین ضرایب $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0, b_1, \dots, b_m$ مقادیر حقیقی هستند که توسط مشخصه‌های سیستم تعیین می‌گردند، مرتبه‌های n و m نیز مستقیماً با ساختار سیستم ارتباط دارند.

توجه کنید که با مشخص کردن اعداد صحیح n و m ، همراه با ضرایب a_1, a_2, \dots, a_{n-1} و b_1, b_2, \dots, b_m ، یک دسته داده شده مقادیر اولیه در $t=0$ پاسخ سیستم برای هر $y(t)$ را می‌توان با حل معادله دیفرانسیل داده شده با معادله $(1-2-2)$ بدست آورد. لیکن حل این معادله دیفرانسیل در حالت کلی کار ساده‌ای نیست و با بزرگ شدن اعداد صحیح n و m مشکل خواهد بود. به این دلیل برای پیدا کردن پاسخ سیستم‌های فیزیکی و صنعتی از این روش نمی‌توان استفاده نمود.

یک راه حل بسیار ساده، استفاده از تبدیل لاپلاس است. با گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین معادله $(1-2-2)$ و فرض شرایط اولیه صفر در $t=0$ داریم

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)Y(s) = (b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0)U(s) \quad (2-2-2)$$

که در آن $U(s)$ و $Y(s)$ نیز به ترتیب مقادیر تبدیل شده سیگنال‌های ورودی (t) و خروجی $y(t)$ هستند.

معادله (۲-۲-۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (3-2-2)$$

که در آن (s) G مستقل از سیگنال‌های ورودی و خروجی، تابعی است که ورودی (s) U را به خروجی (s) Y تبدیل می‌کند (یا انتقال می‌دهد). بنابراین در حالت کلی، تابع تبدیل را می‌توان به صورت نسبت دو چند جمله‌ای با شرایط اولیه صفر به صورت زیر در نظر گرفت.

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (4-2-2)$$

درجه چند جمله‌ای مخرج (s) G را مرتبه سیستم^۱ نامیده و سیستم را یک سیستم مرتبه n-ام^۲ می‌نامند. ضرایب a_i ها و b_i ها در تابع تبدیل (s) G، ثابت و تغییرناپذیر با زمان استند. کاربرد ایده تابع تبدیل به سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان محدود می‌شود. در اینجا مراحل بدست آوردن تابع تبدیل یک سیستم فیزیکی را بیان می‌کنیم:

- ۱- معادله دیفرانسیل سیستم را بنویسید.
- ۲- با فرض صفر بودن کلیه شرایط اولیه، تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیل را پیدا کنید.
- ۳- نسبت خروجی (s) Y به ورودی (s) U را پیدا کنید. این نسبت، تابع تبدیل است.

مثال ۱-۲-۲

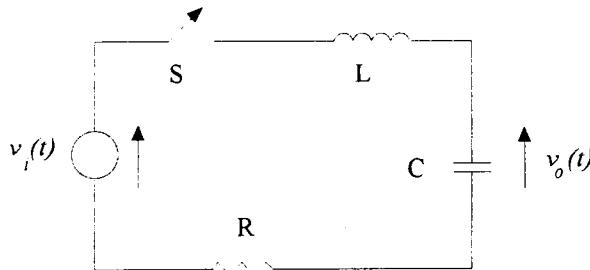
مدار سری RLC نشان داده شده در شکل ۱-۲ را در نظر بگیرید. فرض کنید که تا قبل از سته شدن کلید S در زمان $t=0$ ، جریان (i) وجود ندارد و هم چنین خازن C نیز شارژ شده باقی می‌ماند. مطلوب است تابع تبدیل مدار با ولتاژ ورودی (v_i)^۳ و ولتاژ خروجی (v_o) را برای $t \geq 0$ تعیین کنیم.

نخست معادله دیفرانسیل مدار را با استفاده از قانون ولتاژ کیرشتف^۴ می‌نویسیم. با استفاده از این قانون ولتاژ ورودی (v_i) باید برابر مجموع افت ولتاژهای دو سر سلف، خازن و مقاومت باشد. یعنی آنکه

1- System order

2- n-th order system

3- Kirchhoff's voltage law



شکل ۱-۲ مدار RLC سری با ورودی $v_i(t)$

$$v_i(t) = L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int^t i(\tau) d\tau + Ri(t)$$

برای از بین بردن عبارت انتگرالی، با مشتق‌گیری از طرفین معادله بالا داریم.

$$Dv_i(t) = (LD' + RD + \frac{1}{C})i(t)$$

اکنون با گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین معادله بالا داریم

$$CsV_i(s) = (LCs' + RCs + 1)I(s)$$

$$I(s) = \frac{Cs}{LCs' + RCs + 1} V_i(s)$$

یا

تابع تبدیل بدست آمده، ولتاژ ورودی $(s)V_i$ را به جریان $(s)I$ ارتباط می‌دهد. در مرحله بعد

باید تابع تبدیل بین جریان و ولتاژ خروجی $(s)V_o$ را بدست آوریم.

ولتاژ دو سر خازن C ، که ولتاژ خروجی نیز هست، عبارتست از

$$v_o(t) = \frac{1}{C} \int^t i(\tau) d\tau$$

یا

$$Dv_o(t) = \frac{1}{C} i(t)$$

که تبدیل لاپلاس آن عبارتست از

$$V_o(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$$

با جایگزینی برای $(s)I$ از معادله بالا، تابع تبدیل بین ولتاژ خروجی و ورودی چنین است

$$V_o(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} V_i(s)$$

مثال ۲-۲-۲

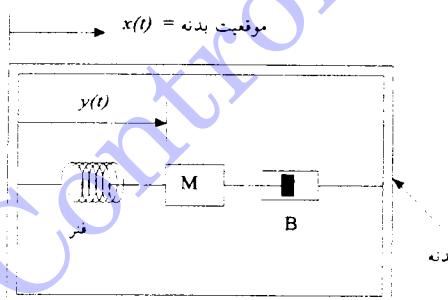
سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل ۲-۲ یک شتاب سنج^۱ ساده است. موقعیت جرم M نسبت به شتاب سنج (t) لا متناسب با شتاب بدنه است. تابع تبدیل بین شتاب ورودی $A(s)$ و خروجی $Y(s)$ را پیدا کنید.

معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم، از مساوی قرار دادن مجموع نیروهای عمداً کننده بروی جرم M، با شتاب اینرسی آن بدست می‌آید. از قانون دوم نیوتون داریم

$$-B \frac{dy(t)}{dt} - Ky(t) = M \frac{d^2}{dt^2}(y(t) - x(t))$$

یا

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + B \frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = Ma(t)$$



شکل ۲-۲-۲ شتاب سنج مثال ۲

که در آن $a(t)$ شتاب ورودی است. با فرض شرایط اولیه صفر، یعنی تبدیل لا یلاس داریم

$$(Ms^2 + Bs + K)Y(s) = MA(s)$$

بنابراین تابع تبدیل شتاب سنج عبارتست از

$$\frac{Y(s)}{A(s)} = \frac{1}{s^2 + (B/M)s + K/M}$$

در اینجا، چند نکته مهم را در رابطه با توابع تبدیل عنوان می‌کنیم:

- ۱- تابع تبدیل یک سیستم، یک مدل ریاضی از آن سیستم است که رابطه بین متغیر ورودی و متغیر خروجی را بیان می‌دارد.
- ۲- تابع تبدیل یک خاصیت از خود سیستم است و مستقل از اندازه و ماهیت ورودی به آن می‌باشد.
- ۳- توابع تبدیل سیستم‌های فیزیکی مختلف می‌توانند یکسان باشند. در واقع توابع تبدیل ارتباط بین ورودی و خروجی را بدست می‌دهند و هیچ‌گونه اطلاعاتی در رابطه با ساختار داخلی سیستم در اختیار ما نمی‌گذارند.
- ۴- با در دست داشتن تابع تبدیل یک سیستم، می‌توان از ماهیت سیستم توسط بررسی پاسخهای آن به ورودی‌های مختلف، اطلاعات مفیدی به دست آورد.

۳-۲ دیاگرام‌های بلوکی

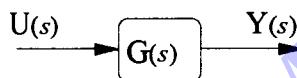
در بخش ۲-۲ توصیف ریاضی سیستم را بر حسب نمایش تابع تبدیل بررسی کردیم. اگر تنها با سیستم‌های ساده همچون مثالهای قبل سروکار داشته باشیم، ضرورتی برای نمایش‌های دیگر از سیستم احساس نخواهیم کرد. لیکن اگر سیستم ساده قبل، جزیی از یک مجموعه از سیستم‌ها باشد که با هم ارتباط خاصی داشته باشند، آنگاه تابع تبدیل کل سیستم، تابع پیچیده‌ای خواهد بود که به ارتباط بین این سیستم‌ها بستگی خواهد داشت. اگر چه می‌توان با ارتباط بین سیستم‌های مختلف به صورت کاملاً جبری برخورد کرد، لیکن با زیاد شدن اجزاء سیستم، ارتباط دادن معادله‌های مختلف با سیستم‌هایی که آنها را نمایش می‌دهند، سیار مشکل خواهد بود. یک راه حل این مشکل، نمایش دادن سیستم موردنظر توسط دیاگرام بلوکی^۱ است، که یک نمایش گرافیکی می‌باشد. با استفاده از این نمایش، بسادگی می‌توان سیستم‌های (یا کنترل کننده‌های) دیگری را به مجموع سیستم کنترل اضافه و یا کم کرد. یک مزیت استفاده از دیاگرام‌های بلوکی آن است که می‌توان با سرعت و دقت زیاد، ترکیب‌های مختلفی برای سیستم کنترل در نظر گرفت.

۱- Block diagram

۱-۳-۲ اجزاء اصلی دیاگرام‌های بلوکی

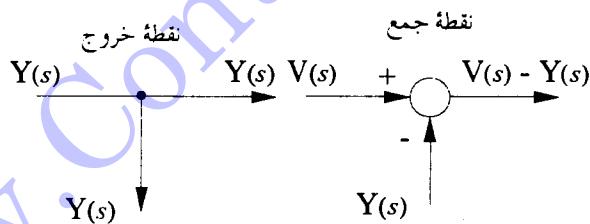
تصویف سیستم توسط تابع تبدیل که در بخش ۲-۲ معرفی گردید، به صورت دیاگرام بلوکی نشان داده شده در شکل ۳-۲ نمایش داده می‌شود. ازین‌رو دیاگرام بلوکی شکل ۳-۲ و معادله $(s)U(s)=G(s)Y(s)$ نمایشهای مختلف از یک سیستم هستند و دقیقاً یک معنی را بیان می‌کنند.

همانطور که از شکل ۳-۲ مشاهده می‌گردد، سیگنال‌های $(s)U$ و $(s)Y$ بر حسب یک جهت که به پیکانها داده شده است، نشان داده شده‌اند و بلوک نیز مدل سیستم که با $(s)G$ نشان داده شده است را دربر می‌گیرد.



شکل ۳-۲ دیاگرام بلوکی یک تابع تبدیل

دو جزء اصلی دیگر یک نمایش دیاگرام بلوکی، نقطه جمع^۱ و نقطه خروج^۲ هستند. این دو نقطه در شکل ۴-۲ نشان داده شده‌اند.



شکل ۴-۲ نقاط جمع و خروج

نقطه جمع که معمولاً با یک دایره نمایش داده می‌شود (در بعضی از کتابها از علامتهای Σ یا \times در داخل دایره استفاده می‌شود) می‌تواند هر چند تعداد سیگنال ورودی داشته باشد، هر

1- Summing point

2- Take-off point

کدام از این سیگنال‌ها یک علامت + یا - را با خود دارند که نشان دهنده عمل جمع یا تفریق آن سیگنال با سایر سیگنال‌ها است. نقطه جمع تنها یک خروجی دارد که به سایر قسمتهای دیاگرام بلوکی وارد می‌شود. در صورت لزوم استفاده از یک متغیر در چندین محل، می‌توان از تعداد مناسبی نقاط خروج استفاده نمود.

۲-۳-۲ عملیات جبری بلوک دیاگرامی

دیاگرام‌های بلوکی سیستم‌های کنترل عملی اغلب بسیار پیچیده هستند. این دیاگرام‌های بلوکی عموماً چندین حلقه فیدبک و پیش‌خور و چندین ورودی دارند. با استفاده از روش سیستماتیک کاهش بلوک‌ها و حلقه‌ها، می‌توان این دیاگرام‌های بلوکی را به صورت ساده تبدیل کرد و توابع تبدیل قسمتهای مختلف و یا تابع تبدیل کل سیستم را بدست آورد. یک دسته از عملیات جبری دیاگرام بلوکی در جدول ۱-۲ آورده شده‌اند. برای تمرین، با بکارگیری قواعد اجزاء اصلی دیاگرام‌های بلوکی، قواعد ۱ تا ۱۳ جدول ۱-۲ را می‌توانید بسادگی اثبات کنید.

مراحل زیر را می‌توان برای کاهش دیاگرام‌های بلوکی بکار بست. در این مراحل از قواعد جدول ۱-۲ استفاده شده است.

مرحله ۱: با استفاده از قاعده ۴ جدول ۱-۲، کلیه بلوک‌های سری را ترکیب کنید.

مرحله ۲: با استفاده از قاعده ۵ جدول ۱-۲، کلیه بلوک‌های موازی را ترکیب کنید.

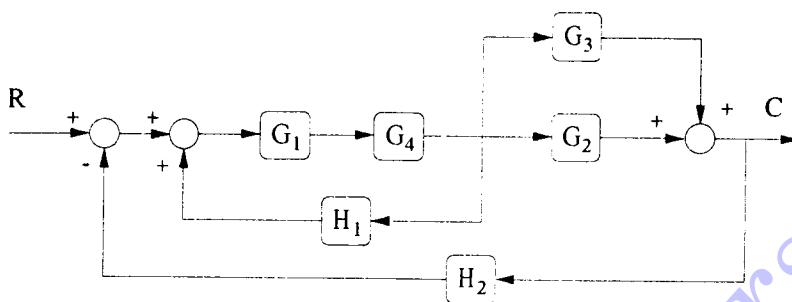
مرحله ۳: با استفاده از قاعده ۱۳ جدول ۱-۲، کلیه حلقه‌های فیدبک جزیی را حذف کنید.

مرحله ۴: با استفاده از قواعد ۶ و ۷ جدول ۱-۲، نقاط جمع را به طرف چپ و نقاط خروج را به طرف راست حلقه اصلی انتقال دهید.

مرحله ۵: مراحل ۱ تا ۴ را در صورت لزوم تکرار کنید، تا دیاگرام بلوکی به صورت استاندارد فیدبک تبدیل شود.

مثال ۱-۳-۲

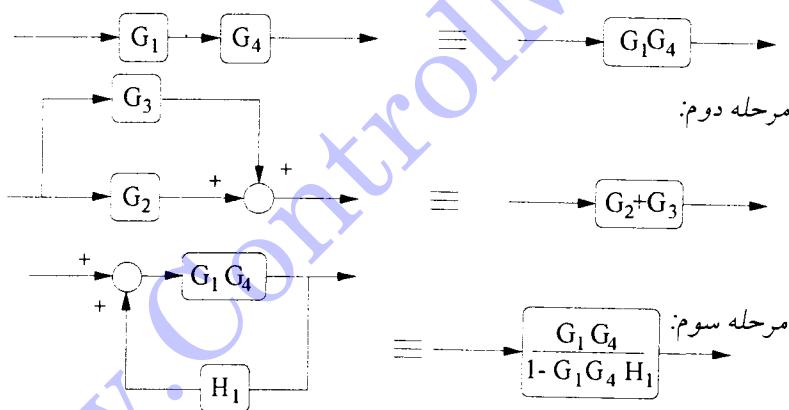
دیاگرام بلوکی نشان داده شده در شکل ۵-۲ را به صورت یک حلقه فیدبک تبدیل کنید.



شکل ۵-۲ دیاگرام بلوکی مثال ۱-۳-۲

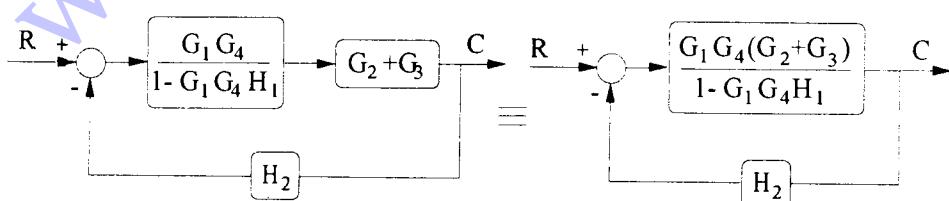
اکنون مراحل کاهش دیاگرام بلوکی را اجرا می‌کنیم.

مرحله اول:



مرحله چهارم: در این مثال موردهی ندارد

مرحله پنجم:



	دیاگرامهای بلوکی اصلی	دیاگرامهای بلوکی معادل
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		

جدول ۱-۲ قواعد جبر دیاگرام بلوک

توجه کنید که در صورت لزوم با اعمال قاعده ۱۳ از جدول ۲-۱، می‌توان تابع تبدیل حلقه بسته را بدست آورد.

۳-۳-۲ رسم دیاگرام بلوکی سیستم‌های فیزیکی

در اینجا مراحل رسم دیاگرام بلوکی برای یک سیستم را ارایه می‌کنیم:

مرحله ۱: معادلات توصیف کننده رفتار هر عنصر را بنویسید.

مرحله ۲: تبدیل لاپلاس معادلات بدست آمده از مرحله اول را بگیرید (شرط اولیه را صفر فرض کنید).

مرحله ۳: هر کدام از معادلات تبدیل لاپلاس گرفته شده را به صورت یک بلوک مجزا رسم کنید.

مرحله ۴: بلوک‌های بدست آمده در مرحله ۳ را در یک دیاگرام بلوکی کامل، ترکیب کنید.

۲-۳-۲ مثال

مدار RC نشان داده شده در شکل ۶-۲ (الف) را در نظر بگیرید. دیاگرام بلوکی مدار را رسم کنید.

نخست معادلات مدار را می‌نویسیم. داریم

$$i = \frac{e_i - e_o}{R}$$

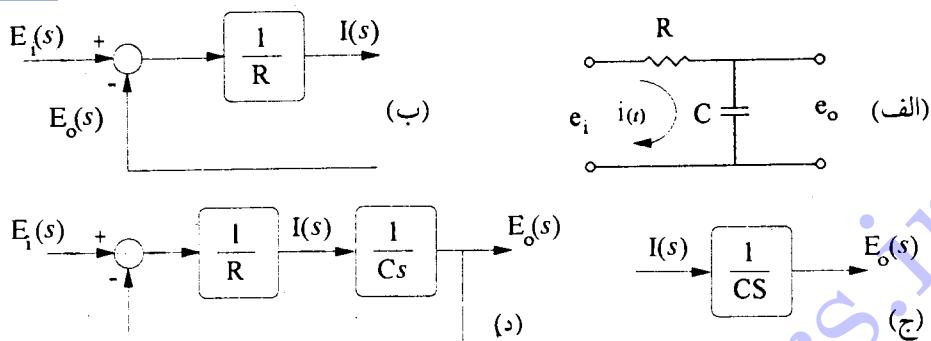
$$e_o = \int idt$$

تبدیل لاپلاس این معادله‌ها، با شرط صفر بودن شرایط اولیه، عبارتند از

$$I(s) = \frac{E_i(s) - E_o(s)}{R}$$

$$E_o(s) = \frac{I(s)}{Cs}$$

معادله $(s)I$ یک عمل جمع را نشان می‌دهد و دیاگرام بلوکی متناظر آن در شکل ۶-۲ (ب) نشان داده شده است. معادله $(s)E_o$ دیاگرام بلوکی شکل ۶-۲ (ج) را نشان می‌دهد. در آخرین

(الف) مدار RC (ب) دیاگرام بلوکی معادله $I(s)$ (ج) دیاگرام بلوکی معادله $E_o(s)$ (د) دیاگرام بلوکی مدار RC

(ب)

(ج)

(د)

مرحله با سرهم کردن این دو عنصر، دیاگرام بلوکی کلی نشان داده شده در شکل ۶-۲ (د) را بدست می‌آوریم.

مثال ۲-۳-۲

سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل ۶-۷ را در نظر بگیرید. برای این سیستم یک دیاگرام بلوکی رسم کنید. با ساده کردن دیاگرام بلوکی بدست آمده، تابع تبدیل بین $(s)X_i$ و $(s)X_o$ را پیدا کنید. فرض کنید که جابجایی x از موقعیت تعادل هنگامیکه $x = 0$ است، اندازه گرفته می‌شود.

نخست معادلات دیفرانسیل اجزاء سیستم را می‌نویسیم. مجموع نیروهای عمل کننده بر روی جرم m را به صورت F تعریف کنید. معادلات سیستم عبارتند از

$$mD^3x = F$$

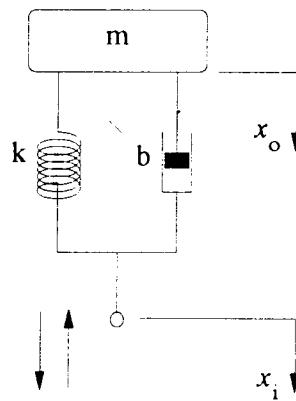
$$F = -b(Dx_i - Dx_o) - k(x_o - x_i)$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از این معادله‌ها، با فرض شرایط اولیه صفر، داریم

$$ms^3X_o(s) = F(s)$$

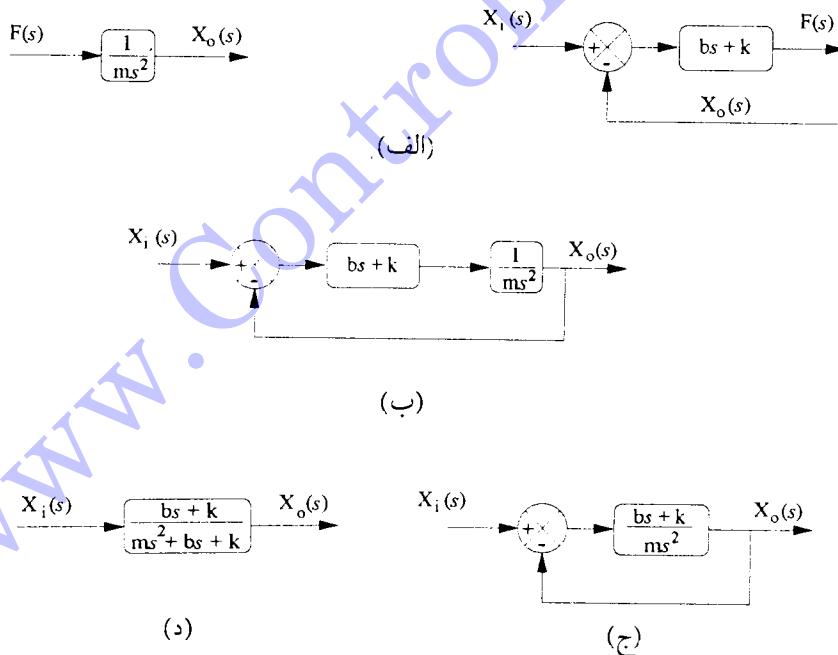
$$F(s) = -b[sX_o(s) - sX_i(s)] - k[X_o(s) - X_i(s)]$$

$$= (bs + k)[X_i(s) - X_o(s)]$$



شکل ۷-۲ سیستم مکانیکی مثال ۳-۳-۲

از معادلات تبدیل لاپلاس گرفته شده، عناصر دیاگرام بلوکی نشان داده شده در شکل ۸-۲



شکل ۸-۲ (الف) عناصر یک دیاگرام بلوکی، (ب) دیاگرام بلوکی حاصل از ترکیب عناصر، (ج) و

(د) دیاگرام‌های بلوکی ساده شده.

(الف) را بدست می آوریم. با سرهم کردن مناسب این دو دیاگرام بلوکی، همانطور که در شکل ۸-۲ (ب) نشان داده شده است، دیاگرام بلوکی سیستم بدست می آید. با استفاده از قواعد ۴ و ۱۳ از جدول ۱-۲، دیاگرام بلوکی ورودی - خروجی و تابع تبدیل تبدیل سیستم، همانند شکل ۸-۲ (ج) و (د)، بدست می آید. لذا داریم

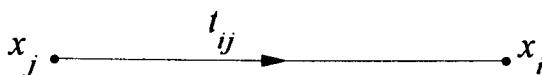
$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{bs+k}{ms^2+bs+k}$$

۴-۲ نمودارهای گذر سیگنال

نمایش ترسیمی سیستم‌های کنترل به صورت دیاگرام‌های بلوکی در بخش ۳-۲ ارایه شد. یک روش دیگر برای نمایش ترسیمی سیستم‌های کنترل، روش نمودار گذر سیگنال^۱ است. باید توجه داشت که هر دو روش حاوی اطلاعات مشابهی در رابطه با سیستم می‌باشند و لذا از این نظر مزیتی بر یکدیگر نخواهند داشت.

نمودار گذر سیگنال، نمایشی تصویری از دستگاه معادلات جبری است که سیستم را توصیف می‌کنند. لذا باید برای اعمال روش نمودار گذر سیگنال در تحلیل سیستم‌های کنترل، نخست معادلات دیفرانسیل خطی سیستم را به معادلات جبری در Δ تبدیل کرد. در واقع، همانند دیاگرام‌های بلوکی، نمودارهای گذر سیگنال انتقال سیگنال را در سیستم به صورت تصویری نمایش می‌دهند. لیکن رسم آن ساده‌تر از رسم دیاگرام‌های بلوکی است و بنا بر این کار کردن با آن ساده‌تر می‌باشد.

یک نمودار گذر سیگنال از یک شبکه تشکیل می‌شود، که در آن گره‌ها توسط شاخه‌های جهت داده شده به هم متصل می‌باشند. هر گره نشان دهنده یک متغیر سیستم است و هر شاخه بین دو گره به صورت یک ضرب کننده سیگنال عمل می‌کند. در هر شاخه سیگنال فقط در یک جهت حرکت می‌کند و این جهت توسط پیکانی که بروی شاخه سوار است نشان داده می‌شود. برای مثال معادله ساده $x_{ij} = x_i x_j$ را در نظر بگیرید، که در آن x_i و x_j می‌توانند توابعی از زمان، فرکанс مختلط و یا هر کمیت دیگری باشند، i, j نیز یک عما ریاضی است که x_i را به x_j انتقال می‌دهد. نمودار گذر سیگنال این معادله ساده در شکل ۹-۲ نشان داده شده است.



شکل ۹-۲ گراف جریان سیگنال معادله $t_{ij} = x_i - x_j$

قبل از آنکه به بحث بیشتری در رابطه با نمودارهای گذر سیگنال و کاربرد آنها پردازیم، به تعاریف مقدماتی زیر توجه کنید.

گره: گره نقطه‌ای است که یک متغیر یا سیگنال را انشان می‌دهد.

انتقال: انتقال یک بهره حقیقی یا بهره مختلط بین دو گره است. این چنین بهره‌هایی را می‌توان بر حسب تابع تبدیل بین دو گره بیان کرد.

شاخه: شاخه یک پاره خط جهت داده شده است که دو گره را به هم متصل می‌کند. بهره یک شاخه، انتقال است.

گره ورودی^۴ یا منبع^۵: یک گره ورودی یا منبع گره‌ای است که تنها شاخه‌هایی به آن متصل است که از آن خارج می‌شوند. این گره متناظر با یک متغیر مستقل است.

گره خروجی^۶ یا سینک^۷: یک گره خروجی یا سینک گره‌ای است که تنها شاخه‌هایی به آن متصل است که به آن وارد می‌شوند. این گره متناظر با یک متغیر وابسته است.

گره مخلوط^۸: یک گره مخلوط گره‌ای است که شاخه‌هایی دارد که هم به آن وارد و هم از آن خارج می‌شوند.

مسیر^۹: مسیر یک پیمایش از شاخه‌های متصل در جهت پیکانهای شاخه است. اگر هیچ گره‌ای بیش از یکبار قطع نشود، مسیر باز است. اگر مسیر در گره‌ای که آغاز شده است، خاتمه یابد و هیچ گره‌ای دیگری بیش از یک بار قطع نشود، مسیر بسته است. اگر مسیری بعضی از گره‌ها را بیش از یک بار قطع کند و در گره‌ای غیر از گره‌ای که از آن آغاز کرده خاتمه یابد، نه باز است و نه بسته.

1- Node

2- Transmittance

3-Branch

4- Input node

5- Source

6- Output node

7- Sink

8- Mixed node

9- Path

حلقه^۱: مسیر بسته را حلقه گویند.

بهره حلقه^۲: بهره حلقه حاصلضرب انتقالهای شاخه یک حلقه است.

حلقه‌های مجزا^۳: حلقه‌ها را مجزا گویند اگر گره مشترکی نداشته باشند.

مسیر پیشرو^۴: مسیر پیشرو، مسیری است از یک گره ورودی (منبع) به یک گره خروجی (سینک) بطوریکه هیچ گره‌ای را بیش از یکبار قطع نکند.

بهره مسیر پیشرو^۵: بهره مسیر پیشرو حاصلضرب انتقالهای شاخه از یک مسیر پیشرو است.

مثال ۱-۴-۲

نمودار گذر سیگنال شکل ۱۰-۲ در نظر بگیرید. در این نمودار گذر سیگنال داریم مسیرها (به عنوان نمونه): $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4$ به x_4 و بازگشت به $x_3 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1$ به x_4

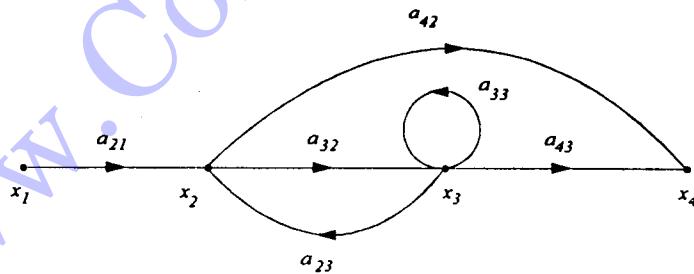
گره ورودی (منبع): x_1

گره خروجی (سینک): x_4

مسیر پیشرو: $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4$ به x_4 و $x_4 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1$ به x_4

بهره مسیر: بهره مسیر از $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4$ برابر است با $a_{21}a_{32}a_{43}$

بهره حلقه: بهره حلقه از $x_4 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1$ به x_4 برابر است با $a_{33}a_{23}$



شکل ۱۰-۲ نمودار گذر سیگنال مثال ۱-۴-۲

1- Loop

2- Loop gain

3- Nontouching loops

4- Forward path

5- Forward path gain

خواص نمودارهای گذر سیگنال. چند خاصیت مهم از نمودارهای گذر سیگنال عبارتند از:

۱- یک شاخه نشان دهنده وابستگی تابعی^۱ یک سیگنال به سیگنال دیگر است. سیگنال تنها در جهتی عبور خواهد کرد که توسط پیکان شاخه مشخص گردیده است.

۲- یک گره، سیگنال های کلیه شاخه های ورودی به آن را با هم جمع می کند و این مجموع را به کلیه شاخه هایی که از آن خارج می شوند، انتقال می دهد.

۳- هر شاخه با انتقال واحد، یک گره مانند x_i را به گره دیگری، نشان داده شده با x_a وصل می کند. این شاخه ها را می توان برای تبدیل یک گره مخلوط به یک گره خروجی (سینک) استفاده کرد.

۴- نمودار گذر سیگنال یک سیستم داده شده منحصر بفرد نمی باشد. با نوشتен معادلات سیستم به صورت های مختلف می توان نمودارهای گذر سیگنال متفاوتی برای یک سیستم رسم کرد.

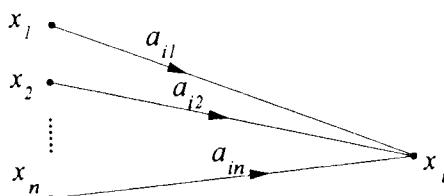
۱-۴-۲ جبر نمودار گذر سیگنال

۱- قاعده جمع

مقدار متغیر در یک گره برابر است با مجموع کلیه سیگنال هایی که به آن گره وارد می شوند. به عبارت دیگر، معادله زیر

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

توسط نمودار گذر جریان سیگنال در شکل ۱۱-۲ نشان داده شده است.

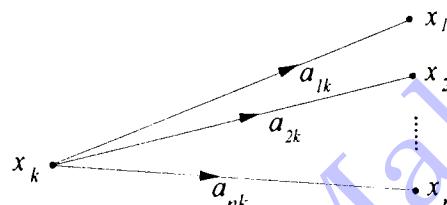


شکل ۱۱-۲ نمودار گذر سیگنال $x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$

۲- قاعده انتقال

هنگامی که از یک گره، همانطور که در شکل ۱۲-۲ نشان داده شده است، شاخه‌هایی خارج شوند مقدار متغیر در آن گره با ضرب در بهره بین دو گره (تابع تبدیل یا انتقال) به گره بعد انتقال پیدا می‌کند. به عبارت دیگر متغیرهای x_1, x_2, \dots, x_n در گره‌های نشان داده شده در شکل ۱۲-۲ عبارتند از

$$x_i = a_{ik} x_k \quad (i=1, \dots, n)$$



شکل ۱۲-۲ نمودار گذر سیگنال (ثابت) a_{ik} $k=1, 2, \dots, n$

۳- قاعده ضرب

یک اتصال سری از n شاخه با انتقالهای $a_{n(n-1)}, a_{n(n-2)}, \dots, a_{21}$ را می‌توان با یک شاخه، با انتقال جدید برابر با حاصل ضرب کلیه انتقالهای قبلی، جایگزین کرد. یعنی

$$x_n = a_{21} a_{32} a_{43} \dots a_{n(n-1)} x_1$$

برای نمایش تصویری قاعده ضرب به شکل ۱۳-۲ مراجعه کنید.



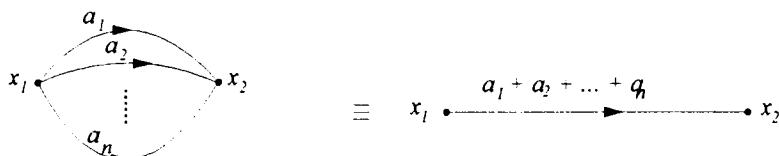
شکل ۱۳-۲ قاعده ضرب

۴- قاعده شاخه‌های موازی

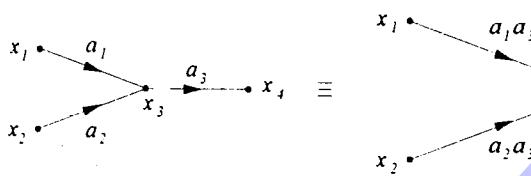
شاخه‌های موازی را می‌توان همانند شکل ۱۴-۲، با جمع کردن انتقالهای آنها با یک شاخه معادل جایگزین کرد.

۵- قاعده حذف گره مخلوط

یک گره مخلوط را می‌توان همانند شکل ۱۵-۲ حذف کرد.



شکل ۱۴-۲ قاعده شاخه های موازی



شکل ۱۵-۲ قاعده حذف گره مخلوط

۶- قاعده حذف حلقه

یک حلقه را می توان همانند شکل ۱۶-۲ حذف کرد. توجه کنید که

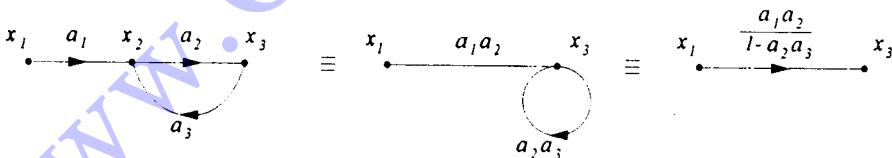
$$x_3 = a_2 x_2 \quad , \quad x_2 = a_3 x_1 + a_2 x_3$$

از اینرو

$$x_2 = a_1 a_2 x_1 + a_2 a_3 x_3$$

یا

$$x_3 = \frac{a_1 a_2}{1 - a_2 a_3} x_1$$



شکل ۱۶-۲ قاعده حذف حلقه

۲-۴-۲ نمایش نمودار گذر سیگنال سیستم های خطی

از نمودارهای گذر سیگنال به طور گسترده ای برای تحلیل سیستم های خطی استفاده می شود. نمودار را می توان از معادلات سیستم و یا بطور مستقیم از سیستم فیزیکی ترسیم

کرد. با بکارگیری قواعد جبری بخش ۱-۴-۲ می‌توان رابطه بین متغیر خروجی و ورودی را بدست آورد.

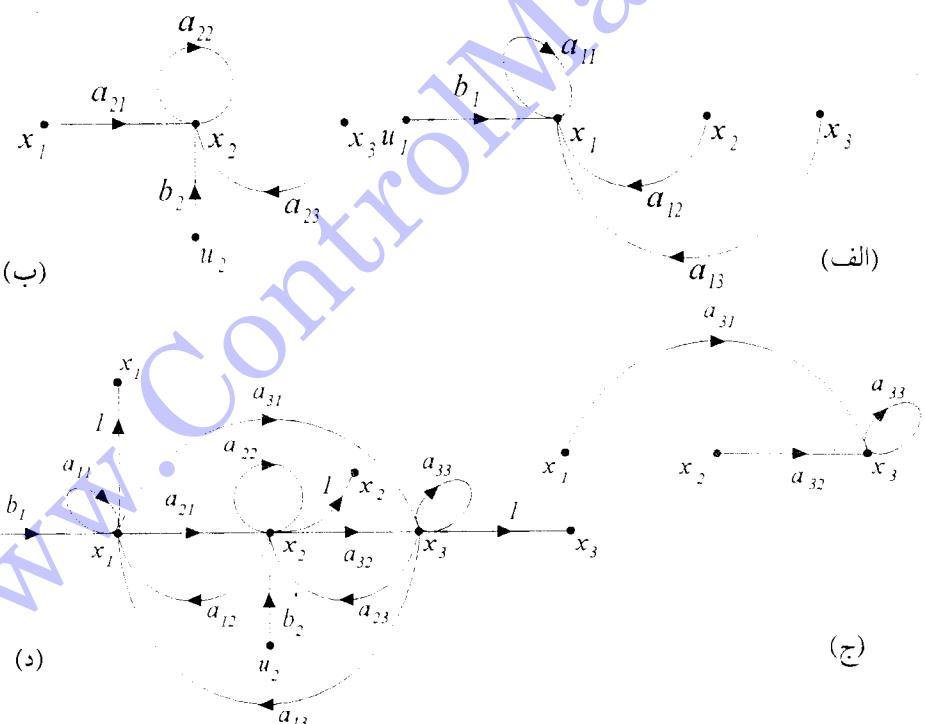
سیستم تعریف شده با مجموعه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 u_1 \quad (1-4-2)$$

$$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2 u_2 \quad (2-4-2)$$

$$x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \quad (3-4-2)$$

که در آن x_1 و u_1 متغیرهای ورودی و x_2 ، x_3 و u_2 متغیرهای خروجی هستند. نمایش نمودار گذر سیگنال سیستمی که با این معادلات توصیف شده است را می‌توان به صورت زیر بدست آورد: نخست گرههای x_1 ، x_2 و x_3 را مانند شکل ۱۷-۲ (الف) جایابی کنید. توجه کنید که a_{ij}



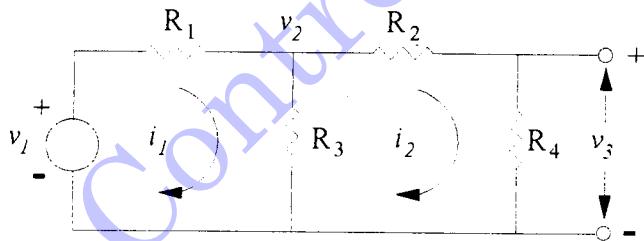
شکل ۱۷-۲ نمودارهای گذر سیگنال نشان دهنده (الف) معادله (۱-۴-۲)، (ب) معادله (۲-۴-۲)، (ج) معادله (۳-۴-۲)؛ (د) نمودار گذر سیگنال کامل نشان دهنده سیستم تعریف شده با معادلهای (۱-۴-۲) تا (۳-۴-۲).

انتقال بین x_1 و x_2 است. توجه کنید که معادله (۱-۴-۲) بیان می‌دارد که a_{11} برابر با مجموع چهار سیگنال $a_{11}x_1$ ، $a_{12}x_2$ ، $a_{13}x_3$ و $a_{14}x_4$ است. نمودار گذر سیگنال نشان دهنده این معادله در شکل ۱۷-۲ (الف) نشان داده شده است. معادله (۱-۴-۲) بیان می‌دارد که a_{22} برابر با مجموع $a_{21}x_1$ ، $a_{22}x_2$ ، $a_{23}x_3$ و $a_{24}x_4$ است. نمودار گذر سیگنال متناظر در شکل ۱۷-۲ (ب) نشان داده شده است. به طور مشابهی، نمودار گذر سیگنال متناظر با معادله (۱-۴-۳) در شکل ۱۷-۲ (ج) نشان داده شده است.

نمودار گذر سیگنال نشان دهنده معادله‌های (۱-۴-۲)، (۲-۴-۲) و (۳-۴-۲) با ترکیب شکل‌های ۱۷-۲ (الف)، (ب) و (ج) بدست می‌آید. سرانجام، نمودار گذر سیگنال کامل برای دستگاه معادلات داده شده در شکل ۱۷-۲ (د) نشان داده شده است.

مثال ۲-۴-۲

یک نمودار گذر سیگنال برای سیستم نشان داده شده در شکل ۱۸-۲ رسم کنید. همانطور که از شکل ۱۸-۲ مشاهده می‌شود، این سیستم چهار متغیر دارد که عبارتند از: i_1 ، v_2 ، i_2 و v_3 .



شکل ۱۸-۲ سیستم مثال ۲-۴-۲

معادلات حاکم بر این سیستم عبارتند از:

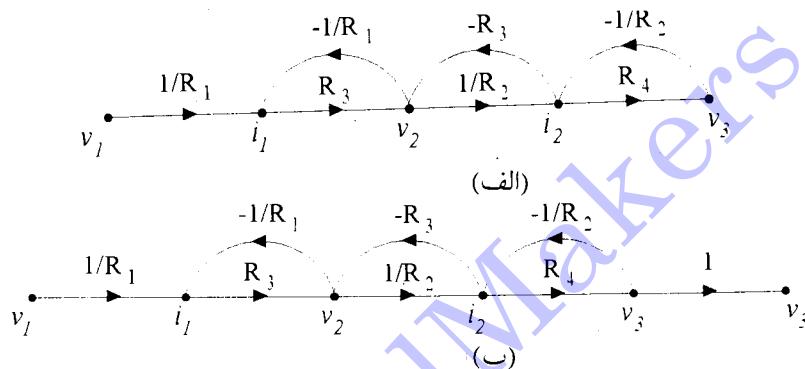
$$i_1 = \left(\frac{1}{R_1} \right) v_1 - \left(\frac{1}{R_3} \right) v_2$$

$$v_2 = R_1 i_1 - R_3 i_2$$

$$i_2 = \left(\frac{1}{R_2} \right) v_2 - \left(\frac{1}{R_4} \right) v_3$$

$$v_3 = R_2 i_2$$

دقیق کنید که معادله‌ای برای $\frac{V_2}{V_1}$ گره ورودی، نوشته نشده است. با قرار دادن پیچ گره برای چهار متغیر و یک گره ورودی و وصل کردن شاخه‌های مناسب از معادلات حاکم بر سیستم، نمودار گذر سیگنال نشان داده شده در شکل ۱۹-۲ (الف) بدست خواهد آمد. اگر بخواهیم $\frac{V_3}{V_1}$ را به صورت یک گره خروجی نشان دهیم، با اضافه کردن یک شاخه با انتقال واحد، نمودار گذر سیگنال نشان داده شده در شکل ۱۹-۲ (ب) بدست خواهد آمد.



شکل ۱۹-۲ نمودار گذر سیگنال سیستم شکل ۱۸-۲

فرمول بهره میسن برای نمودارهای گذر سیگنال، در بسیاری از کاربردهای عملی و صنعتی، مطلوب است که تابع تبدیل (رابطه بین ورودی و خروجی) سیستم را با بکارگیری نمودار گذر سیگنال آن بدست آوریم. در نمودار گذر سیگنال، انتقال بین گره ورودی و گره خروجی، بهره کلی یا انتقال کلی نمودار بین دو گره است. برای پیدا کردن این انتقال یا بهره می توان از عملیات جبری ارایه شده در بخش ۱-۴-۲ برای کاهش نمودار گذر سیگنال استفاده کرد.

لیکن برای نمودارهای گذر سیگنال با تعداد زیادی گره، شاخه و حلقه، این کار مشکل شده و احتمال اشتباه در محاسبات بسیار بالا می‌رود. یک راه حل عملی و سیستماتیک برای این مسئله، استفاده از فرمول بهره میسن^۱ است.

فرمول بهره میسن، به صورت زیر است

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_k P_k \Delta_k \quad (4-4-2)$$

1- Mason's gain formula

که در آن

$P_k =$ بهره مسیر یا انتقال k امین مسیر پیشرو

$\Delta =$ دترمینان نمودار

$(\text{مجموع کلیه بهره‌های تک حلقه‌های مجزا}) - 1$

$+ (\text{مجموع حاصلضریب‌های بهره کلیه ترکیبیهای ممکن از دو حلقه‌های مجزا})$

$- (\text{مجموع حاصلضریب‌های بهره کلیه ترکیبیهای ممکن از سه حلقه‌های مجزا})$

$$= 1 - \sum_a L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f + \dots$$

$\sum_a L_a =$ مجموع کلیه بهره‌های تک حلقه‌های مجزا

$\sum_{b,c} L_b L_c =$ مجموع حاصلضریب‌های بهره کلیه ترکیبیهای ممکن از دو حلقه‌های مجزا

$\sum_{d,e,f} L_d L_e L_f =$ مجموع حاصلضریب‌های بهره کلیه ترکیبیهای ممکن از سه حلقه‌های مجزا

$\Delta_k =$ کوفاکتور k ، دترمینان k امین مسیر پیشرو نمودار، پس از حذف حلقه‌هایی است

که با آن مسیر پیشرو گره مشترک دارند. یعنی آنکه، کوفاکتور Δ_k از Δ بعد از حذف حلقه‌هایی که مسیر k را قطع می‌کنند، بدست می‌آید.

توجه کنید که جمعهای بالا بروی کلیه مسیرهای ممکن از ورودی به خروجی گرفته شده است. برخلاف آنکه ممکن است استفاده از این فرمول در اولین بروخورد مشکل به نظر رسد، با اندکی تمرین مشخص خواهد شد که کاربرد آن بسیار ساده‌تر است از آنچه که به نظر می‌رسد. به مثالهای زیر برای روشنتر شدن این مطلب توجه کنید.

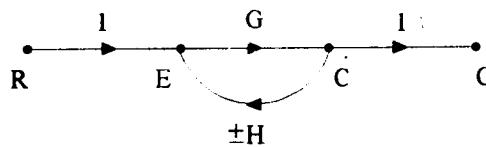
مثال ۲-۴-۲

سیستم فیدبک نشان داده شده در شکل ۲-۲۰ را در نظر بگیرید. در این شکل برای H^+ فیدبک مثبت و برای H^- فیدبک منفی خواهیم داشت. در این نمودار تنها یک مسیر پیشرو وجود دارد. از این‌رو

$$P_1 = G$$

و لذا $P_2 = P_3 = \dots = P_r = 0$ هم چنین تنها یک حلقه وجود دارد. بنابراین

$$L_1 = \pm GH$$



شکل ۲۰-۲ نمودار گذر سیگنال مثال ۲-۴-۲

واضح است که در این مثال $\Delta = L_1 \dots L_n = L$ دترمینان نمودار عبارتست از

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - (L_1) \\ &= 1 \neq GH\end{aligned}$$

کوفاکتور Δ_1 از Δ بعد از حذف حلقه‌هایی که مسیر P_1 را قطع می‌کنند (با آن گره مشترک دارند)، بدست می‌آید. بنابراین

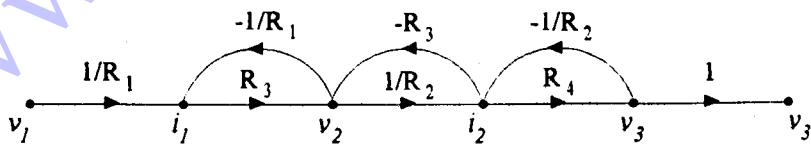
$$\Delta_1 = 1$$

سرانجام، تابع تبدیل حلقه - بسته $C(s)/R(s)$ عبارتست از

$$\begin{aligned}\frac{C(s)}{R(s)} &= P = \frac{1}{\Delta} (P_1 \Delta_1) \\ &= \frac{G}{1 \neq GH}\end{aligned}$$

مثال ۴-۴-۲

نمودار گذر سیگنال سیستم مثال ۲-۴-۲ که در شکل ۱۸-۲ رسم شده است را در نظر بگیرید. این نمودار گذر سیگنال، در شکل ۲۱-۲ داده شده است. با استفاده از نمودار شکل ۲۱-۲ تابع تبدیل حلقه - بسته را تعیین کنید.



شکل ۲۱-۲ نمودار گذر سیگنال مثال ۲-۴-۲

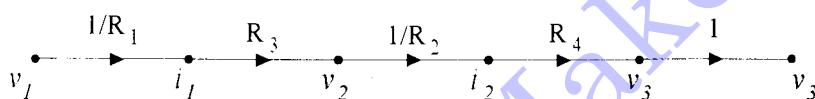
در اینجا مطلوب است که بهره ولتاژ $G = v_3/v_1$ را تعیین کنیم. در این نمودار تنها یک مسیر پیشووندان داده شده در شکل ۲۲-۲ وجود دارد.

از شکل ۲۲-۲ داریم که بهره مسیر پیش رو عبارتست از

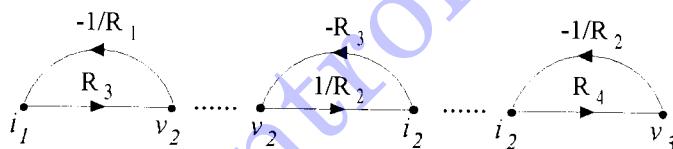
$$P_1 = \frac{1}{R_1} \cdot R_2 \cdot \frac{1}{R_2} \cdot R_4 \\ = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_2}$$

در این گراف سه حلقه به صورت نشان داده شده در شکل ۲۳-۲ وجود دارد
بهره های حلقه های گراف از شکل ۲۳-۲ عبارتند از:

$$L_1 = -\frac{R_2}{R_1} \quad L_2 = -\frac{R_2}{R_2} \quad L_3 = -\frac{R_4}{R_2}$$



شکل ۲۲-۲



شکل ۲۳-۲

همانطور که از شکل ۲۱-۲ مشاهده می شود، تنها دو حلقه غیر مجزا وجود دارد (دو حلقه که گره مشترکی ندارند) و لذا داریم

$$L_1 L_2 = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_2}$$

بنابراین، دترمینان نمودار Δ عبارتست از:

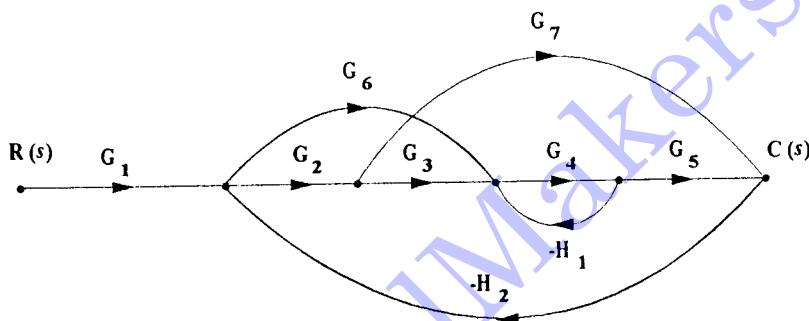
$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1 L_2 \\ = 1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_2} + \frac{R_4}{R_2} + \frac{R_2 R_4}{R_1 R_2} \\ = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_2 R_2 + R_2 R_4}{R_1 R_2}$$

از آنجاییکه کلیه حلقه‌ها مسیر پیشرو، P_1 را قطع نمی‌کنند، $\Delta_1 = \Delta$. سرانجام

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{R_1 R_4}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_4 + R_2 R_3 + R_3 R_4}$$

مثال ۴-۲

سیستم نشان داده شده در شکل ۴-۲ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل حلقه بسته $C(s)/R(s)$ را با استفاده از قانون بهره میسن بددست آورید.



شکل ۴-۲ نمودار گذر سیگنال برای سیستم مثال ۴-۲

در این سیستم، سه مسیر پیشرو بین ورودی $R(s)$ و خروجی $C(s)$ وجود دارد. بهره‌های مسیر پیشرو عبارتند از

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5$$

$$P_2 = G_1 G_6 G_4 G_5$$

$$P_3 = G_1 G_7 G_6$$

در نمودار گذر سیگنال نشان داده شده، چهار حلقه وجود دارد و بهره‌های آنها عبارتند از

$$L_1 = -G_4 H_1$$

$$L_2 = -G_7 G_6 H_1$$

$$L_3 = -G_6 G_4 G_5 H_2$$

$$L_4 = -G_7 G_3 G_4 G_5 H_2$$

توجه کنید که دو حلقه L_1 و L_2 همدیگر را قطع نمی‌کنند (و یا گره مشترکی ندارند). از این‌رو، دترمینان Δ بدین صورت داده می‌شود

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_1 L_2$$

کوفاکتور Δ_1 با حذف حلقه‌هایی که مسیر P_1 را قطع می‌کنند، بدست می‌آید. بنابراین، با حذف L_1 , L_2 , L_3 و L_4 ، بدست می‌آوریم

$$\Delta_1 = 1$$

به طور مشابهی، کوفاکتور Δ_2 عبارتست از

$$\Delta_2 = 1$$

کوفاکتور Δ_3 با حذف حلقه‌هایی که مسیر P_2 را قطع می‌کنند، بدست می‌آید. بنابراین، با حذف L_2 , L_3 و L_4 ، داریم

$$\Delta_3 = 1 - L_1$$

تابع تبدیل حلقه - بسته $C(s)/R(s)$ عبارتست از

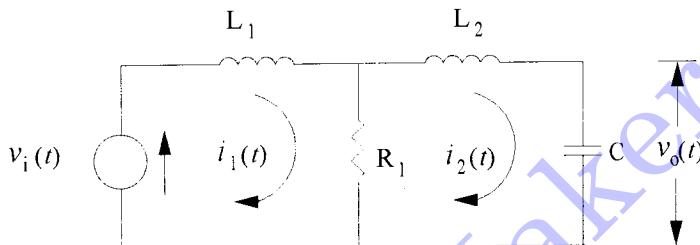
$$\frac{C(s)}{R(s)} = P = \frac{1}{\Delta} (P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3) \\ = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 + G_1 G_2 G_4 G_5 + G_1 G_2 G_3 G_5 (1 + G_4 H_1)}{1 + G_4 H_1 + G_2 G_3 H_1 + G_2 G_4 G_5 H_2 + G_2 G_3 G_4 G_5 H_2 + G_4 H_1 G_2 G_3 H_2}$$

۵-۲ توصیف فضای حالت سیستم‌های کنترل

در بخش‌های قبل به توصیف ورودی - خروجی سیستم به صورت تابع تبدیل در حوزه s پرداختیم. مدل‌سازی سیستم با تابع تبدیل، براساس معادلات دیفرانسیل توصیف کننده رابطه بین ورودی و خروجی اجزاء دینامیکی تشکیل‌دهنده سیستم است. هدف از این بخش معرفی متغیر دیگری به نام حالت سیستم است و با بکارگیری این متغیر، توصیف فضای حالت سیستم را ارایه خواهیم کرد.

برای مثالی از حالت یک سیستم، یک مسابقه فوتbal را در نظر بگیرید، که در آن ورودی سیستم تلاشی است که تیم‌ها در بازی بکار می‌برند، خروجی نیز تعداد گل‌های بدست آمده در پایان مسابقه است. یک انتخاب برای حالت سیستم می‌تواند نتیجه مسابقه در هر لحظه از زمان در طول مسابقه باشد. همانطور که مشخص است از رابطه ورودی - خروجی سیستم تنها یک دیدکلی از مسابقه پیدا می‌کنیم، در حالیکه با بکارگیری حالت سیستم می‌توان از جزئیات مسابقه در هر لحظه از زمان در طول مسابقه اطلاع پیدا کرد. برای مثال دیگر، مدار RLC شکل

۲۵-۲ را در نظر بگیرید. از روشهای بخشهاي قبل می توان یک رابطه ورودی - خروجی برای این مدار با ورودی $i_1(t)$ و خروجی $v_o(t)$ پیدا کرد و تابع تبدیل آنرا تعیین نمود. این تابع تبدیل تنها تغییرات $i_1(t)$ را برای ولتاژهای مختلف $v_o(t)$ نشان خواهد داد. لیکن با مشاهده این رابطه نمی توان به تغییرات جریانهای ورودی $i_1(t)$ و $i_2(t)$ در دو حلقه مدار پی برد. در واقع برای زیر نظر داشتن تغییرات جریانهای دو حلقه (که به عنوان متغیرهای حالت سیستم



شکل ۲ ۲۵-۲ مدار RLC

می توانند در نظر گرفته شوند) باید از توصیفی از سیستم استفاده نمود که متغیرهایی از داخل و ساختار داخلی سیستم را نیز شامل شود. این چنین امکانی با استفاده از مدلسازی فضای حالت بدست خواهد آمد. در حالت کلی "حالت" یک مجموعه از مقادیر است، که اگر همراه با ورودی سیستم معلوم باشد (مقادیر آنها در دسترس باشد)، آنگاه می توان از رفتار و تغییرات حالتی آینده و خروجی به طور دقیق اطلاع حاصل کرد.

حالت یک سیستم لزوماً منحصر بفرد نیست. برای نمونه، در مثال مسابقه فوتبال متغیرهای حالت می توانند روحیات تیم در طول مسابقه باشند و همانطور که در این مثال مشهود است، برخلاف خروجی و ورودی، حالت همیشه یک متغیر قابل اندازگیری نیست. برای یک سیستم می توان تعداد بسیار زیادی نمایش فضای حالت در نظر گرفت و این نمایشها به متغیرهای حالت انتخاب شده بستگی خواهند داشت.

در اینجا، حالت^۱، متغیرهای حالت^۲، بردار حالت^۳، و فضای حالت^۴ را تعریف می کنیم. حالت. حالت یک سیستم دینامیکی کوچکترین مجموعه از متغیرها (به نام متغیرهای

1- State

2- State variables

3- State vector

4- State space

حالت) است که اطلاع از این متغیرها در زمان $t \geq 0$ همراه با اطلاع از ورودی برای $t \geq 0$ رفتار سیستم را برای هر زمان $t \geq 0$ به طور کامل توصیف می‌کند.

بنابراین، حالت یک سیستم دینامیکی در زمان t توسط حالت در زمان 0 و ورودی برای $t \geq 0$ به طور منحصر بفردی تعیین می‌شود و مستقل از حالت و ورودی قبل از 0 است. در این کتاب y عموماً برابر صفر در نظر گرفته خواهد شد.

توجه کنید که مفهوم و اینده حالت به هیچ‌وجه منحصر به سیستم‌های فیزیکی نیست و قابل اعمال به سیستم‌های بیولوژیکی، اقتصادی، اجتماعی و سایر سیستم‌ها نیز است.

متغیرهای حالت. متغیرهای حالت یک سیستم دینامیکی، متغیرهایی هستند که کوچکترین مجموعه متغیرها را تشکیل داده و حالت سیستم دینامیکی را تعیین می‌کنند. اگر حداقل n متغیر x_1, x_2, \dots, x_n لازم است تا رفتار یک سیستم دینامیکی را بطور کامل توصیف کند، آنگاه n چنین متغیرهایی یک مجموعه از متغیرهای حالت هستند.

بردار حالت. اگر n متغیر حالت برای توصیف کامل رفتار یک سیستم داده شده کافی باشد، آنگاه این n متغیرهای حالت را می‌توان به صورت \mathbf{x} مولفه‌های یک بردار \mathbf{x} در نظر گرفت. این چنین برداری را یک بردار حالت می‌نامند. بنابراین، بردار حالت برداری است که حالت سیستم (t) را برای زمان t با دادن حالت در 0 و ورودی (t) برای t بطور منحصر بفردی تعیین می‌کند.

فضای حالت. فضای n -بعدی که محورهای مختصات آن شامل محور x_1, x_2, \dots, x_n است، فضای حالت نامیده می‌شود. هر حالت در فضای حالت به صورت یک نقطه نمایش داده می‌شود.

۱-۵-۲ بدست آوردن معادلات حالت از تابع تبدیل

سیستمی را با یک ورودی و یک خروجی در نظر بگیرید. فرض کنید که خروجی این سیستم نه تنها به ورودی آن بلکه به نرخ تغییر خروجی نیز بستگی داشته باشد. یعنی آنکه

$$y(t) = \frac{1}{a}y'(t) - \frac{b}{a}u(t) \quad (1-5-2)$$

که در آن a و b مقادیر اسکالر، $y(t)$ خروجی سیستم در زمان t و $u(t)$ ورودی سیستم در زمان t است. هم‌چنین $y'(t) = \frac{dy}{dt}(t)$. معادله (۱-۵-۲) را به صورت زیر نیز می‌توان

نوشت

$$\dot{y}(t) = ay(t) + bu(t) \quad (2-5-2)$$

حال اگر حالت $(t), x_1$ را به صورت خروجی $(t), y$ تعریف کنیم، آنگاه

$$\dot{x}_1(t) = ax_1(t) + bu(t) \quad (3-5-2)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

معادلات بالا یک صورت بسیار ساده از معادلات حالت و خروجی و یا توصیف فضای حالت سیستم می‌باشند. اگر نون این توصیف را به حالت‌های کلی تری تعمیم می‌دهیم. نمایشهای ماتریسی. یک حالت کلی تر از معادله (2-5-2)، عبارت است از

$$D^r y(t) + a_r D^r y(t) + a_{r-1} D y(t) + a_1 y(t) = b_r u(t) \quad (4-5-2)$$

اگر نون متغیرهای زیر را تعریف کنید

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_r(t) = D x_{r-1}(t) = D y(t)$$

$$x_r(t) = D x_{r-1}(t) = D^r y(t)$$

آنگاه معادله (4-5-2) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_r(t) \\ \dot{x}_{r-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_r & -a_{r-1} & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_r(t) \\ x_{r-1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_r \end{bmatrix} u(t) \quad (5-5-2)$$

$$y(t) = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_r(t) \\ x_{r-1}(t) \end{bmatrix}$$

یا، به عبارت کلی تر

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \quad (6-5-2)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t)$$

که در آن A ماتریس ضریب بردار حالت ($x(t)$) است که آنرا ماتریس حالت^۱ می‌نامند، B را ماتریس ورودی^۲، C را ماتریس خروجی^۳ و D را ماتریس انتقال مستقیم^۴ می‌نامند. انتقال مستقیم یک رابطه مستقیم بین خروجی و ورودی سیستم را نشان می‌دهد.
اکنون حالت کلی تر را در نظر می‌گیریم، که در آن مشتقات ورودی نیز در معادله دیفرانسیل سیستم حضور دارند. به عنوان مثال، معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید

$$D^r y(t) + a_r D^r y(t) + a_{r-1} D y(t) + a_1 y(t) = b_r D^r u(t) + b_{r-1} D u(t) + b_1 u(t) \quad (7-5-2)$$

یا

$$(D^r + a_r D^{r-1} + a_{r-1} D + a_1) y(t) = (b_r D^r + b_{r-1} D + b_1) u(t) \quad (8-5-2)$$

اکنون متغیر $(z(t))$ را چنان تعریف می‌کنیم که

$$\begin{aligned} u(t) &= (D^r + a_r D^{r-1} + a_{r-1} D + a_1) z(t) \\ y(t) &= (b_r D^r + b_{r-1} D + b_1) z(t) \end{aligned} \quad (9-5-2)$$

و سپس حالتها را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد

$$x_1(t) = z(t)$$

$$x_2(t) = Dz(t)$$

$$x_3(t) = D^2 z(t)$$

که نمایشی بدین صورت می‌دهند

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_r & -a_{r-1} & -a_1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (10-5-2)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_r & b_{r-1} & b_1 \end{bmatrix} x(t)$$

که در آن

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

۱- State matrix

۲- Input matrix

۳- Output matrix

۴- Direct transmission

از معادله (۱۱-۵-۲)، مشاهده می‌شود که صورت کلی تابع تبدیل عبارتست از

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0)y(t) = (b_m D^m + b_{m-1}D^{m-1} + \dots + b_1D + b_0)u(t) \quad (11-5-2)$$

که در آن $m < n$. در این صورت بردار n -بعدی حالت برابر است با

$$\mathbf{x}^T(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]$$

با فرض شرایط اولیه صفر و گرفتن تبدیل لاپلاس از معادله (۱۱-۵-۲)، داریم

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (12-5-2)$$

که معادلات حالت و خروجی را در حالت کلی بدین صورت می‌دهد

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (13-5-2)$$

$$y(t) = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{n-2} \ b_{n-1}] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

توجه کنید که معادلات بالا، تنها یک نمایش از تعداد بی‌شماری نمایش‌های ممکن فضای حالت تابع تبدیل (۱۲-۵-۲) است. با نمایش‌های دیگر فضای حالت، در بخش بعد آشنا خواهیم شد. همانطور که قبلاً نیز اشاره شد، نمایش‌های مختلف فضای حالت از سیستم، روش تعریف متغیرهای حالت بستگی دارد.

مثال ۲-۵-۲

تابع تبدیل سیستمی عبارتست از

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^3 + 3s + 5}{s^3 + s^2 + 2s + 1}$$

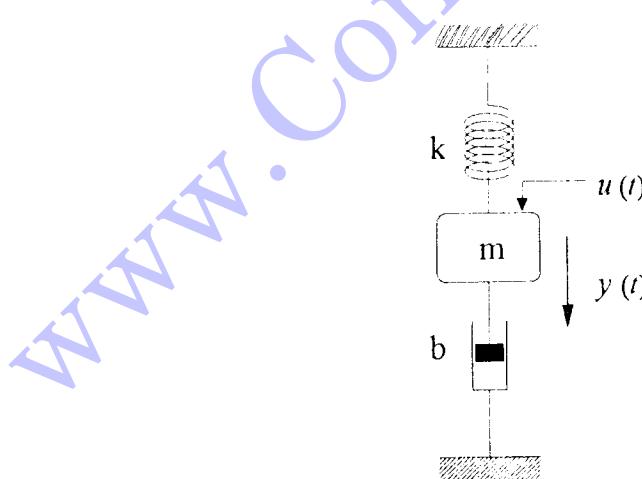
از معادله‌های (۱۲-۲-۱) و (۱۳-۲-۵)، نمایش فضایی حالت این سیستم عبارتست از

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [5 \quad 3 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

مثال ۲-۵-۲

سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل ۲-۲۶ را در نظر بگیرید. ذر این سیستم $u(t)$ واردی به سیستم (نیروی خارجی) و $y(t)$ (خروجی سیستم (جابجایی فنر) می‌باشد.



شکل ۲-۲۶-۲ سیستم مکانیکی.

از قانون دوم نیوتون، معادله دیفرانسیل سیستم به صورت زیر است

$$m D^2y + bDy + ky = u$$

با تعریف متغیرهای حالت به صورت زیر

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t)$$

بدست می‌آوریم

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m}(-ky - by) + \frac{1}{m}u$$

یا

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u$$

معادله خروجی نیز عبارتست از

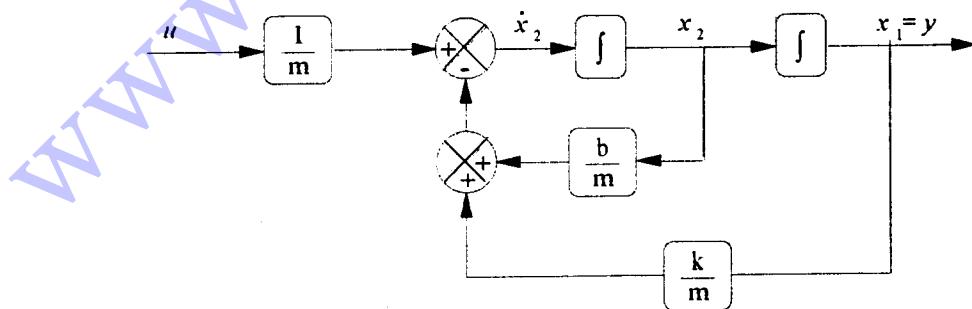
$$y = x_1$$

بنابراین معادله حالت و خروجی سیستم با تعریف بردار حالت $\mathbf{x}^T(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]$ به صورت زیر است

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

دیاگرام بلوکی سیستم در شکل ۲۷-۲ رسم شده است.



شکل ۲۷-۲ دیاگرام بلوکی سیستم نشان داده شده در شکل ۲۶-۲

در دو مثال قبل، معادلات حالت و خروجی بدست آمده (توصیف فضای حالت سیستم) به صورت کلی زیر هستند

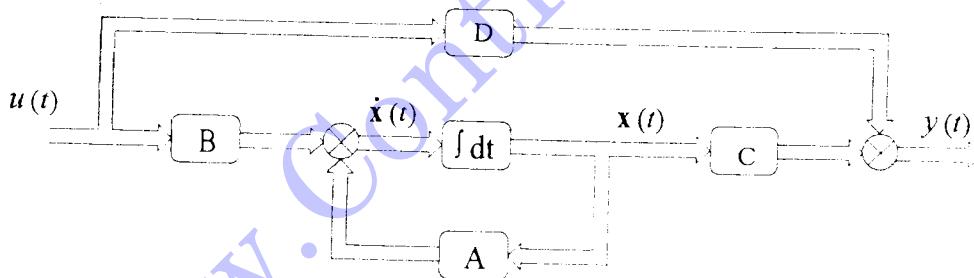
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (14-5-2)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (15-5-2)$$

در واقع معادله (۱۴-۵-۲)، معادله حالت و معادله (۱۵-۵-۲)، معادله خروجی سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان است.

از آنجاکه توصیف فضای حالت سیستم توسط متغیرهای حالت آن، از رفتار و ساختار داخلی سیستم نیز تصویری دقیق و روشن به مهندس طراح سیستم کنترل ارایه می‌دهد، آنرا توصیف داخلی سیستم نیز نامیده‌اند. و از آنجاییکه توصیف تابع تبدیل سیستم تنها یک نمایش ورودی - خروجی از سیستم است، آنرا توصیف خارجی^۳ سیستم نامیده‌اند. یک نمایش دیاگرام بلوکی از سیستم داده شده با معادلات (۱۴-۵-۲) و (۱۵-۵-۲) در شکل ۲۸-۲ نشان داده شده است. در این شکل خطهای دوبل نشان دهنده برداری بودن متغیرها

هستند.



شکل ۲۸-۲ دیاگرام بلوکی سیستم خطی زمان پیوسته تغییرناپذیر با زمان

۲-۵-۲ انتخاب متغیرهای حالت

اولین قدم در راه بکارگیری مفاهیم فضای حالت، جهت تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل، انتخاب متغیرهای حالت سیستم است. همانطور که قبلاً اشاره شد، متغیرهای حالت

نشان دهنده ساختار یک سیستم، منحصر بفرد نیست و به هیچ وجه نیز راه منحصر بفردی برای تعین آنها وجود ندارد. این مطلب را به خوبی در مثال مسابقه فوتbal مشاهده کردیم. دو دسته متغیرهای حالت انتخاب شده در آن مثال به ترتیب، نتیجه مسابقه در طول مسابقه و روحیات تیم در طول مسابقه بودند. هر کدام از این دو دسته متغیرهای حالت به نوبه خود می‌توانند اطلاعات مفیدی از ساختار داخلی مسابقه بدست دهند. در حالت کلی برای سیستم‌های فیزیکی، روش‌های مختلفی برای تعین متغیرهای حالت در دسترس می‌باشند که برای بررسی بیشتر آنها می‌توانید به مراجع و کتابشناسی فصل هفتم مراجعه نمایید. در اینجا، انتخاب متغیرهای حالت بر اساس متغیرهای فیزیکی^۱ ارایه خواهد شد.

انتخاب متغیرهای حالت در روش متغیرهای فیزیکی بر اساس عناصر نگهدارنده - انرژی^۲ سیستم بنا نهاده شده است. جدول ۱-۲ بعضی از عناصر متداول نگهدارنده - انرژی را که در سیستم‌های فیزیکی وجود دارند، همراه با معادلات انرژی متناظر نشان می‌دهد. متغیر فیزیکی در معادله انرژی برای هر عنصر نگهدارنده - انرژی می‌تواند به عنوان متغیر حالت سیستم انتخاب شود. البته باید دقت کرد، همانطور که در تعریف متغیرهای حالت یک سیستم در اول بخش آورده شده است، این مجموعه کوچکترین مجموعه متغیرهای لازم برای تعیین حالت می‌باشد. به عبارت دیگر اگر n ممتغیرهای حالت یک سیستم باشند، آنگاه n حداقل تعداد متغیرهای لازم برای توصیف کامل ساختار داخلی آن سیستم خواهد بود. به این چنین مدلی، مدل حالت می‌نیمال گویند. در اکثر کاربردهای عملی، مدل‌های حالت غیر می‌نیمال، ارزش چندانی ندارد. مدل حالت می‌نیمال، با انتخاب متغیرهای فیزیکی ناوایسته به عنوان

جدول ۱-۲ عناصر نگهدارنده - انرژی

متغیر فیزیکی	انرژی	عنصر
ولتاژ v	$Cv^2/2$	خازن C
جریان i	$Li^2/2$	سلف L
سرعت انتقالی v	$Mv^2/2$	جرم M
سرعت چرخشی ω	$J\omega^2/2$	ممان اینرسی J
جابجایی x	$kx^2/2$	فner k

متغیرهای حالت، بحسب آورده می‌شود. متغیرهای حالت ناوابسته^۱، متغیرهای حالتی هستند که نمی‌توان آنها را برابر حسب متغیرهای حالت تعیین شده دیگر بیان کرد. به عنوان نمونه اگر برای سه متغیر حالت x_1, x_2, x_3 نوشتن یک متغیر مانند α بحسب دو متغیر دیگر، مانند $x_1 = \alpha x_2 + \beta x_3$ و β اسکالرهاي غیر صفر)، امکان پذیر باشد اين سه متغیر را وابسته و در غير اينصورت ناوابسته می‌گويند.

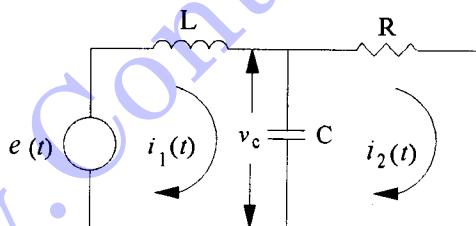
به مثالهای زیر برای تعیین مدل حالت می‌نیمال توجه کنید.

مثال ۳-۵-۲

سیستم نشان داده شده در شکل ۲۹-۲ را در نظر بگیرید. با انتخاب متغیرهای حالت فیزیکی مناسب، معادلات حالت و خروجی سیستم را بنویسید. ورودی سیستم ولتاژ $e(t)$ و خروجی آن ولتاژ خازن $v_c(t)$ است.

معادلات دیفرانسیل حاکم بر مدار عبارتند از

$$\begin{aligned} e(t) &= L \frac{di_1(t)}{dt} + v_c(t) \\ &= Ri_\tau(t) - v_c(t) \end{aligned}$$



شکل ۲۹-۲ مدار الکتریکی مثال ۳-۵-۲

با انتخاب متغیرهای حالت به صورت $x_1 = i_1(t)$ و $x_2 = v_c(t)$ ، از معادله اوّل داریم

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}e(t)$$

معادله ولتاژ خازن عبارتست از

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int (i_1(t) - i_\tau(t)) dt$$

و بنابراین

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C}(i_1(t) - i_2(t))$$

$$= \frac{1}{C} \left(i_1(t) - \frac{1}{R} v_c(t) \right)$$

با جایگزینی برای $v_c(t)$ و $i_1(t)$ ، بدست می‌آوریم

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{C}x_1(t) - \frac{1}{RC}x_2(t)$$

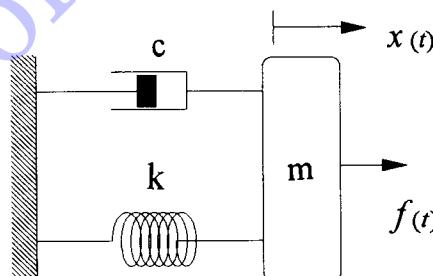
اکنون با توجه به معادله بردار ماتریسی برای x_1 و x_2 و با توجه به اینکه $x_1(t) = x_2(t) = y(t)$ داریم

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} e(t)$$

$$y(t) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

مثال ۴-۵-۲

سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل ۴-۵-۲ را در نظر بگیرید. در این سیستم نیروی ورودی $f(t)$ است و خروجی سیستم، جابجایی جرم $(t)x$ است. معادلات حالت و خروجی



شکل ۴-۵-۲ سیستم مکانیکی

سیستم را بنویسید. نخست معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم را بدست می‌آوریم. از قانون دوم نیوتون داریم که برایند کلیه نیروهای خارجی عمل کننده بر m ، برابر با $mD^2x(t)$ می‌باشد، با فرض آنکه جرم از حالت سکون در $x=0$ به طرف پایین به حرکت در آورده می‌شود،

نیروهای عمل کننده بر آن از طرف فنر و میرا کننده C ، در جهت بالا کشیدن آن، به ترتیب عبارتند از $kx(t)$ و $Dx(t)$. بنابراین داریم

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) - c \frac{dx(t)}{dt} + f(t)$$

با انتخاب متغیرهای حالت به صورت $x_1(t) = x(t)$ (جابجایی فنر و جرم) و $x_2(t) = \dot{x}(t)$ (سرعت جرم)، معادلات حالت و خروجی سیستم عبارت خواهند بود از

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

مثال ۵-۲

مدار الکتریکی نشان داده شده در شکل ۳۱-۲ را در نظر بگیرید. معادلات حالت و خروجی آن را برای ورودی جریان و خروجی $i_1(t)$ بنویسید.

در این مدار پنج عنصر نگهدارنده انرژی وجود دارد. این پنج عنصر عبارتند از سلفهای $L_۱, L_۲, L_۳, L_۴$ و خازن‌های $C_۱, C_۲$. لذا می‌توان پنج متغیر حالت فیزیکی برای آن در نظر گرفت.

معادلات دیفرانسیل حاکم بر مدار عبارتند از

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt}$$

$$v_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + v_1(t)$$

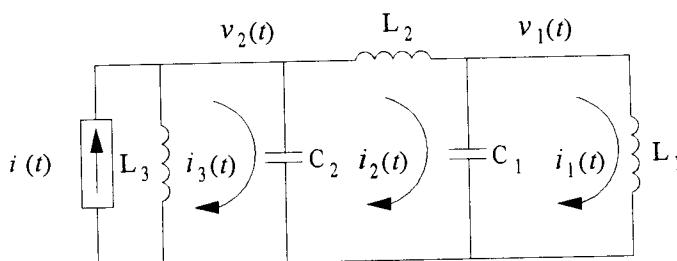
$$v_3(t) = L_3 \frac{di_3(t)}{dt}$$

$$i_4(t) = C_1 \frac{dv_1(t)}{dt} + i_1(t)$$

$$i_5(t) = i_3(t) + C_2 \frac{dv_2(t)}{dt} + i_2(t)$$

با نوشتن معادله حلقه در برگیرنده $L_۱, L_۲, L_۳$ و انتگرال گیری از آن داریم

$$L_۳ i_۳(t) = L_۲ i_۲(t) + L_۱ i_۱(t) + k$$



شکل ۳۱-۲ مدار الکتریکی

که در آن ثابت k تابعی از شرایط اولیه است. این معادله نشان می‌دهد که سه متغیر جریان در سلف‌ها (با فرض معلوم بودن شرایط اولیه)، مستقل نمی‌باشند و در واقع یکی از این جریانها را می‌توان به صورت ترکیب خطی از دیگران بنوشت. بنابراین این مدار تنها چهار متغیر حالت فیزیکی نوابسته دارد. این چهار متغیر را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$x_1(t) = v_1(t), \quad x_2(t) = v_2(t), \quad x_3(t) = i_1(t), \quad x_4(t) = i_2(t)$$

دقیق کنید که دو متغیر حالت $x_3(t)$ و $x_4(t)$ را می‌توانستیم به صورتهای دیگر (به عنوان نمونه با استفاده از $i_3(t)$ و $i_4(t)$) نیز بنویسیم. با حذف جریان وابسته انتخاب شده $i_3(t)$ و $i_4(t)$ و استفاده از معادلات مدار (با فرض صفر بودن شرایط اولیه جریانها)، داریم

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & -\frac{L_1}{L_2 C_2} & -\frac{L_2 + L_3}{L_2 C_2} \\ \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{C_2} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$$

۳-۵-۲ رابطه بین تابع تبدیل و معادلات فضای حالت

در اینجا نشان خواهیم داد که چگونه از معادله فضای حالت، تابع تبدیل یک سیستم را بدست می‌آوریم. یک سیستم با تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) \quad (16-5-2)$$

این سیستم می‌تواند با معادلات زیر در فضای حالت نمایش داده شود:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (17-5-2)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (18-5-2)$$

که در آن $x(t)$ بردار حالت، $u(t)$ ورودی، و $y(t)$ خروجی است. تبدیل لاپلاس معادله‌های

(۱۷-۵-۲) و (۱۸-۵-۲) عبارتست از

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \quad (19-5-2)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad (20-5-2)$$

با توجه به اینکه تابع تبدیل برای شرایط اولیه صفر تعریف شده است، لذا در معادله

(۱۹-۵-۲)، (۰) X را برابر صفر قرار می‌دهیم. آنگاه داریم

$$sX(s) - AX(s) = BU(s) \quad \text{یا}$$

$$(sI - A)X(s) = BU(s)$$

با پیش ضرب کردن طرفین معادله در $(sI - A)^{-1}$ ، بدست می‌آوریم

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) \quad (21-5-2)$$

جایگزینی معادله (۲۱-۵-۲) در معادله (۲۰-۵-۲)، می‌دهد

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \quad (22-5-2)$$

با مقایسه معادله‌های (۲۲-۵-۲) و (۱۶-۵-۲)، داریم

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (23-5-2)$$

این معادله، رابطه بین تابع تبدیل سیستم و ماتریس‌های A, B, C و D را نشان می‌دهد.

مثال ۶-۵-۲

سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل ۲۶-۲ را در نظر بگیرید. معادله‌های فضای

حالت این سیستم در مثال ۲-۵-۲ بدست آورده شده‌اند. از مثال ۲-۵-۲، داریم

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0.$$

با جایگزینی A، B، C و D در معادله (۲-۵-۲۳)، بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} + 0 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{b}{m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

از آنجاییکه

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{b}{m} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix}$$

داریم

$$\begin{aligned} G(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{ms^2 + bs + k} \end{aligned}$$

که تابع تبدیل سیستم است. توجه کنید که این تابع تبدیل را می‌توانستیم مستقیماً از معادله دیفرانسیل سیستم

$$mD^2y + bDy + ky = u$$

پس از گرفتن تبدیل لاپلاس با شرایط اولیه صفر بدست آوریم.

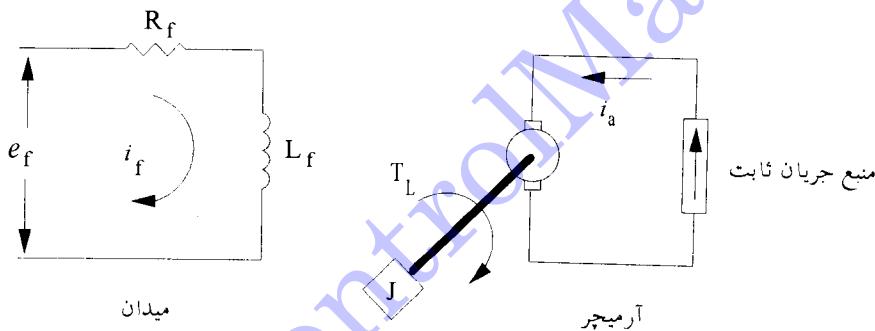
۶-۲ مدلسازی موتورهای DC

در این بخش با بکارگیری مفاهیم و ابزار توسعه یافته مدلسازی در بخش‌های قبل، به

مدلسازی موتورهای DC می‌پردازیم. موتورهای DC برای تبدیل کردن یک سیگنال ورودی الکتریکی به یک سیگنال خروجی مکانیکی بکار گرفته می‌شوند. این موتورها از لحاظ نحوه عملکرد به دو دسته کنترل میدان^۱ و کنترل آرمیچر^۲ تقسیم می‌شوند. در اینجا مدلسازی این دو دسته از موتورهای DC مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

کنترل میدان. در کنترل میدان، همانطور که در شکل ۳۲-۲ نشان داده شده است، جریان آرمیچر ثابت نگه داشته شده است و در میدان از یک ولتاژ قابل تنظیم به عنوان ورودی به سیستم استفاده می‌شود. ولتاژ اعمال شده به میدان ($e_f(t)$) است. گشتاور ایجاد شده توسط موتور مناسب با حاصلضرب جریان آرمیچر ($i_a(t)$) و فلوی^۳ میدان φ است. بنابراین

$$T(t) = K_f \phi i_a(t) \quad (1-6-2)$$



شکل ۳۲-۲ موتور DC با کنترل میدان

که در آن K_f برای هر موتوری ثابت است و به مجموع هادیهای آرمیچر، تعداد قطبها میدان و غیره بستگی دارد. ولتاژ اعمال شده به میدان ($e_f(t)$) برای کاربردهای معمولی از خروجی یک آمپلی فایر یا یک ژنراتور DC در کاربردهایی که قدرت بیشتر مورد نیاز است، تأمین می‌گردد. در مدار میدان، مقاومت سیستم پیچها R_f و هدایت با L_f نشان داده می‌شوند.

یک منحنی از ϕ بر حسب جریان میدان i_a در شکل ۳۳-۲ نشان داده شده است. در محدوده‌ای که جریان میدان i_a به اندازه‌ای نرسیده است که باعث اشباع در میدان شود، رابطه ϕ

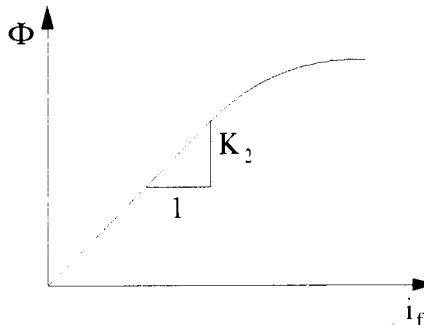
1- Field control

2- Armature control

3- Flux

4- Conductors

و آن خطی است. و بعد از اشیاع از رابطه خطی تبعیت نمی‌کند. موتورهای مورد استفاده در سیستم‌های کنترل عموماً بر روی محدوده خطی بالا عمل خواهند کرد. لذا



شکل ۳۴-۲ نمودار فلو بر حسب جریان میدان

$$\phi = K_2 i_f \quad (2-6-2)$$

که در آن، K_2 شیب قسمت خطی منحنی نشان داده شده در شکل ۳۴-۲ است. با جایگزینی از معادله (۱-۶-۲) در معادله (۲-۶-۲)، داریم

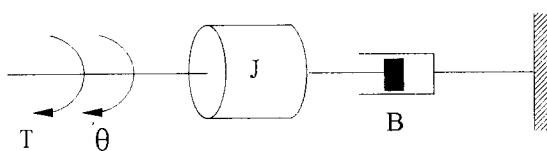
$$T = K_1 K_2 i_a i_f = K_m i_a i_f \quad (3-6-2)$$

که در آن $K_m = K_1 K_2$

اگر همانطور که در شکل ۳۴-۲ نشان داده است، بار از یک ممان اینرسی و میراکننده تشکیل شده باشد و گشتاور بار T_L باشد، معادله گشتاور آرمیچر به صورت زیر نوشته می‌شود

$$T = BD\theta + JD^2\dot{\theta} + T_L \quad (4-6-2)$$

که در آن θ موقعیت زاویه‌ای آرمیچر یا شفت موتور است. معادله ولتاژ مدار میدان عبارتست از



شکل ۳۴-۲ مدل بار

$$L_f D i_f + R_f i_f = e_f \quad (5-6-2)$$

و بنابراین

$$i_f = \frac{e_f}{R_f(\tau_f D + 1)} \quad (6-6-2)$$

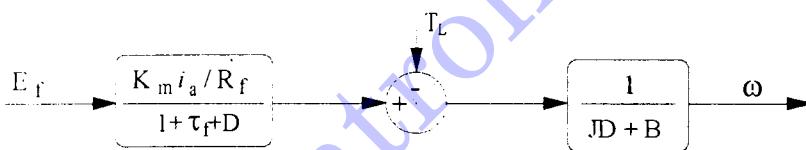
که در آن $\tau_f = L_f / R_f$ ثابت زمانی مدار میدان است. با جایگزینی T از معادله (۴-۶-۲) و i_f از معادله (۶-۶-۲) در معادله (۳-۶-۳) و به دست آوردن θ ، داریم

$$\theta = \frac{1}{JD + BD} \left[\frac{(K_m i_a / R_f) e_f}{1 + \tau_f D} - T_L \right] \quad (7-6-2)$$

سرعت زاویه‌ای ω را می‌توان با مشتق‌گیری از معادله (۷-۶-۲) بدست آورد

$$\omega = D\theta = \frac{1}{JD + B} \left[\frac{(K_m i_a / R_f) e_f}{1 + \tau_f D} - T_L \right] \quad (8-6-2)$$

نمایش دیاگرام بلوکی سیستم در شکل ۳۵-۲ نشان داده شده است.



شکل ۳۵-۲ دیاگرام بلوکی یک موتور DC با کنترل میدان

برای به دست آوردن معادلات فضای حالت با فرض $\theta = T_L$ ، از معادله‌های (۸-۶-۲) و (۲-۶-۲) داریم

$$JD^{\gamma} \dot{\theta} = K_m i_a i_f - BD\theta \quad (9-6-2)$$

و

$$e_f = R_f i_f + L_f Di_f \quad (10-6-2)$$

با تعریف متغیرهای حالت $x_1 = D\theta$ و $x_2 = i_f$ برای اعضاء نگهدارنده انرژی سیستم و $e_f = u(t)$ معادله‌های فضای حالت زیر را از معادله‌های (۹-۶-۲) و (۱۰-۶-۲) برای سیستم بدست می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{B}{J} & \frac{K_m i_a}{J} \\ 0 & -\frac{R_f}{L_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_f} \end{bmatrix} u(t)$$

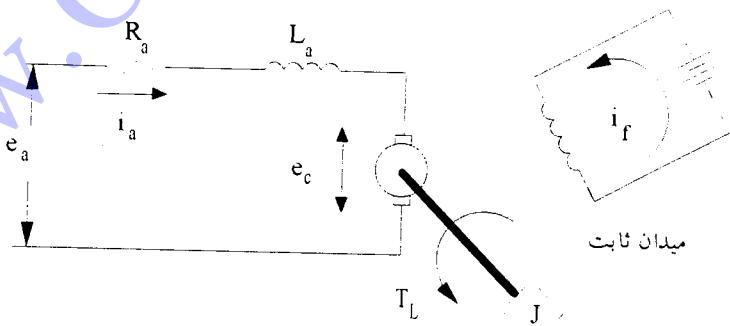
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (11-6-2)$$

کنترل آرمیچر. در موتورهای DC با کنترل آرمیچر، سرعت توسط تنظیم ولتاژ اعمال شده به آرمیچر کنترل می‌شود. این ولتاژ معمولاً توسط یک ژنراتور فراهم می‌شود. یک مotor DC با کنترل آرمیچر در شکل ۳۶-۲ نشان داده شده است. هنگامیکه موتور آرمیچر در حال چرخش است ولتاژ برابر e_c متناسب با حاصلضرب فلو و سرعت القاء می‌شود. از آنجاییکه پلاریته این ولتاژ مخالف ولتاژ اعمال شده است، به آن نیروی محرک الکتریکی بازگشتی یا emf برگشتی ^۱ می‌گویند. از آنجاییکه جریان میدان ثابت است، فلو ثابت بوده و بنابراین e_c متناسب با ω می‌باشد. بنابراین

$$e_c = K_c \phi \omega \quad (12-6-2)$$

که در آن K_c یک ثابت است و برای هر موتوری مقداری مشخص دارد. با جایگزینی برای ϕ از معادله (۲-۶-۲) در معادله (۱۲-۶-۲)، داریم

$$e_c = K_c K_{tf} i_f \omega = K_{cf} i_f \omega \quad (13-6-2)$$



شکل ۲-۳۶ موتور DC با کنترل آرمیچر

که در آن $K_c = K_r K_a$. معادله ولتاژ برای مدار آرمیچر عبارتست از

$$\begin{aligned} e_a - e_c &= R_a i_a + L_a Di_a \\ &= R_a (\tau_a D + 1) i_a \end{aligned} \quad (14-6-2)$$

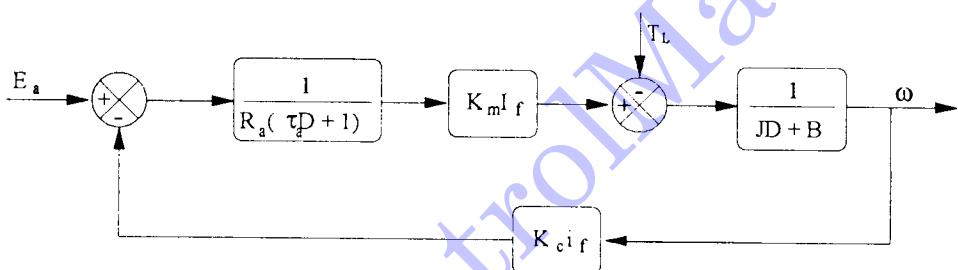
که در آن $\tau_a = L_a / R_a$ ، ثابت زمانی سیستم می‌باشد. گشتاور ایجاد شده توسط موتور عبارتست از

$$T = K_m i_f i_a \quad (15-6-2)$$

و معادله بالا نس گشتاور برای خروجی شفت عبارتست از

$$T = (BD + JD^2) \theta + T_L \quad (16-6-2)$$

از معادله‌های (۱۴-۶-۲)، (۱۵-۶-۲) و (۱۶-۶-۲)، دیاگرام بلوکی سیستم به صورت نشان داده شده در شکل ۳۷-۲ است.



شکل ۳۷-۲ دیاگرام بلوکی یک موتور DC با کنترل آرمیچر

برای بدست آوردن نمایش فضای حالت سیستم، با فرض $T_L = 0$ ، از معادله‌های (۲-۶-۲) و (۱۴-۶-۲)، همچنین از معادله‌های (۱۵-۶-۲) و (۱۶-۶-۲)، به ترتیب داریم

$$e_a = R_a i_a + L_a Di_a + K_c i_f D\theta \quad (17-6-2)$$

$$K_m i_f i_a = BD\theta + JD^2\theta \quad (18-6-2)$$

با تعریف متغیرهای حالت فیزیکی $x_1 = i_a$ و $x_2 = \theta$ (متغیرهای اعضای نگهدارنده انرژی در سیستم)، از معادله‌های (۱۷-۶-۲) و (۱۸-۶-۲)، بدست می‌آوریم

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{K_c i_f}{L_a} x_2(t) - \frac{R_a}{L_a} x_1(t) + \frac{e_a}{L_a} \quad (19-6-2)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{K_m i_f}{J} x_1(t) - \frac{B}{J} x_2(t) \quad (20-6-2)$$

با متغیرهای e_a و $D\theta$ به عنوان متغیرهای ورودی و خروجی سیستم، از معادله‌های (۲۰-۶-۲) و (۱۹-۶-۲) داریم

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_c i_f}{L_a} \\ \frac{K_m i_f}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (21-6-2)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

مسایل

۱-۱. معادلات دیفرانسیل و شرایط اولیه حاکم بر سیستم عبارتند از:

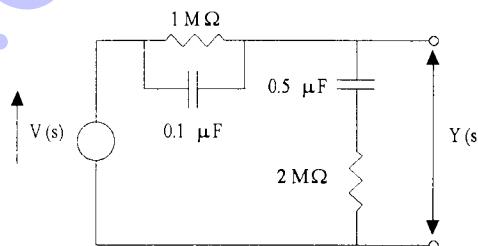
$$y(0) = 1, \quad Dy(0) = 4, \quad D^2y(t) + 6Dy(t) + 13y(t) = 5u(t) \quad (\text{الف})$$

$$y(0) = 1, \quad Dy(0) = 2, \quad D^2y(t) + 3Dy(t) + 4y(t) = vu(t) + 2t \quad (\text{ب})$$

$$y(0) = 4, \quad Dy(0) = 5, \quad D^2y(t) + 3Dy(t) + 4y(t) = 6 \sin \omega t \quad (\text{ج})$$

تابع تبدیل متناظر سیستم را تعیین کنید. پاسخهای سیستم را بر حسب تبدیل لاپلاس پیدا کنید.

۲-۲. تابع تبدیل مدار الکتریکی نشان داده شده در شکل ۳۸-۲ را بدست آورید.



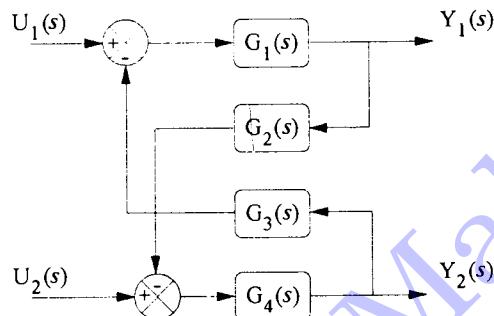
شکل ۳۸-۲ مدار الکتریکی مسئله ۲-۲

۳-۲. سیستم دو ورودی و دو خروجی نشان داده شده در شکل ۳۹-۲ را در نظر بگیرید. در

این سیستم ورودیها به ترتیب $U_1(s)$ ، $U_2(s)$ و خروجیها $Y_1(s)$ و $Y_2(s)$ می‌باشند.
الف - خروجی $Y_1(s)$ را بر حسب ورودیها بدست آورید.

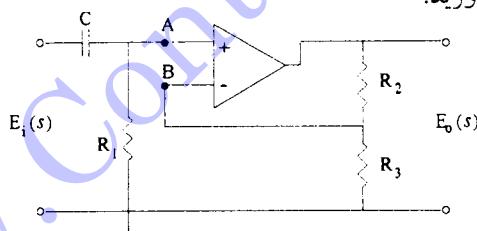
ب - خروجی $Y_2(s)$ را بر حسب ورودیها بدست آورید.

اثر برابر ساختن G_1G_4 و G_2G_3 ($G_2G_3 \neq G_1G_4$) چیست؟ با فرض $G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = 1$ مقدار $Y(s) = Y_1(s) + G_3Y_2(s)$ که در آن $Y_1(s) = G_1U_1(s)$ و $Y_2(s) = G_4U_2(s)$ را چنان پیدا کنید که

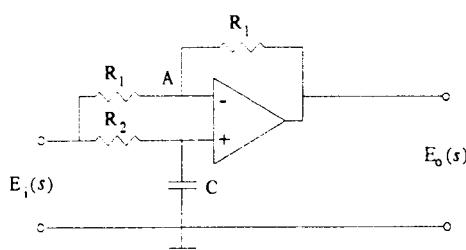


شکل ۳۹-۲ سیستم دو ورودی و دو خروجی مسئله ۳-۲

۴-۲ - تابع تبدیل $E_o(s)/E_i(s)$ مدارهای op-amp نشان داده شده ذر شکل‌های ۴۰-۲ و ۴۱-۲ را بدست آورید.

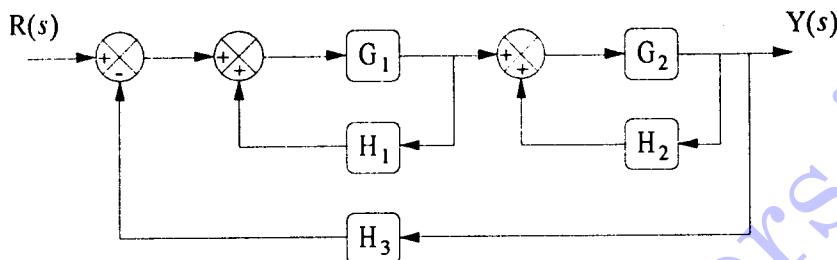


شکل ۴۰-۲ مدار تقویت کننده عملیاتی (op-amp)

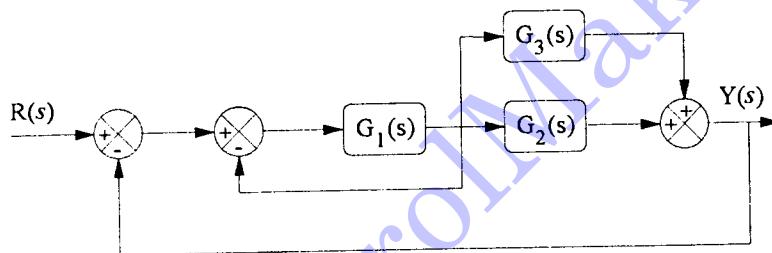


شکل ۴۱-۲ مدار تقویت کننده عملیاتی (op-amp)

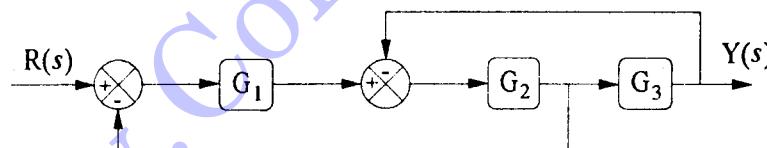
۵-۲ (الف) - با ساده کردن دیاگرام های بلوکی شکل های ۴۲-۲، ۴۳-۲، ۴۴-۲ و ۴۵-۲ تابع تبدیل کلی آنها را بدست آورید.



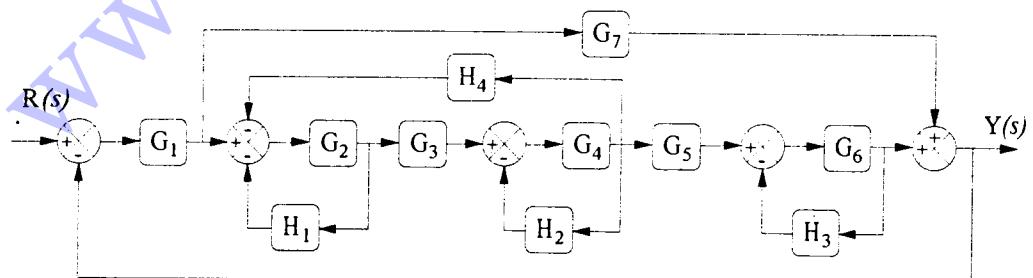
شکل ۲ دیاگرام بلوکی مسئله ۲



شکل ۲ دیاگرام بلوکی مسئله ۲



شکل ۲ دیاگرام بلوکی مسئله ۲



شکل ۲ دیاگرام بلوکی مسئله ۲

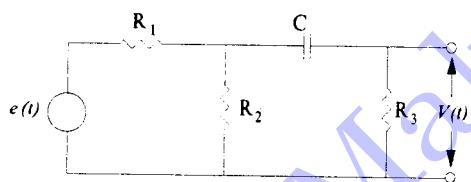
(ب) - با رسم نمودار گذر جریان متناظر دیاگرام‌های بلوکی قسمت الف - و استفاده از قانون میسن تابع تبدیل کلی دیاگرام‌های بلوکی را بدست آورید.

۶-۶. مدار نشان داده شده در شکل ۴۶-۲ را در نظر بگیرید. که در آن ورودی سیستم و خروجی آن به ترتیب عبارتند از $e(t)$ و $v(t)$

الف - دیاگرام بلوکی مدار را رسم کنید.

ب - نمودار گذر سیگنال مدار را رسم کنید.

ج - با ساده کردن دیاگرام بلوکی و استفاده از قانون میسن، تابع تبدیل مدار را پیدا کنید.

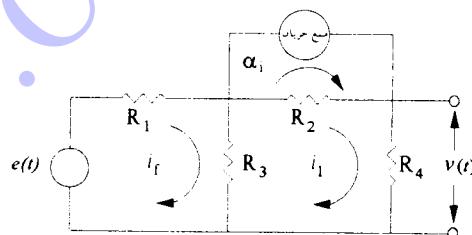


شکل ۴۶-۲ مدار مسئله ۶-۶

۷-۷. مدار نشان داده شده در شکل ۴۷-۲ را در نظر بگیرید. که در آن ورودی سیستم $e(t)$ و خروجی آن $v(t)$ می‌باشدند. α نیز ثابت است.

الف - نمودار گذر سیگنال مدار را رسم کنید.

ب - تابع تبدیل مدار را پیدا کنید.

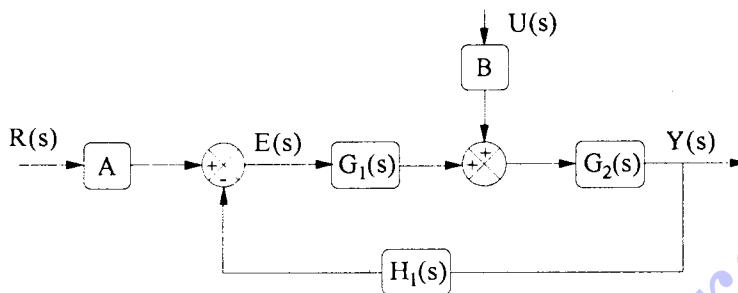


شکل ۴۷-۲ مدار مسئله ۷-۷

۸-۸. دیاگرام بلوکی نشان داده شده در شکل ۴۸-۲ را در نظر بگیرید.

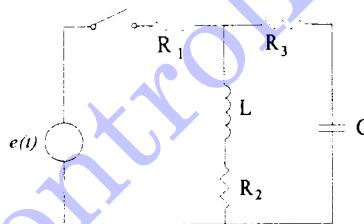
الف - نمودار گذر سیگنال معادل آنرا رسم کنید.

ب - توابع تبدیل $E(s)/U(s)$ و $Y(s)/R(s)$ را پیدا کنید.



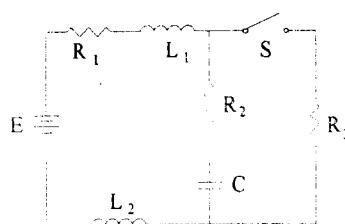
شکل ۴۸-۲ دیاگرام بلوکی مسئله ۴۸-۲

۴۹-۲. معادلات حالت مدار نشان داده شده در شکل ۴۹-۲ را بعد از آنکه کلید بسته شد، بنویسید.



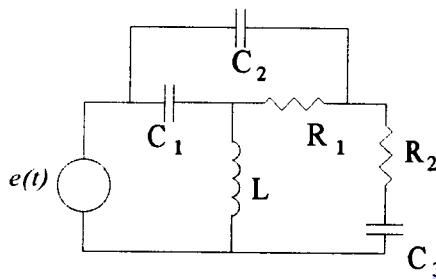
شکل ۴۹-۲ مدار مسئله ۴۹-۲

۵۰-۲. مدار نشان داده شده در شکل ۵۰-۲ با کلید بسته در حالت ماندگار عمل می‌کند. در زمان $t=0$ کلید باز می‌شود، معادلات حالت مدار را بنویسید



شکل ۵۰-۲ مدار مسئله ۵۰-۲

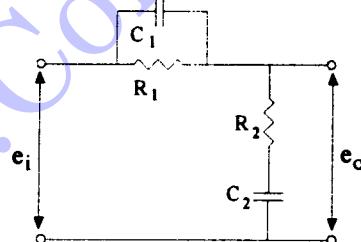
۱۱-۲ - مدار نشان داده شده در شکل ۵۱-۲ را در نظر بگیرید. اگر ورودی مدار (i_1) و خروجی آن ولتاژ دو سه حازن C_2 باشد، معادلات حالت و خروجی آنرا بنویسید.



شکل ۵۱-۲ مدار مسئله ۱۱-۲

۱۲-۲ - مدار نشان داده شده در شکل ۵۲-۲ را در نظر بگیرید.

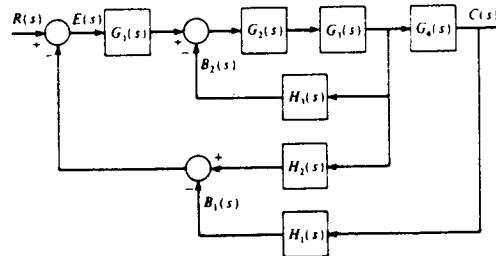
- الف - با انتخاب متغیرهای حالت مناسب، معادلات حالت و خروجی مدار را بنویسید.
- ب - با استفاده از معادلات حالت و خروجی بدست آمده از الف - و همچنین، مستقیماً معادلات دیفرانسیل مدار، تابع تبدیل آنرا بدست آورید.



شکل ۵۲-۲ مدار مسئله ۱۲-۲

۱۳-۲ - دیاگرام بلوکی سیستمی در شکل ۵۳-۲ نشان داده شده است.

- الف - نمودار گذرسیگنال آنرا رسم کنید.
- ب - با بکارگیری قانون میسن تابع تبدیل سیستم را بدست آورید.

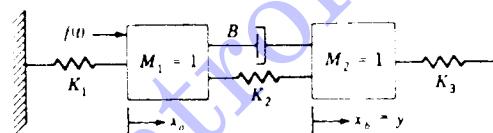


شکل ۵۳-۲ دیاگرام بلورکی مسئله ۲

۱۴-۲ - سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل ۵۴-۲ را در نظر بگیرید.

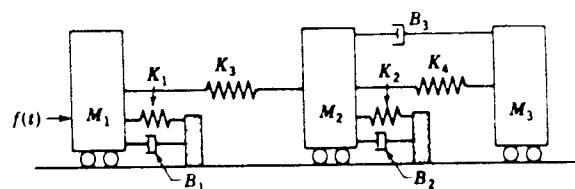
(الف) - تابع تبدیل بین ورودی $f(t)$ و خروجی $y(t)$ را بدست آورید.

(ب) - با انتخاب متغیرهای حالت مناسب، معادلات حالت و خروجی سیستم را بنویسید.



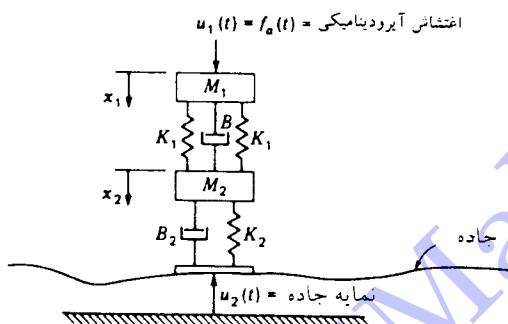
شکل ۵۴-۲ سیستم مکانیکی مسئله ۲

۱۵-۲ - معادلات حالت و خروجی سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل ۵۵-۲ را بدست آورید.



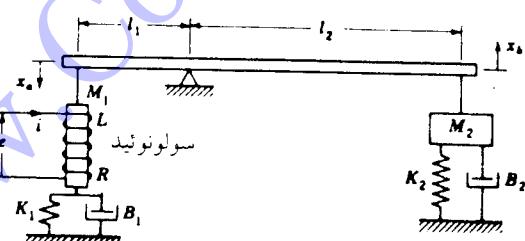
شکل ۵۵-۲ سیستم مکانیکی مسئله ۲

۱۶-۲. مدل سیستم فنر عمودی یک اتومبیل در شکل ۵۶-۲ نشان داده شده است. (الف) - معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم را بنویسید. (ب) - با انتخاب متغیرهای حالت مناسب، معادلات حالت و خروجی سیستم را بدست آورید. خروجیهای سیستم جابجایی جرم‌ها M_1, M_2 می‌باشند. (ج) - تابع تبدیل بین $\hat{u}_2, x_1, \hat{u}_1$ را که در آن $\hat{u}_1 = (B_1 D + K_1) u$ ، نیروی اعمال شده توسط جاده می‌باشد را پیدا کنید.



شکل ۵۶-۲ مدل سیستم فنر عمودی یک اتومبیل

۱۷-۲. یک محرک الکترومغناطیسی، یک سولونوئید^۱ را شامل می‌گردد که یک نیروی مغناطیسی مناسب با جریان کریال^۲، $f_i = K_i i$ ایجاد می‌کند. کویل یک مقاومت و یک هدايت^۳ دارد، به شکل ۵۷-۲ مراجعه کنید.



شکل ۵۷-۲ یک محرک الکترومغناطیسی

الف - معادلات دیفرانسیل سیستم را بنویسید.

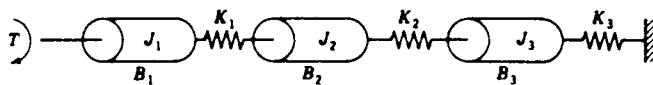
1- Solenoid

2- Coil

3- Inductance

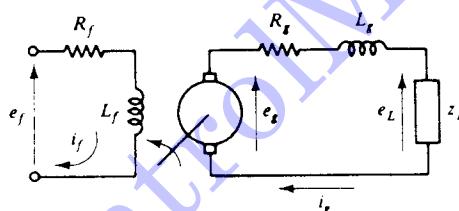
ب - با انتخاب متغیرهای حالت مناسب، معادلات حالت سیستم را بنویسید.

- ۱۸-۲ برای سیستم ممان اینرسی، میراکننده و فنرنشان داده شده در شکل ۵۸-۲، (الف) - معادلات دیفرانسیل سیستم را بنویسید. (ب) - معادلات حالت را بنویسید.



شکل ۵۸-۲ سیستم مسئله ۱۸-۲

- ۱۹-۲ شکل شماتیک یک ژنراتور DC در شکل ۵۹-۲ نشان داده شده است. با فرض اینکه ولتاژ ژنراتور ایجاد شده متناسب با جریان میدان است و همچنین با $z_L = z_L(s)$ امپدانس بار^۱، توابع تبدیل $E_f(s)/E_f(s)$ و $E_g(s)/E_L(s)$ را پیدا کنید.



شکل ۵۹-۲ یک ژنراتور DC

- ۲۰-۲ دینامیک بسیاری از سیستم‌های صنعتی توسط یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), u(t)]$$

که در آن $\mathbf{x}(t)$ بردار n بعدی حالت و $u(t)$ ورودی سیستم، $\mathbf{f}(\cdot)$ نیز یک تابع غیر خطی است. برای اعمال تحلیل و تئوری‌های موجود سیستم‌های خطی به سیستم‌های غیر خطی، لازم است که یک مدل خطی از اینگونه دستگاه معادلات غیر خطی در حول نقطه کار^۲ بدست آوریم. اگر نقطه کار را با (\mathbf{x}_0, u_0) نشان دهیم، با بسط سری تیلور

1- Load impedance

2- Operating point

معادله دیفرانسیل غیر خطی سیستم حول نقطه کار و صرفنظر کردن از عبارات درجه

دوم و بالاتر، داریم

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_{\circ}, u_{\circ}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, u) \left|_{(x_{\circ}, u_{\circ})} \right. (x_j - x_{\circ j}) + \frac{\partial f_i}{\partial u}(x, u) \left|_{(x_{\circ}, u_{\circ})} \right. (u - u_{\circ})$$

که در آن $i = 1, 2, \dots, n$. با تعریف

$$\Delta x_i = x_i - x_{\circ i}, \quad \Delta u = u - u_{\circ}$$

داریم

$$\dot{x}_i = \dot{x}_{\circ i} - \dot{x}_{\circ i}$$

از آنجایی که

$$\dot{x}_{\circ i} = f_i(x_{\circ}, u_{\circ})$$

داریم

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, u) \left|_{(x_{\circ}, u_{\circ})} \right. \Delta x_j + \frac{\partial f_i}{\partial u}(x, u) \left|_{(x_{\circ}, u_{\circ})} \right. \Delta u$$

معادله فوق را می‌توان به صورت بردار - ماتریسی زیرنوشت

$$\Delta \dot{x} = A \Delta x + B \Delta u$$

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u} \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های A و B در نقطه کار محاسبه شده‌اند و این معادلات، مدل خطی شده سیستم را حول نقطه نامی نشان می‌دهند.

اگر معادلات غیر خطی حاکم بر سیستمی به صورت زیر باشند

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) - \sin x_2(t) + u_1(t) = f_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_2(t) - u_1(t) + x_1(t)e^{-x_2(t)} = f_2(t)$$

معادلات خطی شده آن حول نقطه نامی (۰,۰) را بدست آورید.

مراجع فصل دوم

- [2-1] Marshall J.E., *Control of time delay systems*, IEE Control Engineering series 10, 1978.
- [2-2] Nash p., *System modelling and optimization*, Peter peregrinus Ltd, 1981.
- [2-3] Nicholson H (ed), *Modelling of dynamical systems*, Vol. 1, Peter peregrinus Ltd, 1980.
- [2-4] Wellstead P.E., *Introduction to physical system modelling*, Academic press, 1979.
- [2-5] Ziegler, B., *Theory of Modelling and simulation*, John wiley, 1976.
- [2-6] Mclean D., *Automatic flight control systems*, Englewood cliffs, N.J: Prentice Hall , 1990.

کتاب شناسی

مراجع [1] تا [7] به طور تفصیلی، توابع تبدیل سیستم‌های فیزیکی و قواعد کاهش توابع تبدیل را در فصول مختلف مورد بررسی قرار داده‌اند. مراجع [15] و [11]، توابع تبدیل سیستم‌های غیر مهندسی برق را (مانند بیومهندسی در مرجع [11]) مورد بررسی قرار داده‌اند. توابع تبدیل سیستم‌های کنترل فرایند، به طور مشخص در [15] بحث شده‌اند.

برای برخورد عملی تر با توابع تبدیل و دیاگرام‌های بلوکی، همراه با مدارهای الکتریکی متناظر سیستم‌های مورد بررسی، و همچنین مدارهای عملی و کاربردی به مرجع [18] مراجعه شود. برای مثالهای متنوع در زمینه رسم دیاگرام‌های بلوکی سیستم‌های عملی به مرجع [2] مراجعه شود.

نمودار گذر سیگنال و قانون میسن در مراجع [1] تا [4] و همچنین [6] و [11] به تفصیل آورده شده‌اند.

برای مدلسازی سیستم‌های متغیره (مدارهای الکتریکی، سیستم‌های مکانیکی، سیستم‌های هیدرولیکی و سیستم‌های حرارتی) توسط متغیرهای حالت و انتخاب متغیرهای فیزیکی حالت می‌توان از مرجع [1] استفاده نمود. مدلسازی سیستم‌های تاخیردار^۱ در مرجع [2-1] و مرجع [3] آورده شده است.

مدلسازی سیستم‌های فیزیکی، به طور تخصصی در مراجع [2-2] تا [5-2]، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در این مراجع روشهای مختلف مدلسازی سیستم‌های فیزیکی (در بدست آوردن توابع تبدیل یا متغیرهای حالت) همراه با شبیه‌سازی آنها، آورده شده‌اند. برای بدست آوردن مدارهای معادل الکتریکی و یا مکانیکی سیستم‌ها به هر کدام از مراجع [2-2] تا [5-2] و برای برخورد ساده‌تر به مراجع [1],[2],[3] و [4] مراجعه کنید.

برای بدست آوردن توابع تبدیل و رسم دیاگرام‌های بلوکی موتورهای AC، ژئراتورها و سایر سرو مکش‌انیزم‌ها می‌توان به مراجع [1],[2],[5],[8],[9],[10],[14] و [18] مراجعه کرد.

برای مدلسازی توابع تبدیل و نمایش فضای حالت دینامیک پرواز و رسم دیاگرام‌های بلوکی متناظر به مرجع [2-6] مراجعه شود.



۳

تحلیل عملکرد گذرا و ماندگار سیستم‌های کنترل

اهداف فصل:

- ۱- آشنایی با ورودیهای استاندارد سیستم‌های کنترل و نقش آنها.
- ۲- پاسخ سیستم‌های کنترل: الف - حالت - گذرا. ب - حالت - ماندگار.
- ۳- معرفی سیستم‌های مرتبه اول و مرتبه دوم.
- ۴- آشنایی با مشخصه‌های حالت گذرا و ماندگار پاسخ سیستم‌های مرتبه دوم.
- ۵- نقش قطب و صفر تابع تبدیل در پاسخ سیستم.
- ۶- آشنایی با مفهوم خطأ در سیستم‌های کنترل.
- ۷- اثرات فیدبک در سیستم‌های کنترل: مقایسه سیستم حلقة - باز و حلقة - بسته از نظر اغتشاش و حسناست.
- ۸- آشنایی با مفهوم پایداری.
- ۹- بررسی روش‌های تعیین پایداری سیستم‌های کنترل.

۱-۳ مقدمه

در فصل دوم، روش‌های مختلف مدلسازی سیستم‌های کنترل را بررسی کردیم. مفهندس کنترل با بکارگیری مدل بدست آمده و شبیه‌سازی آن، سیستم کنترل را طراحی می‌کند. بنابراین، طراح قبل از شروع به طراحی، بایستی با انجام یک سری تحلیلها و آزمایشات بر روی سیستم صنعتی مورد نظر، به بررسی رفتار آن پردازد. به عبارت دیگر، آیا عملکرد سیستم بدون کنترل، قابل قبول است؟ با طرح این سؤال منطقی، ازایه دقیق و کاملی از عملکرد سیستم لازم به نظرمی‌رسد.

در این فصل با بکارگیری سیگنال‌های استاندارد تست، اعمال آنها به سیستم‌های کنترل و بررسی پاسخ سیستم به آنها، بعضی از معیارهای اصلی عملکرد سیستم‌ها را ازایه خواهیم کرد. در تحلیل پاسخ حالت گذرا و ماندگار سیستم‌های کنترل عموماً از این سیگنال‌های استاندارد برای آزمودن سیستم استفاده می‌گردد. در واقع، اعمال این سیگنال‌ها ساده است و با بررسی نتایج بدست آمده از آنها، تحلیل رفتار سیستم نیز براحتی انجام می‌پذیرد و حال آنکه تحلیل سیستم با اعمال سیگنال‌های پیچیده به آن، چندان ساده نیست. هم‌چنین، بسیاری از سیگنال‌های پیچیده در سیستم‌های کنترل را می‌توان به صورت ترکیبی از سیگنال‌های استاندارد نوشت.

خروجی سیستم نشان داده شده در شکل ۱-۳، تحت سیگنال‌های استاندارد ورودی، از دو قسمت تشکیل می‌شود. قسمت اول، عکس‌العمل اولیه سیستم به ورودی اعمال شده است. به عبارت دیگر، قسمت اول پاسخ، اولین رفتار سیستم در زمانهای اولیه به ورودی



شکل ۱-۳ سیستم با ورودیهای استاندارد

اعمال شده است که آنرا پاسخ گذاری^۱ سیستم می‌نامند. قسمت دوم، عکس‌العمل ماندگار سیستم می‌باشد. عکس‌العمل ماندگار سیستم را پاسخ حالت ماندگار^۲ سیستم می‌نامند و

عمدتاً از آن قسمت پاسخ تشکیل شده است که پس از این رفتار پاسخ گذرا باقی می‌ماند. تحلیل این دو قسمت، در تحلیل عملکرد سیستم نقش بسزایی را ایفا می‌کند.

بسیاری از سیستم‌های کنترل در صنعت را می‌توان به صورت مدل‌های مرتبه دوم تقریب زد. لذا در این فصل مشخصه‌های مهم پاسخ حالت گذرا را با بکارگیری پاسخ پله یک سیستم مرتبه دوم ارایه خواهیم کرد.

پاسخ حالت ماندگار سیستم کنترل نیز بسیار مهم است، زیرا نشان می‌دهد که با گذشت زمان، پاسخ سیستم به چه سمتی می‌کند. در بسیاری از سیستم‌های کنترل، پاسخ حالت ماندگار با مقایسه با ورودی مرجع نشانی از دقت آن سیستم است. اگر پاسخ حالت ماندگار با ورودی فرمان داده شده به سیستم دقیقاً مطابقت نداشته باشد، سیستم دارای خطای حالت ماندگار است.

اغتشاش واردہ به سیستم می‌تواند در عملکرد حالت گذرا و ماندگار آن تاثیر زیادی داشته باشد. هم‌چنین حساسیت سیستم به تغییر پارامترها و یا نویز در سیستم، از مشخصه‌های مهم سیستم است. اثر فیدبک بر این دو پارامتر نیز در این فصل بررسی شده است.

در آخرین قسمت این فصل، مهم‌ترین مشخصه سیستم کنترل یعنی پایداری آن مورد بررسی قرار گرفته است. پس از ارایه رابطه بین قطب‌های سیستم و پاسخ حالت - گذاری آن، مشاهده می‌شود که پاسخ تنها در حالتی به سمت بی‌نهایت میل نخواهد کرد که ریشه‌های معادله مشخصه سیستم و یا قطب‌های آن غیر مثبت بوده و یا قسمتها حقیقی غیر مثبت داشته باشند.

۲-۳ ورودی‌های استاندارد برای تحلیل عملکرد سیستم‌های کنترل

ورودی یک سیستم صنعتی در حین کار نوعاً تصادفی^۱ است. به عنوان مثال در یک سیستم دنیال کننده رادار ممکن است که موقعیت و سرعت هدف به طور کاملاً تصادفی تغییر کند و یا در سیستمهایی که ورودی آنها به مقدار زیادی تحت تاثیر اغتشاشات تصادفی قرار می‌گیرد. لیکن برای سیستم‌های ساده و برای بدست آوردن یکسری اطلاعات مهم و اساسی

در رابطه با سیستم، سیگنال‌های استانداردی را به سیستم اعمال و پاسخ سیستم به آنها و مطالعه می‌کنیم. با این کار می‌توان رفتار سیستم را تا حد زیادی به ورودی‌های ناشناس دیگر نیز حدس زد.

استاندارد سازی سیگنال‌های ورودی نیز هنگامی که می‌خواهیم چند سیستم را با توجه به خروجی آنها مقایسه کنیم، بسیار مهم است. در اینجا چند سیگنال اساسی را که در تحلیل سیستم‌های کنترل نقش عمده‌ای دارند و بسیاری از سیگنال‌های دیگر را می‌توان با ترکیب آنها به وجود آورد، بررسی می‌کنیم.

ورودی تابع پله^۱. ورودی پله ساده‌ترین نوع ورودی می‌باشد. این ورودی را می‌توان برای نمونه با سوییچ کردن یک ولتاژ در یک مدار الکتریکی یا یک چرخش ناگهانی در شفت مکانیکی در نظر گرفت. اگر اندازه دامنه ورودی واحد باشد آنرا پله واحد^۲ می‌نامند. ورودی پله در حالت کلی به صورت نشان داده شده در شکل ۲-۳ الف می‌باشد. نمایش ریاضی ورودی

پله با دامنه R عبارتست از

$$u(t) = \begin{cases} R & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1-2-3)$$

که در آن R یک ثابت حقیقی است، یا

$$u(t) = R u_{-1}(t) \quad (2-2-3)$$

که در آن (1) ، u ورودی پله واحد است. تبدیل لاپلاس ورودی پله داده شده با معادله $(1-2-3)$ عبارتست از

$$U(s) = R/s \quad (3-2-3)$$

ورودی تابع ضربه^۳. ورودی ضربه، سیگنالی است که برای یک دوره زمانی تقریباً صفر با دامنه زیاد اعمال شود. اگر سیگنالی برای یک دوره زمانی کوتاه δt به طول انحصاری، آنگاه برای $0 \rightarrow \delta t$ سیگنال یک ضربه خواهد شد. در واقع ورودی ضربه را می‌توان به عنوان مشتق ساده ورودی پله در نظر گرفت. بنابراین تبدیل لاپلاس این ورودی عبارت است از

$$U(s) = 1 \quad (4-2-3)$$

1- Step-function

2- Unit step

3- Impulse function

اعمال سیگنالی که برای گستره زمانی t_1 و t_2 به طول انجامد و دامنه بسیاری باشد در عمل غیر ممکن است و لذا در کاربردهای عملی این سیگنال را با سیگنالی که دامنه واحد داشته و برای یک مدت زمانی بسیار کوتاه وجود داشته باشد، تقریب می‌زنند. شکل سیگنال تقریبی در شکل ۲-۳ (ب) آورده شده است.

وروودیتابع شبیه^۱. اگر از ورودی پله انتگرال گرفته شود، سیگنالی بدست خواهد آمد که دامنه آن یک تغییر ثابت نسبت به زمان خواهد داشت و یا به عبارت دیگر به طور خطی از صفر نسبت به زمان اضافه خواهد شد. ورودی شبیه را ورودی سرعت^۲ نیز می‌نامند. ورودی شبیه در حالت کلی به صورت نشان داده شده در شکل ۲-۳ (ج) می‌باشد. نمایش ریاضی ورودی شبیه عبارتست از

$$u(t) = \begin{cases} R t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (5-2-3)$$

که در آن R یک ثابت حقیقی است. اگر $R=1$ باشد، ورودی را ورودی شبیه واحد^۳ می‌نامند.

همچنین داریم

$$u(t) = R t u_{-1}(t) \quad (6-2-3)$$

تبديل لاپلاس ورودی شبیه بدین صورت داده می‌شود

$$U(s) = R/s^2 \quad (7-2-3)$$

وروودیتابع سهموی^۴. ورودی سهموی با انتگرال تابع شبیه بدست می‌آید. ورودی سهموی را ورودی شتاب^۵ نیز می‌گویند. نمایش ریاضی ورودی سهموی عبارتست از

$$u(t) = \begin{cases} R t^{1/2} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (8-2-3)$$

که در آن R یک ثابت حقیقی است و یا

$$u(t) = R t^{1/2} u_{-1}(t) \quad (9-2-3)$$

- ۱- Ramp function
- ۲- Velocity input
- ۳- Unit-ramp input
- ۴- Parabolic function
- ۵- Acceleration input

نیمیان لایپلاس این ورودی بدین صورت داده می‌شود

$$U(s) = R/s^3 \quad (10-2-3)$$

رسکل آن نیز در شکل ۲-۳ (د) نشان داده شده است.

ورودی تابع چند جمله‌ای^۱ بدهیه است که با ترکیب ورودی‌های پله، شیب و سهموی

نمی‌توان یک سیگنال ورودی برای ≥ 0 به صورت زیر نوشت

$$u(t) = R_1 + R_2 t + R_3 t^2 / 2 \quad (11-2-3)$$

واقع به سادگی مشاهده می‌شود که می‌توان عبارات انتگرال گرفته شده بیشتری را وارد

معادله داده شده در (۱۱-۲-۳) کرد و ورودی کلی زیر را برای ≥ 0 تشکیل داد

$$u(t) = R_1 + R_2 t + R_3 t^2 / 2 + R_4 t^3 / 3! + \dots + R_p t^p / p! \quad (12-2-3)$$

سازمان بالا را تابع چند جمله‌ای نامیده و برای < 0 نیز صفر می‌باشد.

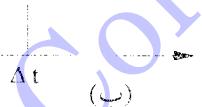
ورودی تابع سینوسی^۲ ورودی سینوسی به صورت داده شده در زیر است.

$$u(t) = \begin{cases} U \cos \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (13-2-3)$$

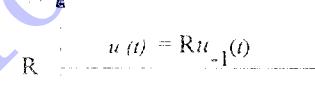
(أ)



(ب)



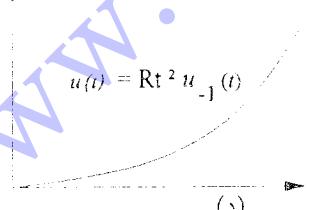
(ج)



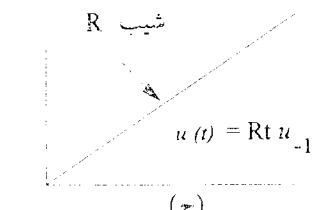
(الف)



(د)



(هـ)



(ج)

شکل ۲-۳ سیگنال‌های استاندارد ورودی (الف) تابع پنهان، (ب) تابع غربیه، (ج) تابع شیب، (د) تابع سهموی.

این ورودی، در تحلیل پاسخ حالت ماندگار سیستم‌های خطی، نقش بسزایی را ایفا می‌نماید. تذکر این نکته مهم است که خروجی حالت ماندگار سیستم‌های خطی به ورودی سینوسی، یک تابع سینوسی است.

۳-۳ پاسخ حالت ماندگار

همانطور که قبلاً نیز اشاره شد، پاسخ سیستم از دو قسمت حالت گذرا و ماندگار تشکیل شده است. اگر پاسخ سیستم به ورودی $c(t)$ را با c نشان دهیم، داریم

$$c(t) = c_{tr}(t) + c_{ss}(t) \quad (1-3-3)$$

که در آن $c_{tr}(t)$ قسمت حالت گذراپاسخ و $c_{ss}(t)$ قسمت حالت ماندگار پاسخ هستند. می‌توان قسمت حالت ماندگار پاسخ را به عنوان پاسخی دانست که با گذشت زمان و پس از ازین رفتن پاسخ حالت گذرا به جای می‌ماند و پاسخ سیستم را تشکیل می‌دهد. بنابراین

$$c_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) \quad (2-3-3)$$

۱-۳-۳ پاسخ حالت ماندگار به ورودیهای پله، شبیه و سهموی

سیستم داده شده با تابع تبدیل مرتبه اول زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{k}{s + a_0} \quad (a_0 > 0) \quad (3-3-3)$$

که در آن k بهره سیستم است. خروجی سیستم برای ورودی $R(s)$ به صورت زیر داده می‌شود

$$C(s) = G(s) R(s) \quad (4-3-3)$$

برای ورودی پله واحد داریم $R(s) = 1/s$ و لذا معادله‌های (۳-۳-۳) و (۴-۳-۳) نتیجه

می‌دهند

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{k}{s + a_0} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \frac{k/a_0}{s} - \frac{k/a_0}{s + a_0} \end{aligned} \quad (5-3-3)$$

عكس تبدیل لاپلاس معادله (۵-۳-۳) می‌دهد

$$c(t) = \frac{k}{a_0} - \frac{k}{a_0} \exp(-a_0 t) \quad (6-3-3)$$

پاسخ زمانی داده شده با معادله (۶-۳-۳) در شکل ۳-۳ نشان داده شده است.

برای بدست آوردن پاسخ حالت ماندگار می‌توان مستقیماً از معادله (۶-۳-۳) استفاده کرد و یا قضیه مقدار نهایی تبدیل لاپلاس را بکار گرفت. از معادله (۶-۳-۳) داریم

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \frac{k}{a_0} \quad (7-3-3)$$

هم‌چنین از قضیه مقدار نهایی داریم

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} sC(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) \quad (8-3-3)$$

معادله (۸-۳-۳)، برای سیستم مرتبه اول در نظر گرفته شده خواهد داد

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s \frac{k}{s + a_0} \cdot \frac{1}{s} = \frac{k}{a_0} \quad (9-3-3)$$

که با پاسخ داده شده با معادله (۷-۳-۳)، و نشان داده شده در شکل ۳-۳ مطابقت دارد.

برای ورودی شیب واحد به سیستم داده شده با معادله (۳-۳-۳)، از معادله (۴-۳-۳)

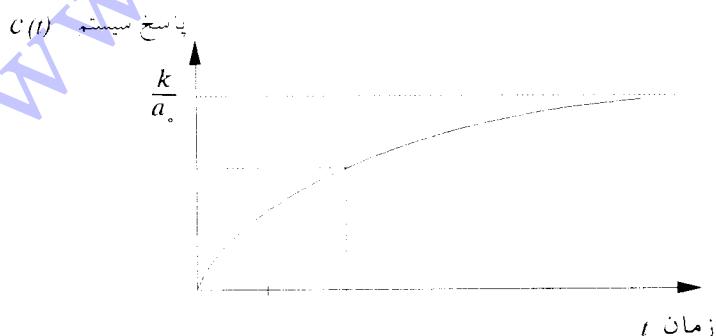
داریم

$$C(s) = \frac{k}{s + a_0} \cdot \frac{1}{s} \quad (10-3-3)$$

پاسخ حالت ماندگار برای این ورودی نیز همانند ورودی پله واحد از قضیه مقدار نهایی بدست می‌آید. بنابراین

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s \frac{k}{s + a_0} \cdot \frac{1}{s} = \infty \quad (11-3-3)$$

از معادله (۱۱-۳-۳) داریم که پاسخ سیستم‌های مرتبه اول برای ورودی شیب به سمت بی‌نهایت میل خواهد کرد. برای تمرین نشان دهید که پاسخ سیستم مرتبه اول به ورودی شیب واحد عبارتست از



شکل ۳-۳ پاسخ سیستم مرتبه اول به ورودی پله واحد

$$c(t) = \frac{k}{a_0} \left[t - \frac{1}{a_0} + \frac{\exp(-a_0 t)}{a_0} \right] \quad (12-3-3)$$

و با پاسخ بدست آمده از قضیه مقدار نهایی مطابقت دارد.

به طور مشابهی می‌توان نشان داد که پاسخ سیستم مرتبه اول برای ورودی سهموی و ورودی‌های مرتبه بالاتر به سمت بی‌نهایت میل خواهد کرد. در واقع برای ورودی سهموی با اعمال قضیه مقدار نهایی داریم

$$\lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k}{s+a_0} \frac{1}{s^2} = \infty \quad (13-3-3)$$

پاسخ بدست آمده سیستم مرتبه اول داده شده با معادله (3-3-3)، برای ورودی پله واحد را در نظر بگیرید. مقادیر k و a_0 مقدار حالت ماندگار پاسخ را تعیین می‌کنند. اما با اندکی تأمل مشاهده می‌شود که a_0 نه تنها در تعیین حالت ماندگار پاسخ سیستم برای ورودی پله واحد نقش دارد، بلکه سرعت رسیدن به حالت ماندگار را نیز تعیین می‌کند. در واقع برای $\frac{1}{a_0}$ داریم $(1-e^{-\frac{1}{a_0}})^c = \frac{k}{a_0}$ و لذا هر چه a_0 بزرگ‌تر شود، پاسخ سیستم سریعتر به حالت ماندگار خواهد رسید. بنابراین a_0 نقش مهمی را در رفتار سیستم ایفاء می‌کند. به $\frac{1}{a_0}$ ثابت زمانی سیستم مرتبه اول می‌گویند. هر چه ثابت زمانی سیستم کوچک‌تر باشد پاسخ آن سریعتر خواهد بود.

تابع تبدیل یک سیستم مرتبه دوم در حالت کلی بدین صورت است

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (14-3-3)$$

توجه کنید که مرتبه دوم بودن تابع تبدیل معادله (14-3-3) به واسطه عبارت مرتبه دوم در مخرج آن است. برای بدست آوردن پاسخ حالت ماندگار سیستم به ورودی پله واحد، از قضیه مقدار نهایی داریم

$$\lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k}{s^2 + a_1 s + a_0} \frac{1}{s} = \frac{k}{a_0} \quad (15-3-3)$$

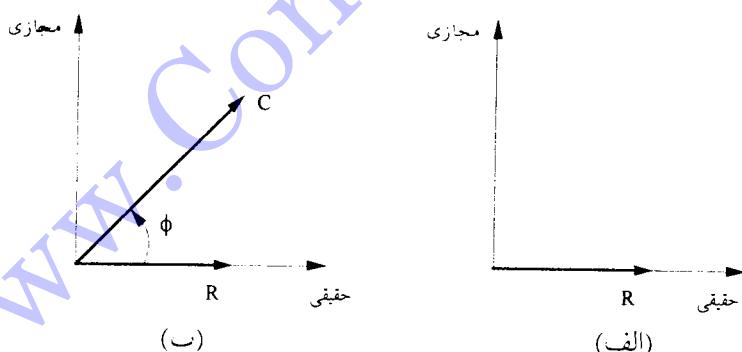
که مشابه نتیجه بدست آمده برای سیستم مرتبه اول است. پاسخ سیستم مرتبه دوم به ورودی

پله پیچیده‌تر از پاسخ سیستم مرتبه اول به ورودی پله است. این پاسخ به محل ریشه‌های مخرج تابع تبدیل بستگی دارد و در بخش ۴-۳ مفصلأً بررسی خواهد شد.

۲-۳-۳ ورودیهای سینوسی و چند جمله‌ای

در بخش قبل، برای تعیین پاسخ حالت ماندگار سیستم به ورودیهای پله، شبیه و سهموی از تبدیل لالپاس و قضیه مقدار نهایی استفاده شد. همانطور که مشاهده شد، برای بکارگیری این قضیه باید یک مقدار حدی وجود داشته باشد که سیگنال به آن به ازاء $\rightarrow \infty$ همگرا شود، در تحلیل پاسخ حالت ماندگار سیستم به ورودی سینوسی اینچنین حالتی وجود ندارد و لذا نمی‌توان از قضیه مقدار نهایی استفاده کرد.

برای ورودی سینوسی داده شده با معادله (۱۳-۲-۳)، نمایش دیاگرام فازور^۱ آن در شکل ۸-۳ (الف) نشان داده شده است. با فرض پایداری سیستم خطی (پایداری را در بخش ۸-۳ بحث خواهیم کرد)، پاسخ حالت ماندگار سیستم خطی به ورودی سینوسی یک تابع سینوسی خواهد بود. بنابراین اگر خروجی حالت ماندگار را در پاسخ به ورودی سینوسی با (۱) نشان دهیم، (۲) یک تابع سینوسی با دامنه C و انتقال فاز^۲ φ خواهد بود. نمایش دیاگرام فازور خروجی حالت ماندگار بیز در شکل ۴-۳ (ب)، نشان داده شده است.



شکل ۴-۳ (الف) نمایش دیاگرام فازور $r(t) = R \cos(\omega t)$: (ب) نمایش دیاگرام فازور $c(t) = C \cos(\omega t + \phi)$ که در آن $c(t)$ پاسخ حالت ماندگار است.

یک ورودی چند جمله‌ای کلی با معادله (۱۲-۲-۳) داده شده است. فرض کنید که معادله دیفرانسیل سیستمی که این ورودی به آن اعمال خواهد شد به صورت داده شده در زیر باشد

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0) c(t) = (b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \dots + b_1 D + b_0) r(t) \quad (16-3-3)$$

که در آن ضرایب ثابت a_i و b_i مشخصه‌های سیستم را تعیین می‌کنند (فصل دوم). با اعمال یک ورودی داده شده با معادله (۱۲-۲-۳) به سیستم داده شده با معادله (۱۶-۳-۳)، باید پاسخ حالت ماندگار به اندازه کافی عبارات توان t را در بر داشته تا تساوی در معادله دیفرانسیل سیستم برقرار گردد.

مثال ۱-۳-۳

برای $n=2$ و $m=1$ ، معادله دیفرانسیل سیستم عبارتست از

$$(a_2 D^2 + a_1 D + a_0) c(t) = (b_1 D + b_0) r(t)$$

ورودی به سیستم نیز به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$r(t) = R_1 + R_2 t + R_3 \frac{t^2}{2}$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} (a_2 D^2 + a_1 D + a_0) c(t) &= (b_1 D + b_0) [R_1 + R_2 t + R_3 \frac{t^2}{2}] \\ &= b_1 R_1 + b_0 R_1 + (b_1 R_2 + b_0 R_2) t + b_0 R_3 \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

اگر پاسخ حالت ماندگار را در حالت کلی به صورت زیر بیان کنیم

$$c(t) = c_0 + c_1 t + c_2 \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{c_k t^k}{k!}$$

با قرار دادن $c(t)$ در معادله بالا برای آنکه در دو طرف معادله تساوی داشته باشیم، باید قرار دهیم $k=2$ و یا

$$c(t) = c_0 + c_1 t + c_2 \frac{t^2}{2!}$$

بنابراین

$$(a_2 D^2 + a_1 D + a_0) c(t) = a_2 c_2 + a_1 c_1 + a_0 c_0 + (a_1 c_2 + a_0 c_1) t + \frac{a_0 c_2}{2} t^2$$

ضرایب خروجی حالت ماندگار c_0, c_1 و c_2 را از حل دستگاه معادله‌های زیر بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} a_0 c_2 &= b_0 R_2 \\ a_1 c_2 + a_0 c_1 &= b_1 R_2 + b_0 R_1 \\ a_2 c_2 + a_1 c_1 + a_0 c_0 &= b_2 R_2 + b_1 R_1 \end{aligned}$$

توجه کنید که مقدار k به درجه سیگنال ورودی بستگی خواهد داشت.

۴-۳ پاسخ حالت - گذرا

در بخش ۳-۳، پاسخ حالت ماندگار سیستم، به عنوان آن قسمت از پاسخ کلی سیستم که به ازاء $\omega \rightarrow \infty$ باقی خواهد ماند، تعریف شد. به طریق مشابهی، می‌توان پاسخ حالت گذرای سیستم را آن قسمت از پاسخ کلی سیستم در نظر گرفت که به ازاء $\omega \rightarrow 0$ صفر خواهد شد. برای آنکه پاسخ سیستم قسمتی داشته باشد که به ازاء $\omega \rightarrow 0$ به سمت صفر می‌یابد و دامنه آن با افزایش زمان به سمت بی‌نهایت می‌نکند، سیستم باید مشخصه خاصی به نام «پایداری» را برآورده سازد که در بخش ۸-۳ مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

در اینجا برای بررسی پاسخ حالت گذرا، فرض می‌کنیم که اولاً سیگنال ورودی به سیستم پله واحد است و ثانیاً سیستم مرتبه دوم است. اگرچه می‌توان به جای ورودی پله واحد از سایر ورودیها مانند ورودی شبیب یا سهموی نیز استفاده کرد، لیکن اطلاعات بیشتری از آنچه توسط ورودی پله واحد بدست می‌آید، از اعمال این ورودیها بدست نخواهد آمد. لذا با توجه به ساده‌تر بودن صورت عملی اعمال ورودی پله و اینکه در عمل مشخصه‌های بدست آمده از تحلیل پاسخ ورودی پله برای تحلیل حالت ماندگار بسیار غنی هستند، این ورودی در تحلیل بسیاری از سیستم‌های عملی و صنعتی استفاده می‌شود. استفاده از یک تابع تبدیل مرتبه دوم در تحلیل پاسخ حالت گذرا نیز به هیچ وجه محدود کننده نیست، زیرا اگرچه ممکن است بسیاری از سیستم‌های عملی و صنعتی مرتبه سوم یا بالاتر باشند، لیکن می‌توان آنها را به خوبی با یک مدل مرتبه دوم تقریب زد. در اکثریت موارد، مدل مرتبه دوم مدل غالب سیستم است و به عبارت دیگر، صورت کلی پاسخ سیستم توسط قسمت مرتبه دوم آن تعیین می‌گردد.

پاسخ یک سیستم مرتبه دوم به ورودی پله، بسته به موقعیت قطب‌های آن (ریشه‌های چند جمله‌ای مرتبه دوم در مخرج تابع تبدیل) می‌تواند به یکی از سه صورت زیر باشد:

- ۱- پاسخ میرای شدید^۱
- ۲- پاسخ میرای بحرانی^۲
- ۳- پاسخ میرای ضعیف^۳

توجه کنید که پاسخ نشان داده شده در شکل ۳-۳ برای سیستم مرتبه اول در پاسخ به ورودی پله واحد، تنها صورت پاسخ حالت گذرا و ماندگار یک سیستم مرتبه اول است. با تغییر دادن محل قطب سیستم مرتبه اول، ثابت زمانی آن تغییر می‌کند و در نهایت سرعت پاسخ کم یا زیاد خواهد شد، لیکن صورت کلی آن همانند شکل ۳-۲ خواهد بود.

۱-۴-۳ پاسخ میرای شدید

اگرتابع تبدیل سیستم دو ریشه حقیقی (دو قطب حقیقی) داشته باشد، آنگاه خواهیم داشت

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{k}{(s+\alpha)(s+\beta)} \quad (1-4-3)$$

پاسخ سیستم داده شده با معادله (۱-۴-۳)، به ورودی پله واحد عبارتست از

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{k}{(s+\alpha)(s+\beta)} \frac{1}{s} \\ &= \frac{k}{\alpha\beta} \left[\frac{1}{s} + \frac{\beta}{(\alpha-\beta)} \frac{1}{s+\alpha} + \frac{\alpha}{(\beta-\alpha)} \frac{1}{s+\beta} \right] \end{aligned} \quad (2-4-3)$$

باگرفتن عکس تبدیل لاپلاس از معادله (۲-۴-۳) بدست می‌آوریم

$$c(t) = k \left\{ \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{(\alpha-\beta)} \left[\frac{\exp(-\alpha t)}{\alpha} - \frac{\exp(-\beta t)}{\beta} \right] \right\} \quad (3-4-3)$$

(عملیات تبدیل به کسرهای جزبی (۲-۴-۳) و عکس تبدیل لاپلاس (۳-۴-۳) را انجام دهید). بافرض مثبت بودن اعداد حقیقی α و β از معادله (۳-۴-۳) داریم

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \frac{k}{\alpha\beta} = \frac{k}{a_0} \quad (a_0 = \alpha\beta) \quad (4-4-3)$$

توجه کنید که این نتیجه با نتیجه بدست آمده از اعمال قضیه مقدار نهایی در معادله

1- Overdamped

2- Critically damped

3- Underdamped

(۱۵-۳-۳) مطابقت دارد. همچنین توجه کنید که در $t=0$ داریم

$$c(t) \Big|_{t=0} = k \left\{ \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{(\alpha-\beta)} \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right] \right\} = 0 \quad (5-4-3)$$

$$\frac{dc(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \quad (6-4-3)$$

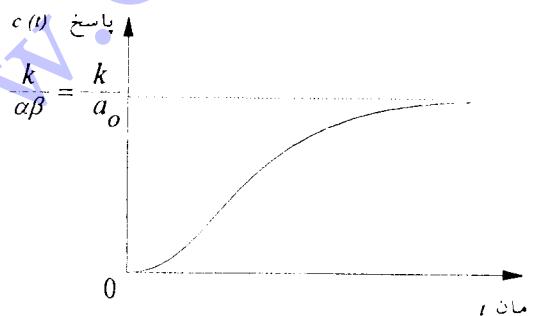
پاسخ کلی سیستم برای حالت میرای شدید در شکل ۳-۵ نشان داده شده است. نکته قابل توجه در این پاسخ آن است که همانند پاسخ سیستم مرتبه اول به ورودی پله، سیگنال خروجی همواره از یک طرف به مقدار نهایی خویش میل می‌کند، به عبارت دیگر هیچگاه قبل از حالت دائمی به مقدار نهایی خودش نمی‌رسد.

۲-۴-۳ پاسخ میرای بحرانی

اگر قطب‌های حقیقی یکتابع تبدیل سیستم مرتبه دوم در یک مکان بر روی محور حقیقی منفی قرار گرفته باشند، داریم

$$G(s) = \frac{k}{(s+\alpha)^2} \quad (7-4-3)$$

این حالت را می‌توان یک حالت حدی برای حالت پاسخ میرای شدید در بخش ۱-۴-۳ در نظر گرفت. اگر به تابع تبدیل داده شده با معادله (7-4-3) یک ورودی پله واحد اعمال گردد،



شکل ۳-۳ پاسخ میرای شدید برای ورودی پله

داریم

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{k}{(s+\alpha)^2} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \frac{k}{\alpha^2} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+\alpha)} - \frac{\alpha}{(s+\alpha)^2} \right] \end{aligned} \quad (8-4-3)$$

و باگرفتن عکس تبدیل لاپلاس از معادله (۸-۴-۳)، بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} c(t) &= \frac{k}{\alpha^2} \left\{ 1 - \exp(-at) - at \exp(-at) \right\} \\ &= \frac{k}{\alpha^2} \left\{ 1 - [1 + at] \exp(-at) \right\} \end{aligned} \quad (9-4-3)$$

(عملیات تبدیل به کسرهای جزیی (۸-۴-۳) و عکس تبدیل لاپلاس (۹-۴-۳) را انجام دهید). با فرض $a > 0$ داریم

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \frac{k}{\alpha^2} = \frac{k}{a^2} \quad (10-4-3)$$

که در آن $a = \alpha^2$ برای تعیین شرایط اولیه پاسخ از معادله (۹-۴-۳)، بدست می‌آوریم

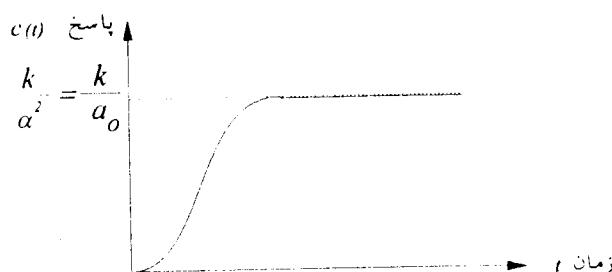
$$c(t) \Big|_{t=0} = 0 \quad (11-4-3)$$

و

$$\frac{dc(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \quad (12-4-3)$$

پاسخ زمانی کلی سیستم برای حالت میرای بحرانی در شکل ۳-۶ نشان داده شده است.

در صورتیکه فرارفت از مقدار حالت ماندگار پاسخ $\frac{k}{\alpha^2}$ مجاز نباشد (به عبارت دیگر پاسخ در هیچ زمانی مقداری بیش از $\frac{k}{\alpha^2}$ را اختیار نکند)، پاسخ میرای بحرانی سربعترین پاسخی است که می‌توان برای یک سیستم مرتبه دوم بدست آورد. این خاصیت در پرخی از



شکل ۳-۶ پاسخ میرای بحرانی برای فرودی پنهان

سیستم‌های عملی و صنعتی بسیار مهم است. به عنوان مثال در یک روبات جوشکار، فرارت از مقدار نهایی می‌تواند بسیار خطرناک باشد و حال آنکه کندی سرعت و زمان بری زیاد در رسیدن به حالت نهایی (مانند حالت میرای شدید) نیز اصلاً مطلوب نیست، لذا در این صورت می‌توان از حالت میرای بحرانی استفاده نمود.

۳-۴-۳ پاسخ میرای ضعیف

مشخصه اصلی پاسخ میرای ضعیف آن است که بر خلاف دو حالت قبلی، در اثر اعمال ورودی پله، خروجی از مقدار نهایی خودش (مقدار حالت ماندگار پاسخ) فرا رفته و بالا می‌زند. در این حالت دو ریشه (قطب) مخرج تابع تبدیل سیستم اعداد مختلط هستند. وجود قطب‌های مختلط باعث می‌شود که پاسخ به ورودی پله نوسانی گردد. سرعت از بین رفتن این نوسانات بستگی به مقدار میرایی تابع تبدیل خواهد داشت. اگر پاسخ میرا نشود، در تئوری این نوسانات همواره باقی خواهد ماند اما در عمل هر سیستمی همواره مقداری میرایی پاسخ خواهد داشت. با افزایش مقدار میرایی، نوسانات سریعتر از بین می‌روند و با افزایش بیشتر میرایی به پاسخ میرایی بحرانی می‌رسیم که در آن نوسانات امکان شروع شدن را بسیار نمی‌کنند.

تابع تبدیل سیستم مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{k}{(s + \alpha + j\beta)(s + \alpha - j\beta)} \\ &= \frac{k}{s^2 + 2\alpha s + (\alpha^2 + \beta^2)} = \frac{k}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \end{aligned} \quad (13-4-3)$$

با اعمال ورودی پله واحد به سیستم داده شده با معادله (۱۳-۴-۳)، بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{k}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \frac{1}{s} \\ &= \frac{k}{\alpha^2 + \beta^2} \left[\frac{1}{s} - \frac{(s + \alpha)}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} - \frac{\alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \right] \end{aligned} \quad (14-4-3)$$

و با عکس تبدیل لاپلاس از معادله (۱۴-۴-۳)، داریم

$$c(t) = \frac{k}{\alpha^2 + \beta^2} \left\{ 1 - \exp(-\alpha t) \cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \exp(-\alpha t) \sin \beta t \right\} \quad (15-4-3)$$

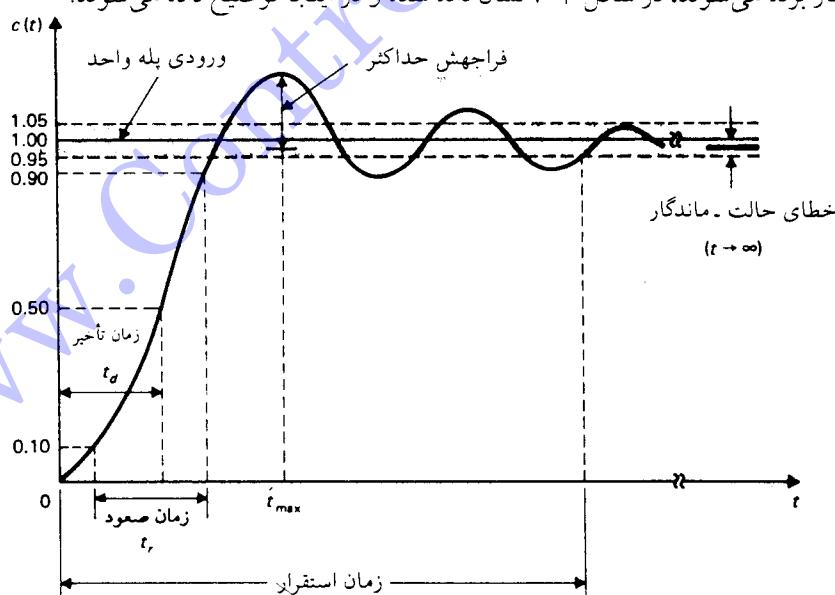
$$c(t) = \frac{k}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{k \exp(-\alpha t)}{\beta(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}} \left\{ \frac{\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}} \cos \beta t + \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}} \sin \beta t \right\} \quad (16-4-3)$$

$$\theta = \tan^{-1} \beta / \alpha \quad (17-4-3)$$

داریم

$$c(t) = \frac{k}{(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}} \left\{ 1 - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}}{\beta} \exp(-\alpha t) \sin(\beta t + \theta) \right\} \quad (18-4-3)$$

پاسخ، همانطور که از معادله (18-4-3) مشاهده می‌شود، یک موج سینوسی با فرکانس β همراه با یک عبارات میراکننده نمایی با عامل α و یک مقدار حالت ماندگار داده شده با $\frac{k}{(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}}$ است. شکل ۷-۳ پاسخ پله واحد یک سیستم مرتبه دوم را نشان می‌دهد. معیارهای عملکرد که معمولاً در حوزه زمان برای بررسی و تحلیل سیستم‌های کنترل خطی بکار برده می‌شوند، در شکل ۷-۳ نشان داده شده و در اینجا توضیح داده می‌شوند:



شکل ۷-۳ پاسخ پله واحد یک سیستم کنترل مرتبه دوم

۱- فراجهش حداکثر^۱. اگر حداکثر مقدار خروجی سیستم (۱) پس از اعمال ورودی یله را با c_{ss} نشان دهیم و $c_{ss} \geq c_{max}$ نیز مقدار حالت ماندگار آن بوده و باشد، آنگاه فراجهش حداکثر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$c_{max} - c_{ss} = \text{فراجهش حداکثر} \quad (19-4-3)$$

در بسیاری از موارد فراجهش حداکثر را به صورت درصدی از مقدار حالت ماندگار پاسخ پله سیستم نمایش می‌دهند. یعنی آنکه

$$\frac{\text{فراجهش حداکثر}}{c_{ss}} = \text{درصد فراجهش حداکثر} \quad (20-4-3)$$

یکی از مشخصه‌های عملکرد یک سیستم در حوزه زمان، فراجهش حداکثر آن است. در واقع فراجهش حداکثر بسیار زیاد در عمل مطلوب نیست زیرا باعث کاهش میزان پایداری سیستم می‌گردد.

۲- زمان تاخیر^۲. زمان تاخیر به زمانی گفته می‌شود که لازم است تا پاسخ پله به ۵٪ مقدار نهایی خودش برسد.

۳- زمان صعود^۳. زمان صعود به زمانی گفته می‌شود که لازم است تا پاسخ از ۱۰ به ۹۰ درصد یا از ۵ به ۹۵ درصد یا از ۰ به ۱۰۰ درصد مقدار نهایی خودش برسد. برای سیستم‌های میرای ضعیف معمولاً از ۰ تا ۱۰۰ درصد و برای سیستم‌های میرای شدید اکثرًا از ۱۰ تا ۹۰ درصد استفاده می‌شود.

۴- زمان استقرار^۴: زمان استقرار به مدت زمانی گفته می‌شود که لازم است تا پاسخ به یک محدوده مشخص شده حول مقدار نهایی پاسخ رسیده و پس از آن نیز در آن محدوده باقی بماند. این محدوده عموماً بر حسب درصدی از مقدار نهایی پاسخ مانند ۲٪ و یا ۵٪ آن بیان می‌شود.

چهار کمیت تعریف شده در بالا معیارهای مستقیمی برای سنجش عملکرد و مشخصه‌های یک سیستم کنترل هستند. اندازه‌گیری آنها در عمل سرراست است و به سادگی نیز تعریف می‌شوند.

1- Maximum overshoot

2- Delay time

3- Rise time

4- Settling time

متداول‌ترین نحوه نوشتن تابع تبدیل یک سیستم مرتبه دوم به صورت زیر است

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (21-4-3)$$

که در آن ξ را نسبت میرایی^۱ و ω_n را فرکانس طبیعی میرانشده^۲ سیستم می‌نامند. از مقایسه معادله‌های (۲۱-۴-۳) و (۱۳-۴-۳) داریم $\xi = \frac{\alpha}{\omega_n}$ و $\omega_n^2 = \alpha^2 + \beta^2$. به نکات زیر در رابطه با نسبت میرایی و فرکانس طبیعی میرانشده توجه کنید:

۱- برای $\xi > 0$ ، قطب‌های سیستم مرتبه دوم در (۱۳-۴-۳) به سمت قطب‌های یک سیستم میرایی بحرانی میل خواهند کرد و در این صورت برای نسبت میرایی داریم $\alpha > 0$. از طرف دیگر اگر $\xi < 0$ ، عامل میرایی نمایی در معادله (۱۸-۴-۳) به صفر میل می‌کند و به سمت یک پاسخ نوسانی بدون میرایی (نوسانی خالص) میل خواهیم کرد، در این صورت برای نسبت میرایی داریم $\alpha < 0$ از این‌رو برای یک پاسخ میرای ضعیف داریم $\alpha < \xi < 0$ که در آن با افزایش ξ به سمت ۰، میرایی در سیستم قوی‌تر خواهد شد. مقادیر $\xi < 0$ متناظر با حالت میرای شدید می‌باشند (بخش ۱-۴-۳ را بینید).

۲- اگر نسبت میرای صفر باشد، آنگاه $\alpha = 0 = \xi$ و $\omega_n = \beta$. در این حالت نوسانات میرانشده و غیر افزایشی با فرکانس ω_n همواره باقی خواهند ماند.

پاسخ سیستم داده شده با معادله (۲۱-۴-۳) به ورودی پله واحد عبارتست از

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (22-4-3)$$

با استفاده از عکس تبدیل لاپلاس می‌توان نشان داد که خروجی سیستم عبارتست از

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \cos^{-1}\xi) \quad t \geq 0 \quad (23-4-3)$$

معادله (۲۳-۴-۳) دقیقاً همان معادله (۱۸-۴-۳) است که مقادیر زیر در آن جایگزین شده‌اند

$$k = \alpha^2 + \beta^2, \quad \alpha = -\xi\omega_n, \quad \beta = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}, \quad \phi = \cos^{-1}\xi$$

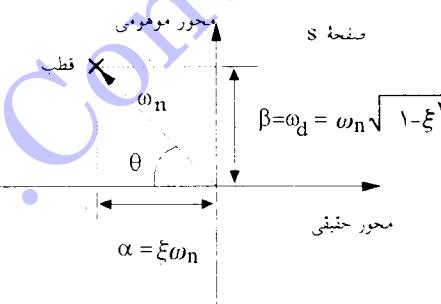
(صحت این روابط را با فرض $\alpha^2 + \beta^2 = k$ تایید کنید). همانطور که اشاره شد ω_n فرکانس طبیعی میرا نشده سیستم برای $\xi = 0$ است. از رابطه سوم در روابط بالا داریم به ازاء $\xi > 0$ قسمتهای موموی ریشه‌ها اندازه‌ای به مقدار زیر دارند

$$\beta = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (24-4-3)$$

اگر $\xi \neq 0$ باشد، پاسخ سیستم (t) یک تابع غیر متناوب است و β تعریف شده با معادله $(24-4-3)$ یک فرکانس نیست. لیکن به خاطر اهمیتی که β دارد آنرا با ω_d نشان داده و فرکانس طبیعی میرا شده^۱ یا فرکانس شرطی^۲ می‌نامند.

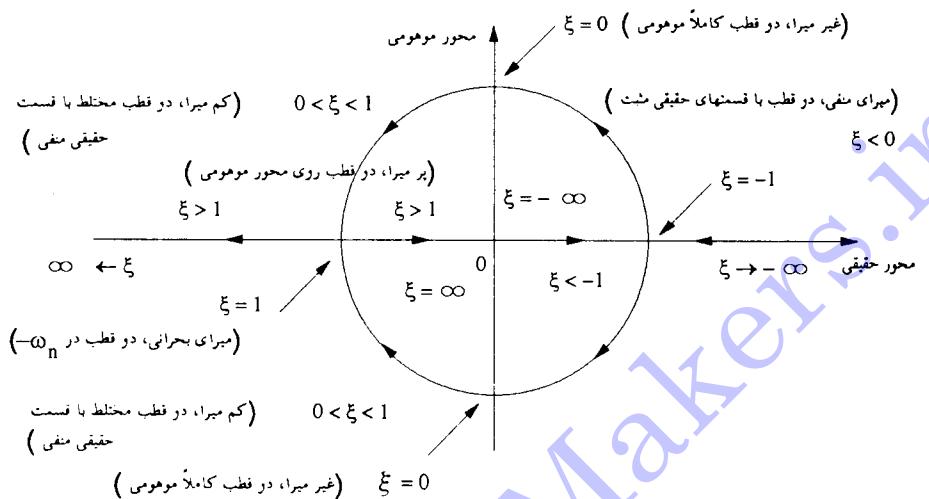
شکل ۸-۳ رابطه بین موقعیت قطب‌های سیستم و α ، ξ ، ω_n و β را نشان می‌دهد. برای ریشه‌های مختلط مزدوج نشان داده شده، ω فاصله شعاعی از ریشه‌ها به مبدأ صفحه S است. عامل میرایی α قسمت حقیقی ریشه‌ها، فرکانس طبیعی میرا شده β قسمت موهومی ریشه‌ها، نسبت میرایی ξ برابر با کسینوس زاویه بین خط شعاعی به ریشه‌ها و محور منفی است، هنگامیکه ریشه‌ها در سمت چپ صفحه S قرار گرفته باشند و یا

$$\xi = \cos \theta \quad (25-4-3)$$

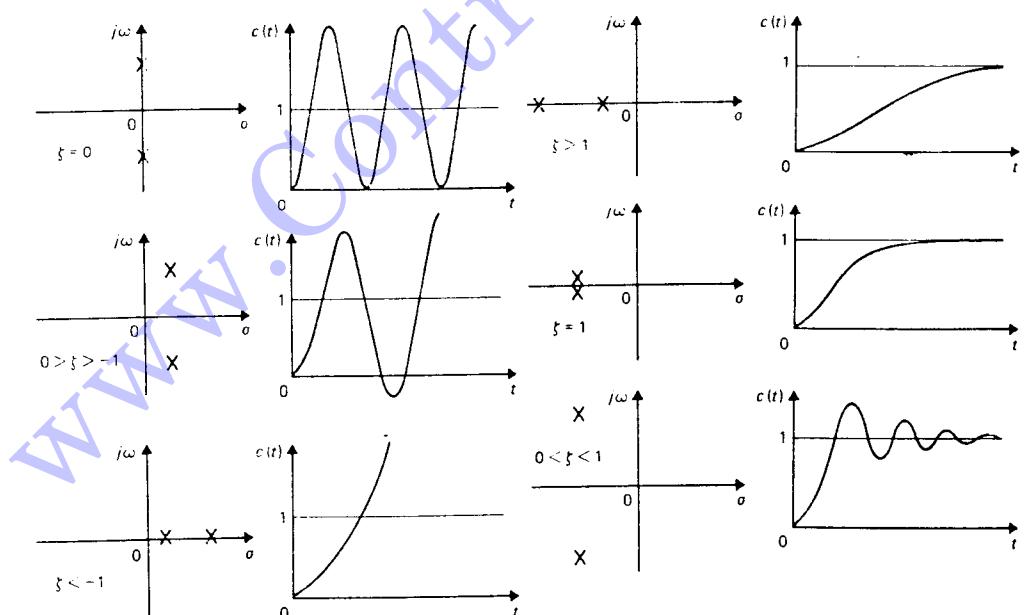


شکل ۸-۳ رابطه بین قطب‌های سیستم مرتبه دوم α ، ξ ، ω_n و β

اثر قطب‌های سیستم بر روی سیستم مرتبه دوم در شکل‌های ۹-۳ و ۱۰-۳ نشان داده شده است. در شکل ۹-۳ ω_n ثابت فرض شده است و نسبت میرایی ξ از 0 تا ∞ تغییر می‌کند.



شکل ۹-۳ مکان ریشه قطب‌های سیستم مرتبه دوم داده شده با معادله (۲۱-۴-۳) هنگامیکه ثابت فرض شده است و نسبت میرایی از $-\infty$ تا ∞ تغییر می‌کند.



شکل ۱۰-۳ مقایسه بین پاسخهای سیستم به ازاء موقعیتهای مختلف قطب‌های سیستم مرتبه دوم.

شکل ۱۰-۳ پاسخهای پله واحد یک سیستم مرتبه دوم متناصر با مقادیر مختلف قطبیان سیستم را نشان می‌دهد.

در سیستم‌های عملی کنترل، تنها سیستم‌هایی که نسبت میرایی تنها مشبّت‌اند (سیستم‌های پایدار) کاربرد دارند. شکل ۱۱-۳ پاسخهای سیستم مرتبه دوم داده شده با معادله (۲۶-۴-۳) به ورودی پله واحد را برای مقادیر مختلف نسبت میرایی بر حسب زمان نرمالیزه شده t_p نشان می‌دهد. همانطور که از شکل ۱۱-۳ مشاهده می‌شود، با کاهش ξ مقدار فراجهش حد اکثر بزرگ‌تر شده و پاسخ نوسانی تر می‌گردد. برای مقادیر $1 \geq \xi \geq 0$ پاسخ پله واحد، نوسانی نشان نمی‌دهد (حالت میرایی بحرانی و شدید).

در اینجا فراجهش حد اکثر، زمان تاخیر، زمان صعود و زمان استقرار را برای یک سیستم مرتبه دوم داده شده با معادله (۲۶-۴-۳)، بدست می‌آوریم. نخست فراجهش حد اکثر را تعیین می‌کنیم، زمانی را که پاسخ به حد اکثر فراجهش می‌رسد، زمان ستیغ^۱ می‌نامند. برای تعیین زمان ستیغ از (t) نسبت به زمان مشتق می‌گیریم و آنرا مساوی با صفر قرار می‌دهیم. با مشتق گرفتن و پس از دو مرحله ساده سازی (این مراحل را انجام دهید)، بدست می‌آوریم

$$\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=t_p=0} = \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t_p) \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \exp(-\xi \omega_n t_p)$$

و بنابراین

$$\sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t_p) = 0$$

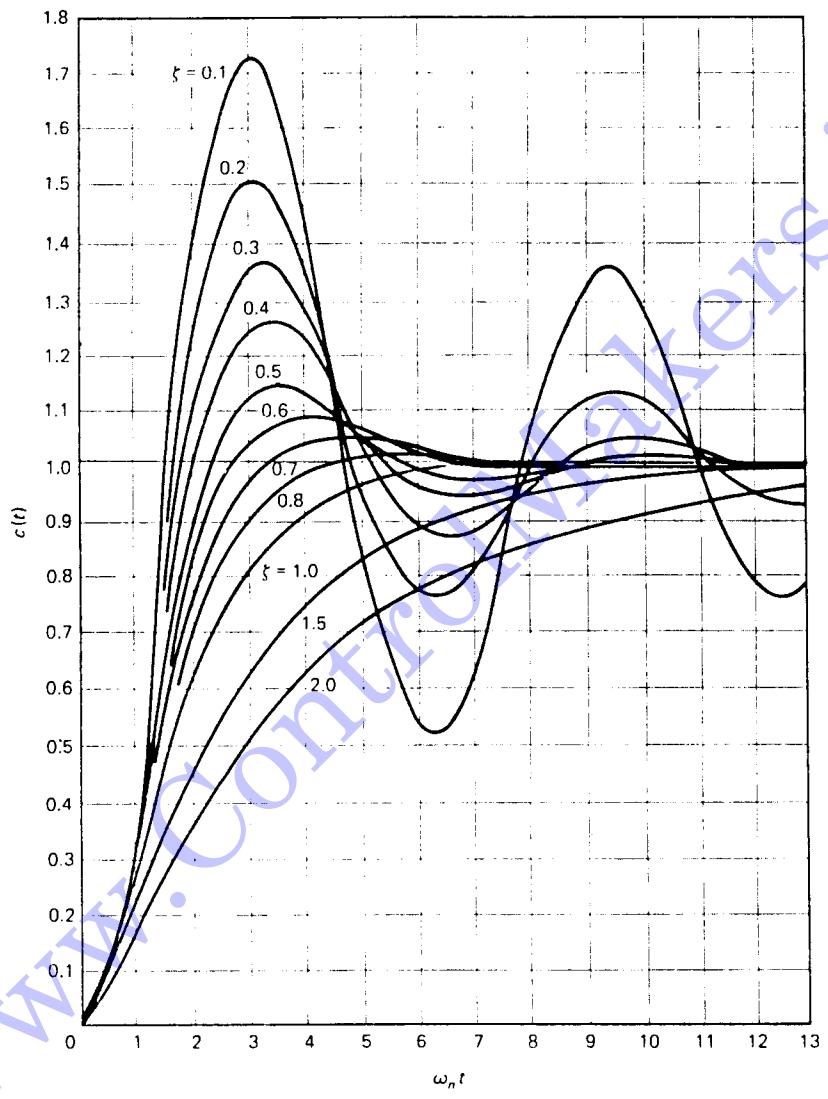
و با

$$\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t_p = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

زمان ستیغ برابر با زمان اولین فراجهش است و لذا

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \quad (26-4-3)$$

۱- Peak time



شکل ۱۱-۳ پاسخهای پله واحد سیستم مرتبه دوم با مقادیر مختلف نسبت میرایی.

اگر مقدار فراجهش حداکثر را با M_p نشان دهیم، بنابر تعریف M_p داریم

$$\begin{aligned} M_p &= c(t_p) - 1 \\ &= -\exp(-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\pi + \cos^{-1}\xi) \\ &= \exp(-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}) \end{aligned} \quad (27-4-3)$$

بنابراین از معادله (27-4-3) درصد فراجهش حداکثر برابر با $100 \cdot \exp(-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2})$ است.

تعیین دقیق روابط تحلیلی برای محاسبه زمان تاخیر، حتی برای سیستم‌های ساده مرتبه دوم ساده نیست. توجه کنید که برای محاسبه زمان تاخیر، باید در معادله (23-4-3) به جای $c(t)$ مقدار $5/0$ را جایگذاری کرد و معادله را برای t حل نمود. روش‌های تقریبی ساده‌تری برای محاسبه زمان تاخیر وجود دارد که در اینجا از ذکر آنها صرف‌نظر می‌کنیم و در صورت تمایل به مطالعه بیشتر در این زمینه به بخش مراجع آخر همین فصل مراجعه کنید.

بنابر تعریف، زمان صعود t_r می‌تواند برای سیستم‌های میرای ضعیف به عنوان زمانی تلقی گردد که خروجی در پاسخ به ورودی پله واحد از 0 به 1 می‌رسد. لذا از معادله (23-4-3) داریم

$$c(t_r) = 1 = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t_r + \cos^{-1}\xi) \quad (28-4-3)$$

از معادله (28-4-3) داریم

$$\frac{e^{-\xi\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t_r + \cos^{-1}\xi) = 0 \quad (29-4-3)$$

با توجه به اینکه $\exp(-\xi\omega_n t_r)$ همواره غیر صفر است و با جایگزینی $\xi = \omega_n \sqrt{1-\beta^2}$ و $\theta = \cos^{-1}\beta$ از معادله (29-4-3)، بدست می‌آوریم

$$\beta t_r + \theta = n\pi \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (30-4-3)$$

برای زمان صعود داریم $n=1$ و لذا معادله (30-4-3)، می‌دهد

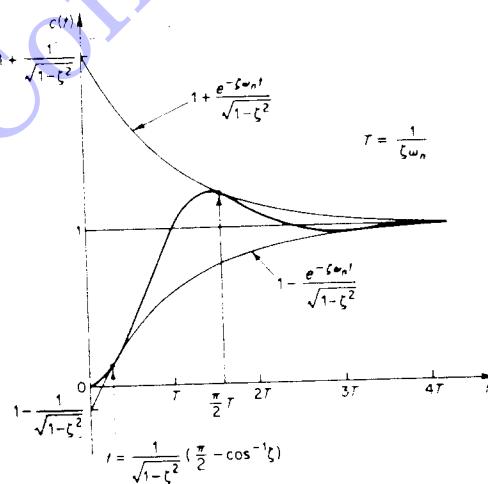
$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\beta} \quad (31-4-3)$$

معادله (۳۱-۴-۳) زمان لازم را برای رسیدن پاسخ از 0 به 1 در پاسخ به ورودی پله واحد تعیین می‌کند. برای تعیین زمان لازم برای رسیدن پاسخ از 10 تا 90 درصد مقدار نهایی خود از روابط دیگری باید استفاده کرد که برای مطالعه بیشتر می‌توانید به مراجع آخر این فصل مراجعه کنید.

برای سیستم‌های میرای ضعیف مرتبه دوم، پاسخ گذاری سیستم به ورودی پله واحد از معادله (۲۳-۴-۳) عبارتست از

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \cos^{-1}\zeta) \quad (t \geq 0)$$

منحنیهای $\pm e^{-\xi\omega_n t}/\sqrt{1-\zeta^2}$ منحنیهای پوش پاسخ گذار برای ورودی پله واحد هستند. همانطور که از شکل ۱۲-۳ مشاهده می‌شود، منحنی پاسخ (t) همواره در داخل یک جفت از منحنیهای پوش باقی می‌ماند. ثابت زمانی این منحنیهای پوش $\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n}$ است. نرخ صفر شدن پاسخ حالت گذرا، به مقدار ثابت زمانی $\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n}$ بستگی دارد. برای یک $\zeta < 1$ داده شده، زمان استقرار به مقدار τ بستگی دارد. از شکل ۱۱-۳ مشاهده می‌گردد که برای مقدار ثابت τ و برای گستره t بین 0 تا τ ، زمان استقرار با کاهش t افزایش می‌یابد. برای یک سیستم میرای شدید بدلیل شروع کند پاسخ، زمان استقرار طولانی می‌شود.



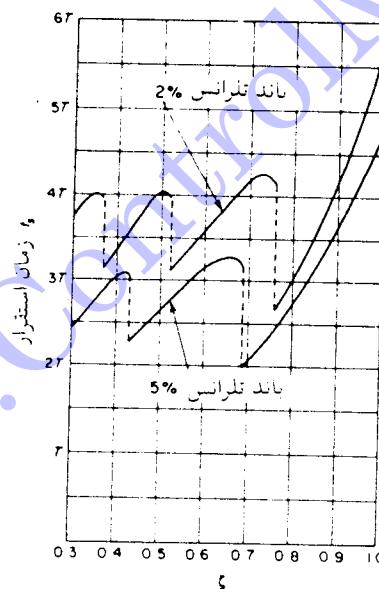
شکل ۱۲-۳ منحنیهای پوش برای منحنی پاسخ پله واحد سیستم مرتبه دوم

زمان استقرار متناظر با یک باند ترانس $\pm 2\%$ یا $\pm 5\%$ را می‌توان بر حسب ثابت زمانی $T = \frac{1}{\xi \omega_n}$ از منحنیهای شکل ۱۳-۳، برای مقادیر مختلف ξ اندازه گرفت. نتایج این اندازه‌گیری در شکل ۱۳-۳ نشان داده شده‌اند. برای مقادیر $\xi < 0.9$ ، اگر از معیار $\pm 2\%$ استفاده گردد، تقریباً چهار برابر ثابت زمانی سیستم است. اگر از معیار $\pm 5\%$ استفاده گردد، تقریباً سه برابر ثابت زمانی سیستم است. توجه کنید که، تقریباً حداقل زمان استقرار را برای معیار $\pm 2\%$ در حدود $\xi = 0.76$ و برای معیار $\pm 5\%$ در حدود $\xi = 0.68$ خواهیم داشت. برای مقایسه بین پاسخهای سیستم‌ها، معمولاً زمان استقرار t_s را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$t_s = 4T = \frac{4}{\xi \omega_n} \quad (32-4-3)$$

با

$$t_s = 3T = \frac{3}{\xi \omega_n} \quad (\text{معیار } \pm 5\%) \quad (33-4-3)$$



شکل ۱۳-۳ زمان استقرار بر حسب
منحنیهای ξ

مثال ۱-۴-۳

تتابع تبدیل مرنورهای انکتریکی را در فصل دوم بدست آوردیم. تتابع تبدیل از ولتاژ میدان به موقعیت شفت یک موتور DC با کنترل میدان به صورت زیر داده شده است

$$G(s) = \frac{e/s}{s(e/2k + 1)}$$

خروچی دستگاه اندازه‌گیری موقعیت شفت با سیگنالی به همان صورت مقایسه می‌شود و سیگنال خطای e نشان داده شده در شکل ۱۴-۳ را تشکیل می‌دهد. با بکارگیری یک آمپلی‌فایر قدرت پاسخ سریع و یک کنترل کننده با بهره ثابت، حلقه سیستم را می‌توان با میک آمپلی‌فایر با بهره کم بست. تتابع تبدیل حلقه - بسته سیستم عبارتست از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\gamma k}{s^2 + 4s + 2k}$$

برای ورودی پله واحد، خروجی سیستم (موقعیت شفت) عبارتست از

$$C(s) = \frac{\gamma k}{s(s^2 + 4s + 2k)}$$

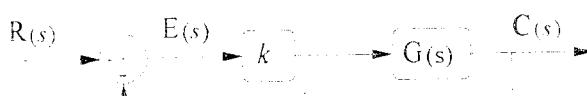
خروچی سیستم را برای مقادیر $\gamma = 1$ ، $k = 2$ و $k = 8$ با بسط کسرهای جزئی و عکس تبدیل لاپلاس به صورت زیر بدست می‌آوریم

$$c(t) = 1 - 1/(2e^{2t})e^{-2t}/5881 + 0/(207e^{-2t}/4141) \quad k=1$$

$$c(t) = 1 - 2te^{-2t} - e^{-2t} \quad k=2$$

$$c(t) = 1 + 1/(1544)e^{-2t}\cos\left(2/\sqrt{4641}t + \frac{\pi}{4}\right) \quad k=8$$

نمودارهای پاسخ پله واحد این سیستم برای مقادیر بهره ۱، ۲ و ۸ در شکل ۱۵-۳ نشان داده

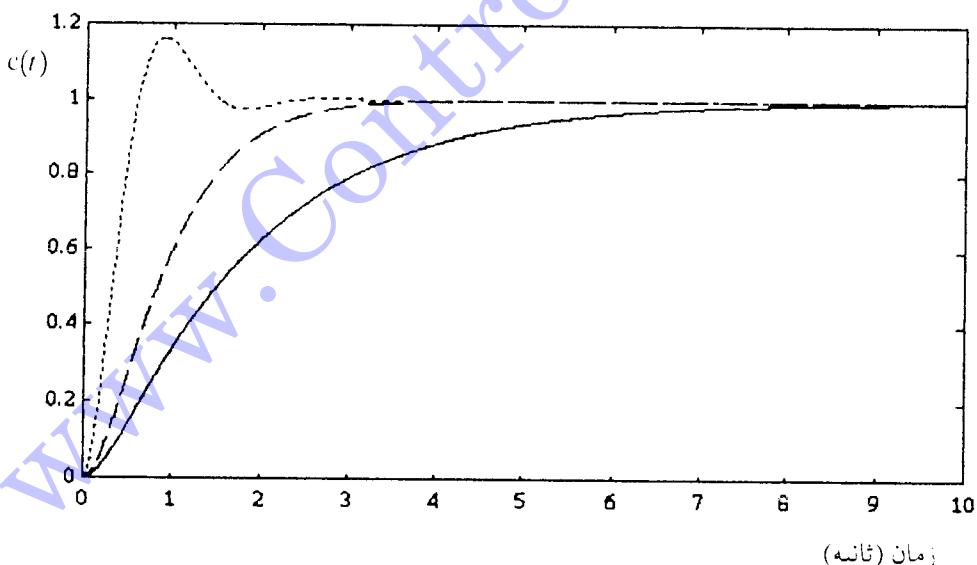


شکل ۱۴-۳ موتور DC مثال ۱-۴-۳

شده‌اند. همانطور که از شکل ۱۵-۳ مشاهده می‌شود برای مقادیر بزرگتر بهره k پاسخ سریع‌تر شده است. البته با افزایش بیشتر k پاسخ سیستم دچار نوسانات شدید می‌شود و مقدار فرارفت و زمان استقرار ممکن است که از حد قابل قبول خارج شوند. مقدار حالت نهایی پاسخ برای هر سه مقدار k ، همانطور که از شکل ۱۵-۳ مشاهده می‌شود، یکسان است. در واقع از قضیه مقدار نهایی داریم

$$C_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = 1$$

مشخصه‌های پاسخ گذرا مانند فرجهش حداکثر، زمان صعود و زمان استقرار را می‌توان مستقیماً از منحنی پاسخ محاسبه نمود و یا اینکه به روش تحلیلی از معادلات بدست آمده استفاده کرد و آنها را محاسبه نمود. قطب‌های سیستم حلقه - بسته برای $2 < k < 4 - 2\sqrt{2}$ عبارتند از $\pm j\sqrt{2\pm\sqrt{2}}$ ، قطب‌ها بر روی محور حقیقی منفی قرار دارند و متناظر با حالت $1 < t < 1 + \frac{1}{k}$ یا پاسخ میرای شدید است. برای $k=2$ ، دو قطب در -2 قرار می‌گیرند و متناظر با حالت $1 < t < 1 + \frac{1}{k}$ یا پاسخ میرای بحرانی است. برای $k=2$ ، ریشه‌ها مختلط مزدوج هستند و متناظر با حالت $1 < t < 1 + \frac{1}{k}$ یا پاسخ میرای ضعیف است. برای نمونه در بهره $k=8$ قطب‌های سیستم در $j\sqrt{464}/2 \pm 3/2$ قرار



شکل ۱۵-۳ پاسخ پله واحد سیستم مثال ۱-۴-۳ برای مقادیر مختلف بهره k
 $k=1$: ---, $k=2$: —, $k=8$: ...

می‌گیرند و در این حالت مخرج تابع تبدیل حلقه - بسته عبارتست از $z^3 + 4z^2 + 4z + 16$. با مقایسه این چند جمله‌ای با چند جمله‌ای استاندارد $z^3 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$ ، بدینهی است که $\xi = 4$ و $\omega_n = 5$. بنابراین $\theta = 3/46$ و $\beta = 60^\circ$. بدین ترتیب مشخصه‌های پاسخ حالت - گذرا عبارتند از:

زمان ستیغ t_p :

$$t_p = \frac{\pi}{\beta} = 0.91 \quad (\text{ثانیه})$$

فراجهش حد اکثر M_p :

$$M_p = \exp(-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}) = 0.163$$

و لذا درصد فرجهش حد اکثر ۱۶٪ است.

زمان صعود t_r :

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\beta} = 0.054 \quad (\text{ثانیه})$$

(توجه کنید θ بر حسب رادیان برابر با $1/0.47$ می‌باشد)

زمان استقرار t_s : برای معیار ۰.۲٪، زمان استقرار برابر است با

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 2 \quad (\text{ثانیه})$$

و برای معیار ۰.۵٪ برابر است با

$$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} = 1.5 \quad (\text{ثانیه})$$

۵-۳ اثرات اضافه کردن صفر و قطب به توابع تبدیل

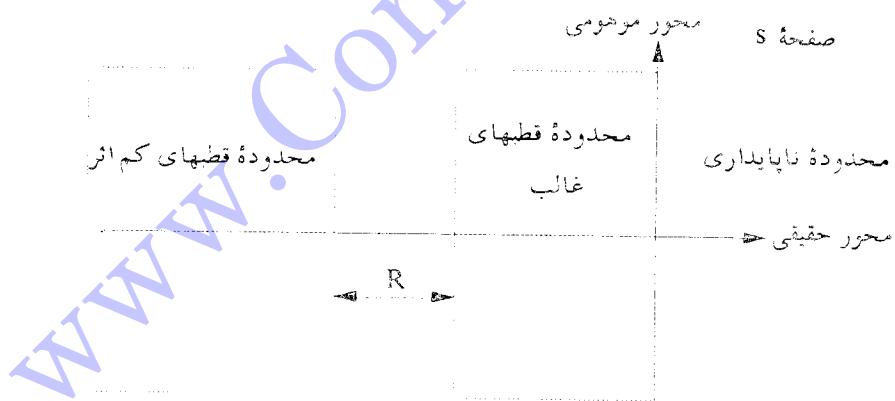
۱-قطبهای غالب توابع تبدیل

از مطالب ارایه شده در بخش ۴-۳ این نتیجه مهم حاصل می‌شود که، موقعیت قطبها تابع تبدیل در صفحه داشر مستقیم بر روی پاسخ گذاری آن دارد. در شکل ۱۰-۳ نشان داده شده است که موقعیت قطبها در یک سیستم مرتبه دوم، پاسخهای کاملاً متفاوت حالت گذرا را بدست می‌دهند. در تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل، پیدا کردن آن دسته از قطبها سیستم که بیشترین اثر را بر پاسخ دارند اهمیت فوق العاده‌ای دارد. به این قطبها، قطبهاي غالب ۱

سیستم می‌گویند. دربحث سیستم‌های مرتبه دوم اشاره شد که بسیاری از سیستم‌های عملی را می‌توان به صورت یک تابع تبدیل مرتبه دوم مدل کرد. در واقع، در این مدل‌سازی از این واقعیت استفاده می‌گردد که قطب‌های غالب این گونه سیستم‌ها، همان دو قطب در نظر گرفته شده در تابع تبدیل مرتبه دوم مدل آنها هستند.

از آنجاییکه اکثریت سیستم‌های کنترل در عمل از مرتبه‌ای بالا برخودار هستند، لذا بیدا نمودن و تدوین دستورالعملی که این سیستم‌ها را توسط مدل‌های مرتبه پایین‌تر (مانند مدل مرتبه دوم) تغیریت بزنند، بسیار سودمند است. در کلیه کاربردهای عمیق، می‌توان صفحه ۱۶-۳ به دو قسمت تشکیل شده از قطب‌های غالب و قطب‌های کم اثر^۱ تقسیم کرد. این تقسیم‌بندی در شکل ۱۶-۳ نشان داده شده است. توجه کنید که اندازه و مقادیر معینی برای مختصات قسمت‌های مختلف شکل ۱۶-۳ ازایه نشده است. زیرا در سیستم‌های مختلف این مختصات تفاوت می‌کند و در واقع هر سیستمی مختصات مربوط به خود را در شکل ۱۶-۳ خواهد داشت.

قاعده کلی آن است، قطب‌ایی که در صفحه ۱ در سمت چپ محور موهو می‌قرار دارد و به آن نزدیکتر هستند، پاسخ‌گذاری کننده خواهند داشت (با سرعت کمی صفر خواهند شد). حال آنکه قطب‌ایی که در سمت چپ محور موهو می‌قرار دارد و نسبت به قطب‌های غالب



شکل ۱۶-۳ محدوده‌های قطب‌های غالب و کم اثر در صفحه ۱

بسیار دورتر از محور موهومی هستند، پاسخ گذراي سریع دارند و با سرعت بیشتری صفر خواهند شد. قطبهاي دسته اول در محدوده قطبهاي غالب قرار گرفته و قطبهاي دسته دوم در محدوده قطبهاي کم اثر قرار می‌گيرند. مطلب مهم، تشخيص فاصله R بین اين دو محدوده است. از نقطه نظر عملی و کاربردي سیستم‌های کنترل، اگر اندازه قسمت حقیقی قطبی حداقل ۵ تا ۱۰ برابر قسمت حقیقی قطب غالب یا قطبهاي مختلف مزدوج غالب باشد، آن قطب را (از نظر تاثیر بر پاسخ گذرا) از جمله قطبهاي کم اثر به حساب می‌آورند.

اگر سیستمی مرتبه‌ای بالاتر از مرتبه دو داشته باشد، نمی‌توان نسبت میرایی η و فرکانس طبیعی میرا نشده ω_n را به طور صریح برای آن تعریف نمود. لیکن اگر بتوان دینامیک سیستم را با یک جفت قطب غالب مزدوج تقریب زد، آنگاه از η و ω_n برای مشخص کردن قطبهاي سیستم استفاده می‌شود و نسبت میرایی را در این حالت، نسبت میرایی نسبی^۱ می‌نامند.

مثال ۱-۵-۳

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{1}{(s+8)(s^2 + 2s + 2)}$$

در این تابع تبدیل، قطب در $s = -8$ ، 8 برابر قسمت حقیقی قطبهاي مختلف مزدوج در $\pm 1, \pm 5$ است. لذا می‌توان دینامیک سیستم را با اصلاح بهره حالت ماندگار با قسمت مرتبه دوم آن مدل کرد و در اینصورت نسبت میرایی نسبی سیستم $707/0$ است.

۲-۵-۳ اثر قطبهاي غالب اضافي

در بخش ۴-۳، پاسخ سیستم مرتبه دوم مفصلأً بررسی شد. در این بخش، اثر اضافه کردن یک قطب غالب در $s = p_2$ را به تابع تبدیل سیستم مرتبه دوم بررسی می‌کنیم. در این حالت داریم

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{(s^2 + 2\xi\omega_{n1}s + \omega_{n1}^2)(s - p_2)} \quad (1-5-3)$$

1- Relative damping ratio

که در آن $k = -\omega_n^2 p_3$ ، بهره ثابت است. اگر به معادله (۱-۵-۳) ورودی پله واحد اعمال کنیم

$(R(s) = 1/s)$ آنگاه با بسط کسرهای جزیی و عکس تبدیل لاپلاس، بدست خواهیم آورد

$$c(t) = 1 + 2A_1 e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \theta) + A_3 e^{p_3 t} \quad (2-5-3)$$

که در آن A_1 و A_3 ثابت‌های بدست آمده از بسط کسرهای جزیی هستند. (عملیات تبدیل معادله

(۱-۵-۳) به کسرهای جزیی و گرفتن عکس تبدیل لاپلاس را انجام دهید و ثابت‌های A_1 و A_3 را

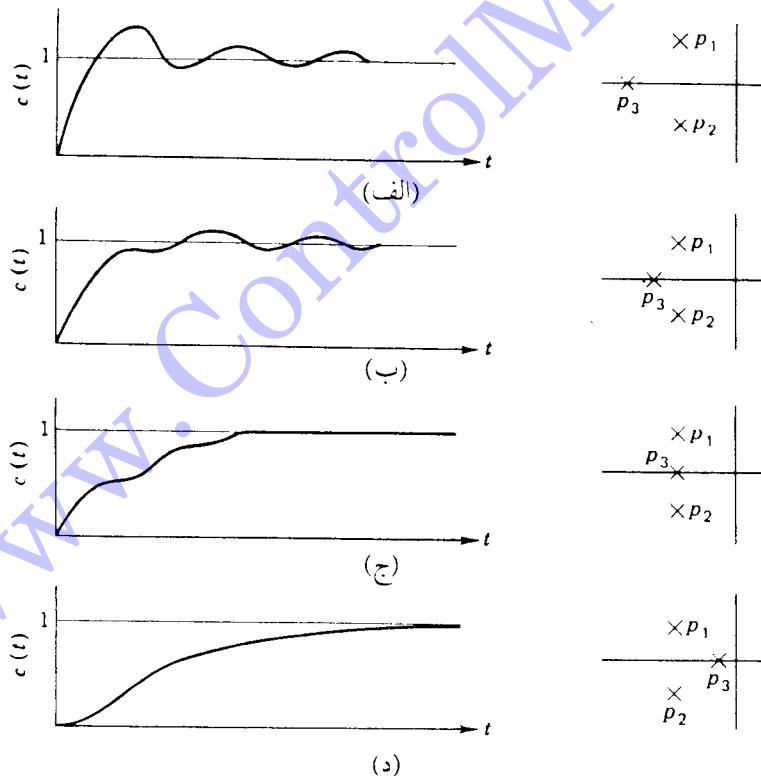
در معادله (۲-۵-۳) در حالت کلی بدست آورید). عبارت گذرای ناشی از قطب اضافه شده p_3 به

تابع تبدیل سیستم به صورت $A_3 e^{p_3 t}$ است، که در آن A_3 همواره منفی است.

بنابراین حداقل فرآجحش M_p کاهش یافته و زمان استقرار سیستم ممکن است که کاهش و یا

افزایش یابد. این اثر معمولی یک قطب غالب اضافی است. شکل ۱۷-۳ چهار حالت

موقعیت قطب غالب اضافی را نشان می‌دهد. با حرکت قطب p_3 به سمت راست، اندازه A_3



شکل ۱۷-۳ پاسخهای سیستم مرتبه سوم بر حسب موقعیت قطب سوم اضافه شده.

بزرگتر شده و فراجهش کوچکتر می‌شود. با نزدیکتر شدن به قطب‌های مختلط (از طرف چپ)، اولین فراجهش در پاسخ، کمتر از مقدار نهایی آن خواهد شد. بزرگترین فراجهش در این حالت (شکل ۱۷-۳ (ب))، می‌تواند در دومین فراجهش (و یا حتی سومین وغیره) باشد.

اگر قطب سوم دقیقاً در قسمت حقیقی قطب‌های مختلط مزدوج قرار گیرد (شکل ۱۷-۳ (ج)), پاسخ سیستم بدون فراجهش خواهد بود، که متناظر با حالت میرایی بحرانی است. اگر قطب اضافه شده در قسمت راست قطب‌های مختلط مزدوج قرار گیرد، پاسخ میرای شدید می‌شود (شکل ۱۷-۳ (د)).

۳-۵-۳ اثر صفرهای اضافی

شکل ۱۸-۳ پاسخهای پله واحد سیستم حلقه - بسته با تابع تبدیل

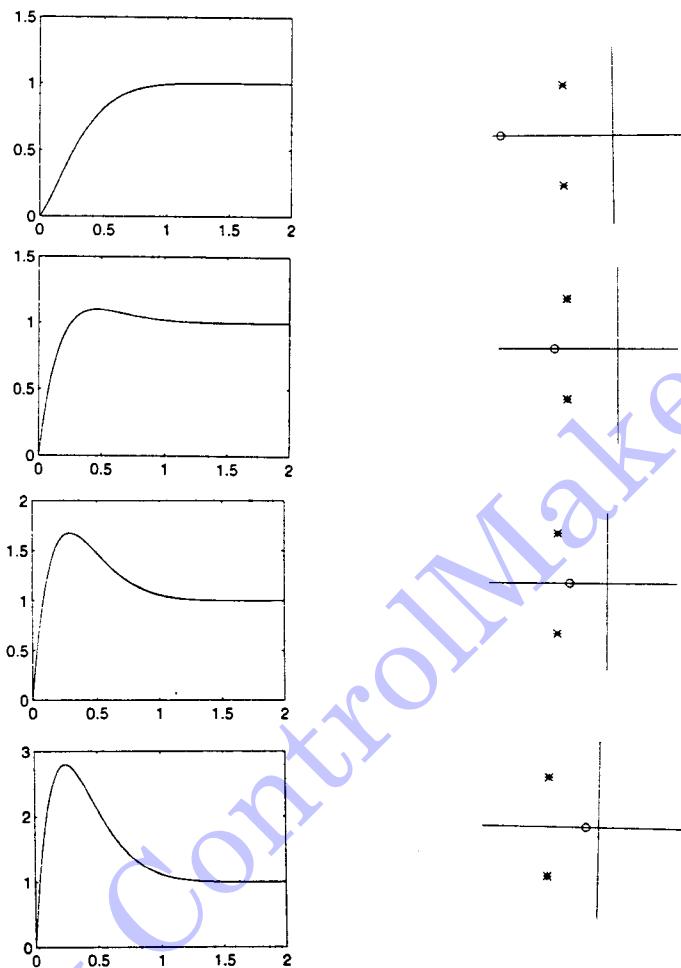
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2(s-z_1)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3-5-3)$$

را برای موقعیتهای مختلف صفر اضافه شده نشان می‌دهد. همانطور که از حالت‌های مختلف شکل ۱۸-۳ مشاهده می‌شود، اثر اضافه کردن صفر در z_1 ، حداقل فراجهش سیستم را افزایش داده و زمان صعود را کاهش می‌دهد. هم چنین مشاهده می‌گردد که اگر z_2 به سمت صفر می‌لنجد، همزمان دامنه فراجهش حداقل افزایش می‌یابد و تازمانی که z_2 مثبت باشد، سیستم در محدوده پایداری باقی خواهد ماند.

۶-۳ تحلیل خطای حالت ماندگار سیستم‌های کنترل

خطای حالت ماندگار^۱، معیاری از دقت سیستم کنترل است، هنگامیکه یک نوع خاص ورودی به آن اعمال می‌گردد. دنبال کردن ورودی مرجع توسط خروجی سیستم، از اهداف مهم سیستم است. در سیستم‌های عملی و صنعتی، به دلایل مختلفی از قبیل اصطکاک و ... خطای حالت ماندگار تقریباً هیچگاه دقیقاً صفر نمی‌شود. در مسئله طراحی، یکی از اهداف سیستم کنترل، حداقل کردن و یا نگهداشتن خطای در یک حد قابل قبول است. اندازه این حد خطای و دقت سیستم کنترل، به مقدار زیادی به ماهیت و هدف سیستم کنترل بستگی دارد. برای

۱- Steady-state error



شکل ۱۸-۳ پاسخهای سیستم مرتبه دوم بر حسب موقعیت صفر اضافه شده.

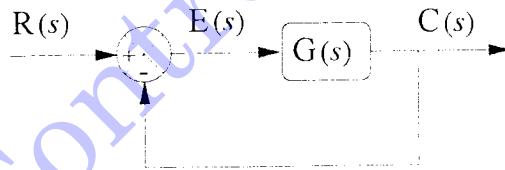
نمونه در کنترل سطح مایع یک مخزن بزرگ، خطامی تواند در حد چند سانتیمتر باشد ولی در یک سیستم کنترل روبات جوشکار و یا یک تلسکوپ بزرگ فضایی، خطأ باید در حد چند میکرو رادیان باشد. ماهیت خطأ نیز همانند مقدار آن به ماهیت و هدف سیستم کنترل بستگی خواهد داشت. برای مثال، در یک سیستم کنترل سرعت، مقدار خطای حالت ماندگار تفاضل سرعت واقعی و سرعت مطلوب بوده که بر حسب موقعیت خواهد بود. کنترل موقعیت، خطای حالت ماندگار بر حسب موقعیت خواهد بود.

۱-۶-۳ نوع سیستم

در بررسی نوع سیستم، ساختار فیدبک واحد نشان داده شده در شکل ۱۹-۳، مورد استفاده قرار می‌گیرد و نوع سیستم با توجه به تابع تبدیل حلقه - باز آن تعریف می‌گردد. اگر دیاگرام بلوکی اصلی سیستم به صورتی غیر از صورت نشان داده شده در شکل ۱۹-۳ باشد، با اعمال روش‌های جبری دیاگرام بلوکی (بخش ۲-۳-۲) دیاگرام بلوکی سیستم، به صورت فیدبک واحد تبدیل می‌شود. در حالت کلی، $G(s)$ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$G(s) = \frac{k(s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0)}{s^n(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)} \quad (1-6-3)$$

که در آن q ، m و n اعداد صحیح مثبت و a_i ، b_i غیر صفر هستند. در بسیاری از موارد می‌توان صورت و مخرج را در معادله (۱-۶-۳) به ترتیب به m و n عامل تجزیه کرد و آنها را به صورت حاصلضرب عوامل نوشت. ریشه‌های صورت و مخرج در معادله (۱-۶-۳) را به ترتیب صفرها و قطبها سیستم می‌نامیم. k بجهه ثابت و عدد صحیح $= 0, 1, 2, \dots, q$ نوع



شکل ۱۹-۳ سیستم فیدبک واحد

سیستم^۱ را نشان می‌دهد. بنابراین $= 0$ یک سیستم نوع صفر، $= 1$ یک سیستم نوع یک و $= n$ یک سیستم نوع n را نشان می‌دهد. مرتبه سیستم برابر با $= n$ است.

مثال ۱-۶-۳

سیستم‌های نشان داده شده در دیاگرام‌های بلوکی شکل ۲۰-۳ (الف) و (ب) را در نظر بگیرید. سیستم شکل ۲۰-۳ (الف) یک سیستم نوع دو مرتبه سوم است. برای تعیین نوع

۱-System type

سیستم شکل ۲۰-۳ (ب) نخست لازم است که آنرا به صورت فیدبک واحد تبدیل کنیم.
توجه کنید که

$$H(s) = \frac{3}{s+3}, \quad G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

بنابراین

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

که در آن $N(s)$ و $D(s)$ دو چند جمله‌ای در s می‌باشند. در این مثال با جایگزینی برای $G(s)$ و $H(s)$ داریم

$$D(s) = s^3 + 4s^2 + 3s + 3, \quad N(s) = s + 3$$

مطلوب است که دیاگرام بلوکی شکل ۲۰-۳ (ب) را به صورت فیدبک واحد تبدیل کنیم. با

تعريف یک تابع تبدیل معادل $G_{eq}(s)$ داریم

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_{eq}(s)}{1+G_{eq}(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

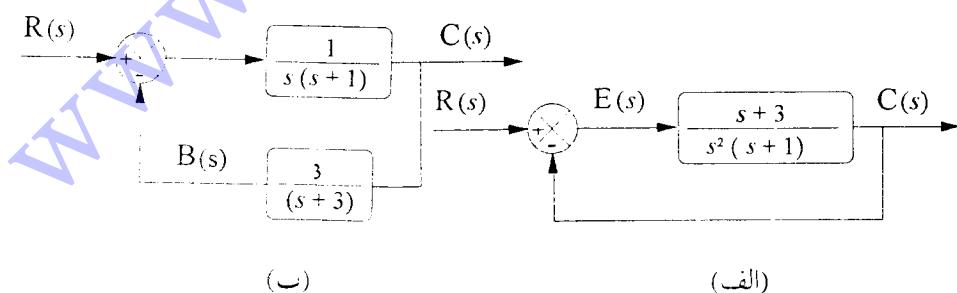
از این‌رو

$$G_{eq}(s) = \frac{N(s)}{D(s) - N(s)}$$

با جایگزینی برای $N(s)$ و $D(s)$ در این مثال بدست می‌آوریم

$$G_{eq}(s) = \frac{s+3}{s(s^2 + 4s + 3)}$$

ولذا سیستم نوع یک و مرتبه سوم است.



شکل ۲۰-۳ سیستم‌های مثال ۱-۶-۳

نکته مهم: در سیستم‌های فیدبک غیر واحد، مانند سیستم نشان داده شده در شکل ۲۰-۳ (ب)، خطای در نظر گرفته شده برای سیستم به صورت $E(s) = R(s) - C(s)$ تعریف می‌شود و حال آنکه در بعضی از کتب کنترل مانند مرجع [۳]، خطای سیستم را به صورت $E(s) = R(s) - B(s)C(s)$ تعریف می‌کنند. تحلیلهای ارایه شده در این دو حالت، تنها در صورتی معادل هستند که $H(s) = 1$ باشد.

سیستم حلقه - بسته شکل ۱۹-۳ را در نظر بگیرید. داریم

$$C(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}R(s) \quad (۲-۶-۳)$$

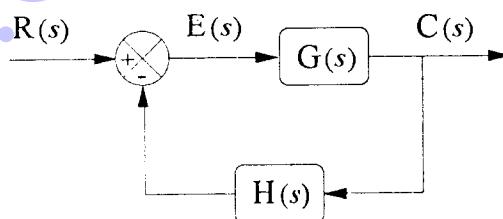
برای یک سیستم فیدبک غیر واحد نشان داده شده در شکل ۲۱-۳، داریم

$$C(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}R(s) \quad (۳-۶-۳)$$

اگر بخواهیم دیاگرام بلوکی سیستم نشان داده شده در شکل ۲۱-۳ را به صورت دیاگرام بلوکی نشان داده شده در شکل ۱۹-۳ تبدیل کنیم،تابع تبدیل حلقه - باز معادل از معادله‌های (۲-۶-۳) و (۳-۶-۳)، به صورت زیر داده می‌شود

$$\text{تابع تبدیل حلقه - باز معادل} = \frac{G(s)}{1+G(s)|H(s)-1|} \quad (۴-۶-۳)$$

اگر $H(s) = 1$ باشد، معادله (۴-۶-۳) همان معادله (۲-۶-۳) است، به طور مشابهی می‌توان به صورت داده شده در مثال ۱۹-۶-۱ نیز عمل کرد.



شکل ۲۱-۳ سیستم با فیدبک غیر واحد

۲-۶-۳ خطای حالت ماندگار

سیستم حلقه - بسته با فیدبک واحد نشان داده شده در شکل ۱۹-۳ را در نظر بگیرید، که

در آن خطای عبارتست از

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} R(s) \quad (5-6-3)$$

همانطور که از معادله (5-6-3) مشاهده می شود، خطای ورودی اعمال شده به سیستم بستگی خواهد داشت.

خطای کلی سیستم از دو قسمت تشکیل می شود: قسمت اول، خطای حالت ماندگار سیستم است که به صورت زیر نوشته می شود

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (6-6-3)$$

قسمت دوم خطای گذرا است که مستقیماً مربوط به پاسخ گذاری سیستم است، بنابراین

$$= e(t) - \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad \text{خطای گذرا} \quad (7-6-3)$$

خطای حالت ماندگار سیستم با ورودی پله: اگر به سیستم تشان داده شده در شکل ۱۹-۳ یک ورودی پله اعمال گردد، خطای حالت ماندگار سیستم از معادله های (۵-۶-۳) و (۶-۶-۳)

بسیان صورت بدست می آید

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G(s)} \frac{R}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{1+G(s)} \end{aligned} \quad (8-6-3)$$

تعريف ثابت خطای - پله^۱ به صورت

$$K_s = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \quad (9-6-3)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{R}{1+K_s} \quad (10-6-3)$$

برای یک سیستم نوع صفر K_s یک عدد ثابت است و برای سیستم های نوع یک و بالاتر

$$K_s = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty \quad (11-6-3)$$

۱- Step-error constant

بنابراین با جایگزینی این مقادیر در معادله (۱۰-۶-۳)، نتیجه می‌گیریم که خطای حالت ماندگار سیستم به ورودی پله مقدار ثابت و خطای حالت ماندگار سیستم نوع یک و بالاتر به ورودی پله برابر صفر است،

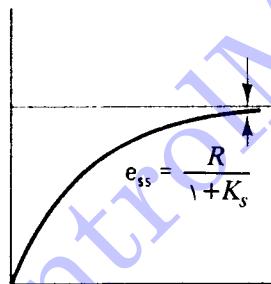
$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0. \quad (12-6-3)$$

شکل ۲۲-۳ خطای حالت ماندگار یک سیستم نوع صفر را به ورودی پله نشان می‌دهد.

مثال ۲-۶-۳

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{5}{s+3}$$



شکل ۲۲-۳ خطای حالت ماندگار ناشی از اعمال ورودی پله به سیستم نوع صفر

ثابت خطای - پله عبارتست از

$$K_s = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{5}{3}$$

ولذا خطای حالت ماندگار عبارتست از

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \frac{1}{1+5/3} = 0.375$$

توجه کنید که برای سیستم‌های نوع صفر، با بزرگ شدن ثابت خطای پله K_s ، خطای حالت ماندگار کاهش خواهد یافت. به عنوان نمونه در مثال ۲-۶-۳، با جایگزینی بهره ۱۵ در (s) به جای ۵ بسادگی می‌توان نشان داده که خطای حالت ماندگار $1/167$ خواهد شد. لیکن در حالت کلی ممکن است که افزایش K_s باعث ناپایداری سیستم نیز گردد.

خطای حالت ماندگار سیستم به ورودی شبیه: اگر به سیستم نشان داده شده در شکل

۱۹-۳ یک ورودی شیب اعمال گردد، خطای حالت ماندگار سیستم از معادله‌های (۵-۶-۳) و (۶-۶-۳) بدین صورت بدست می‌آید

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{1}{s} R}{1 + G(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{s + sG(s)} \end{aligned} \quad (13-6-3)$$

با تعریف ثابت خطای -شیب^۱ به صورت

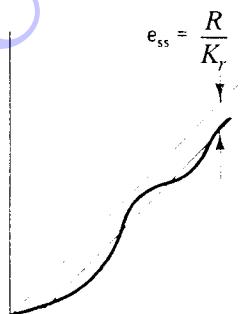
$$K_r = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \quad (14-6-3)$$

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{R}{K_r} \quad (15-6-3)$$

داریم

برای سیستم نوع صفر، معادله (۱۴-۶-۳) صفر خواهد بود و لذا خطای حالت ماندگار داده شده با معادله (۱۵-۶-۳)، بی‌نهایت است. برای سیستم نوع یک، ثابت خطای شیب_r یک عدد ثابت خواهد بود و بنابراین از معادله (۱۵-۶-۳) داریم که خطای حالت ماندگار نیز ثابت خواهد بود. برای سیستم‌های نوع بالاتر از یک، ثابت خطای شیب_r برابر بی‌نهایت است و لذا خطای حالت ماندگار صفر خواهد شد.

شکل ۲۳-۳ خطای حالت ماندگار سیستم نوع یک به ورودی شیب را نشان می‌دهد.
خطای حالت ماندگار سیستم به ورودی سهموی: اگر به سیستم نشان داده شده در شکل ۱۹-۳ ورودی سهموی اعمال گردد، خطای حالت ماندگار سیستم از معادله‌های (۵-۶-۳) و



شکل ۲۳-۳ خطای حالت ماندگار ناشی از اعمال ورودی شیب به سیستم نوع یک

(۶-۶-۳)، بدین صورت بدست می آید

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G(s)} \frac{R}{s^2} \\ = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{s^2 + s G(s)} \quad (16-6-3)$$

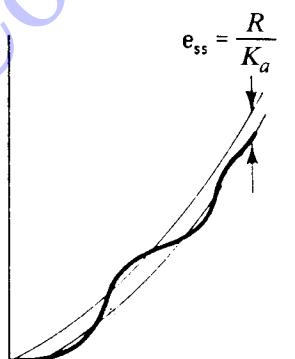
با تعریف ثابت خطای - سهموی^۱ به صورت

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) \quad (17-6-3)$$

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{R}{K_a} \quad (18-6-3)$$

برای سیستم‌های نوع صفر و نوع یک، ثابت خطای سهموی صفر می‌شود و لذا خطای حالت ماندگار بی‌نهایت می‌گردد. برای سیستم‌های نوع دو، ثابت غیر صفر می‌شود و خطای حالت ماندگار R/K_a می‌گردد. برای سیستم‌های نوع سه و بالاتر، ثابت خطای - سهموی بی‌نهایت است و لذا خطای حالت ماندگار صفر می‌گردد. شکل ۲۴-۳، خطای حالت ماندگار یک سیستم نوع دو را به ورودی سهموی نشان می‌دهد.

تحلیل ارایه شده در بالا را می‌توان برای سایر ورودیها نیز به طور مشابهی ادامه داد. در جدول ۱-۳ نتایج بدست آمده خلاصه شده‌اند.



شکل ۲۴-۳ خطای حالت ماندگار ناشی از اعمال ورودی سهموی به سیستم نوع دو.

1- Parabolic error constant

جدول ۳-۱ خطای حالت ماندگار بر حسب نوع سیستم و ورودی اعمال شده به آن

نوع سیستم	ورودی تابع پله	ورودی تابع شبیه	ورودی تابع شیب	خطای حالت ماندگار
۰	$\frac{R}{1+K_s}$		∞	∞
۱	۰	$\frac{R}{K_r}$	∞	∞
۲	۰	۰	$\frac{R}{K_a}$	∞
۳	۰	۰	۰	۰

۷-۳ اثرات فیدبک بر عملکرد سیستم‌های کنترل

در بخش‌های قبل با تحلیل عملکرد حالت گذرا و حالت ماندگار در سیستم‌های کنترل آشنا شدیم. در این بخش به بررسی اثرات فیدبک بر عملکرد سیستم‌های کنترل خواهیم پرداخت.

۱-۷-۳ اثرات فیدبک بر بهره و ثابت زمانی سیستم

سیستم مرتبه اول داده شده با تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{k}{1+\tau s} \quad (1-7-3)$$

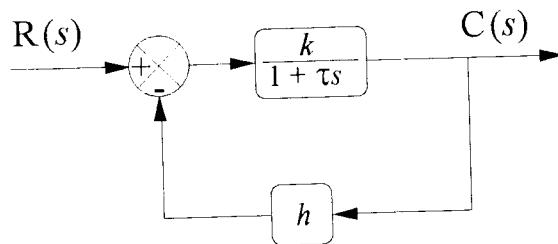
همانطور که در بخش ۳-۳-۱ اشاره شد، ثابت (τ/a) در بخش ۳-۳-۱) ثابت زمانی سیستم است و سرعت پاسخ سیستم را تعیین می‌کند. در واقع هر چه ثابت زمانی کوچکتر باشد، پاسخ سیستم سریعتر خواهد بود و لذا، در بسیاری از موقع در عمل ثابت زمانی‌های کوچکتر مطلوب‌تر می‌باشند. ثابت k نیز بهره سیستم حلقه - باز است. با بکار گیری فیدبک، سیستم حلقه - بسته نشان داده شده در شکل ۲۵-۳ بدست خواهد آمد. تابع تبدیل سیستم حلقه -

بسته عبارتست از

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} = T(s) &= \frac{k/(1+\tau s)}{1+[hk/(1+\tau s)]} \\ &= \frac{k/(1+hk)}{1+[\tau/(1+hk)]s} \end{aligned} \quad (2-7-3)$$

سیستم حلقه - بسته نیز یک سیستم مرتبه اول است که می‌تواند به صورت زیر بازنویسی گردد

$$T(s) = \frac{k_c}{1+\tau_c s} \quad (3-7-3)$$



شکل ۲۵-۳ سیستم مرتبه اول با فیدبک.

که در آن بهره سیستم و ثابت زمانی آن به ترتیب عبارتند از

$$k_c = \frac{k}{1+hk} \quad (4-7-3)$$

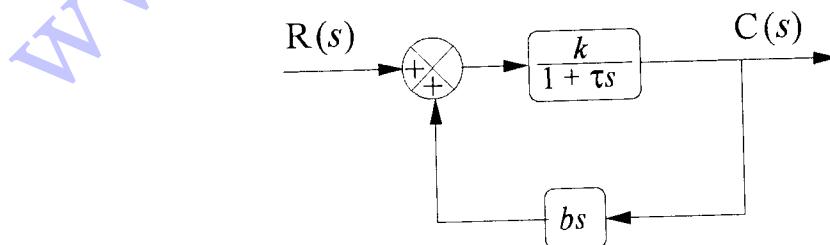
و

$$\tau_c = \frac{\tau}{1+hk} \quad (5-7-3)$$

همانطور که از معادله های (۴-۷-۳) و (۵-۷-۳) مشخص است، اثر فیدبک کوچکتر کردن بهره و ثابت زمانی سیستم است. اگر بخواهیم ثابت زمانی را کم کنیم، در حالیکه بهره سیستم تغییری نکند، می توان از سیستم فیدبک نشان داده شده در شکل ۲۶-۳ استفاده کرد. از شکل ۲۶-۳، تابع تبدیل حلقه - بسته سیستم بدست می آید. داریم

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{k}{(\tau - bk)s + 1} \\ &= \frac{k}{\tau_c s + 1} \end{aligned} \quad (6-7-3)$$

که در آن τ_c ثابت زمانی سیستم حلقه - بسته است. دقت کنید که با انتخاب b می توان ثابت زمانی را به هر مقدار مطلوب تبدیل کرد.



شکل ۲۶-۳ سیستم فیدبک مثبت با مشتق گیر

۲-۷-۳ اثر فیدبک بر اغتشاشات خارجی

نقریباً در اکثر کاربردهای عملی و صنعتی سیستم‌های کنترل، ورودی‌های خارجی و غیر قابل پیش‌بینی وارد سیستم می‌شوند که اثرات منفی نیز بر روی عملکرد سیستم بر جای خواهند گذاشت. در بعضی از این موارد، این اثرات ممکن است چندان مهم نباشند و طراحی نیازی به بررسی جداگانه آنها نداشته باشد و حال آنکه در موارد دیگری ممکن است که طراحی موفق عملی سیستم کنترل، بدون در نظر گرفتن این اثرات امکان پذیر نباشد. این ورودی‌های خارجی و غیر قابل پیش‌بینی را اغتشاشات خارجی^۱ می‌نامند و به دو صورت در سیستم رخ می‌دهند:

(الف) یک ثابت غیر صفر ثابت که آنها را اغتشاشات بار^۲ یا افست^۳ می‌نامند و (ب) یک سیگنال نویز تصادفی^۴.

شکل ۲-۷-۳ مدل اغتشاشات خارجی را نشان می‌دهد. خروجی سیستم حلقه - باز عبارتست از

$$C_0(s) = C_{10}(s) + C_{20}(s) \quad (7-7-3)$$

که در آن $C_{10}(s)$ ، آن قسمت از خروجی است که به ورودی $R(s)$ مربوط می‌باشد و برابر است با

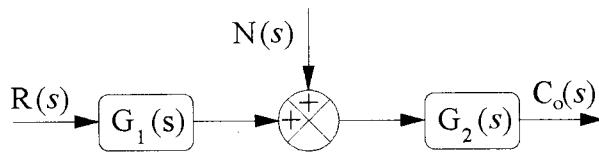
$$C_{10}(s) = G_1(s)G_7(s)R(s) \quad (8-7-3)$$

و $C_{20}(s)$ آن قسمت از خروجی است که به ورودی اغتشاش $N(s)$ مربوط می‌باشد و برابر است با

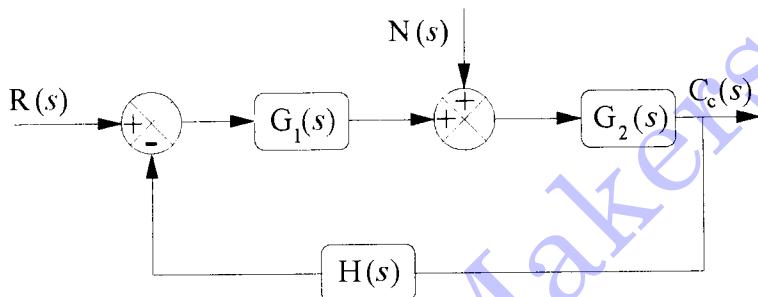
$$C_{20}(s) = G_7(s)N(s) \quad (9-7-3)$$

حال به بررسی اثر فیدبک بر سیستم نشان داده شده در شکل ۲-۷-۳ می‌پردازیم. با اعمال فیدبک بر روی این سیستم، سیستم حلقه - بسته نشان داده شده در شکل ۲-۳ را خواهیم داشت. خروجی سیستم حلقه - بسته عبارتست از

$$C_c(s) = C_{1c}(s) + C_{2c}(s) \quad (10-7-3)$$



شکل ۲۷-۳ سیستم تحت تاثیر اغتشاشات خارجی.



شکل ۲۸-۳ سیستم تحت تاثیر اغتشاشات خارجی با فیدبک.

که در آن $C_{1c}(s)$ و $C_{2c}(s)$ به ترتیب قسمتهای خروجی متناظر با ورودیهای $R(s)$ و $N(s)$ باشند و عبارتند از (توجه کنید که $C_{1c}(s)$ و $C_{2c}(s)$ به ترتیب با صفر قرار دادن $N(s)$ و $R(s)$ در دیاگرام بلوکی تعیین می‌گردند)

$$C_{1c}(s) = \frac{G_1(s)G_\gamma(s)}{1+G_1(s)G_\gamma(s)H(s)} R(s) \quad (11-7-3)$$

$$C_{2c}(s) = \frac{G_\gamma(s)}{1+G_1(s)G_\gamma(s)H(s)} N(s) \quad (12-7-3)$$

حال اگر دو خروجی را که توسط اغتشاش در سیستم حلقه - باز داده شده با معادله (۹-۷-۳) و در سیستم حلقه - بسته داده شده با معادله (۱۲-۷-۳) ایجاد شده‌اند، با هم مقایسه کنیم

$$\frac{C_{1c}(s)}{C_{2c}(s)} = \frac{1}{1+G_1(s)G_\gamma(s)H(s)} \quad (13-7-3)$$

و لذا عنصر اغتشاش در خروجی با عامل $[1+G_1(s)G_\gamma(s)H(s)]$ کم شده است، که اثر فیدبک را به خوبی نشان می‌دهد.

در سیستم‌های مخابراتی به ورودی $R(s)$ سیگنال گفته شده و یکی از مشخصه‌های مهم سیستم، نسبت سیگنال به نویز^۱ (SNR) می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\text{SNR} = \frac{\text{خروجی بر اثر سیگنال}}{\text{خروجی بر اثر نویز}} \quad (14-7-3)$$

برای سیستم حلقه - باز داریم

$$\text{SNR}_o = \frac{C_{1o}(s)}{C_{2o}(s)} = G_1(s) \frac{R(s)}{N(s)} \quad (15-7-3)$$

و برای سیستم حلقه - بسته داریم

$$\text{SNR}_c = \frac{C_{1c}(s)}{C_{\gamma c}(s)} = G_1(s) \frac{R(s)}{N(s)} \quad (16-7-3)$$

بنابراین از معادله‌های (15-7-3) و (16-7-3) مشاهده می‌شود که فیدبک به تنها برای این نسبت را تغییر نمی‌دهد. برای تغییر نسبت سیگنال به نویز نه تنها باید فیدبک اعمال کرد بلکه باید ورودی و تابع تبدیل (s) , $G_1(s)$ را نیز تنظیم کنیم. اگر همراه با فیدبک ورودی $R(s)$ را به

$\tilde{R}(s)$ و تابع تبدیل (s) , $G_1(s)$ را به $\tilde{G}_1(s)$ چنان تغییر دهیم که

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{1c}(s) &= \frac{\tilde{G}_1(s)G_\gamma(s)}{1 + \tilde{G}_1(s)G_\gamma(s)H(s)} \tilde{R}(s) \\ &= G_1(s)G_\gamma(s)R(s) = C_{1o}(s) \end{aligned} \quad (17-7-3)$$

خواهیم داشت

$$C_{\gamma c}(s) = \frac{G_\gamma(s)}{1 + \tilde{G}_1(s)G_\gamma(s)H(s)} N(s) \quad (18-7-3)$$

و نسبت سیگنال به نویز در این حالت برابر است با

$$\begin{aligned} \text{SNR}_{\tilde{c}} &= \frac{\tilde{C}_{1c}(s)}{C_{\gamma c}(s)} \\ &= \frac{G_1(s)G_\gamma(s)R(s)}{\left[G_\gamma(s)N(s) / (1 + \tilde{G}_1(s)G_\gamma(s)H(s)) \right]} \\ &= G_1(s) \frac{R(s)}{N(s)} [1 + \tilde{G}_1(s)G_\gamma(s)H(s)] \end{aligned} \quad (19-7-3)$$

از معادله‌های (۲۰-۷-۳) و (۱۹-۷-۳) داریم

$$\frac{SNR_{\tilde{C}}}{SNR_0} = \frac{1 + \tilde{G}_1(s)G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)H(s)} \quad (20-7-3)$$

بنابراین اگر فیدبک با تغییر مناسب $G_1(s)$ همراه باشد، SNR سیستم افزایش خواهد یافت.

۳-۷-۳ اثر فیدبک بر حساسیت سیستم

در طراحی کنترل کننده برای یک سیستم، معمولاً فرض می‌شود که مدل سیستم و مدل کنترل کننده طراحی شده دقیق بوده و نمایش‌های کاملی از تحقق فیزیکی و واقعی آنها هستند. این فرض، خطاهای موجود در مدل‌سازی و مراحل مختلف ساخت، و هم چنین خطاهای اندازه‌گیری را نادیده می‌گیرد. علاوه بر آن، در کلیه سیستم‌های کنترل اثرات مختلفی مانند تغییرات محیط، فرسودگی، عدم دسترسی به برخی پارامترهای سیستم و غیره موجب آن می‌گردند که همواره در صدی نامعینی^۱ در رابطه با مدل‌های در دست و طراحی شده وجود داشته باشد.

بررسی این مطالب که عملکرد سیستم به چه اندازه‌ای نسبت به بعضی از تغییرات یا خطاهای موجود در پارامترهای آن، حساس می‌باشد در طراحی سیستم‌های عملی کنترل فوق العاده مهم است. به این بزرگی، بررسی حساسیت سیستم گفته می‌شود.

در سیستم‌های حلقه - باز داریم

$$C(s) = G(s)R(s) \quad (21-7-3)$$

و لذا تغییرات احتمالی $G(s)$ و یا خطاهای مدل‌سازی تابع تبدیل مستقیماً بر خروجی آن تاثیر می‌گذراند و حال آنکه در سیستم‌های فیدبک داریم

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s) \quad (22-7-3)$$

این تغییرات و خطاهای مستقیماً بر خروجی تاثیر نمی‌گذارند. برای سیستم حلقه - بسته داده شده با معادله (۲۲-۷-۳) اگر داشته باشیم $\gg G(s)H(s)$ ، آنگاه

$$C(s) \approx \frac{1}{H(s)} R(s) \quad (23-7-3)$$

و لذا خروجی تنها از $H(s)$ تاثیر می‌پذیرد و می‌توان آنرا به گونه‌ای مناسب به طور دلخواه انتخاب نمود. البته باید توجه داشت که انتخاب $H(s)$ به گونه‌ای که $\gg G(s)H(s)$ باشد، همواره عملی نیست و در بسیاری از موارد به پاسخ نوسانی و یا حتی ناپایدار (بخش ۸-۳) می‌انجامد. در هر صورت معادله (۲۲-۷-۳) نشان می‌دهد که افزایش $G(s)H(s)$ اثر $G(s)$ و در نتیجه تغییرات آنرا بر خروجی کم می‌کند. بنابراین با فیدبک می‌توان اثر تغییرات پارامترهای سیستم حلقه - باز بر خروجی را کم کرد.

برای بررسی اثر تغییرات پارامترهای سیستم، فرض کنید که تغییر پارامترها را با $\Delta G(s)$ نشان دهیم. در این صورت تابع تبدیل واقعی سیستم عبارتست از $(G(s)+\Delta G(s))R(s)$. در سیستم حلقه - باز تغییر خروجی به صورت زیر خواهد بود

$$\Delta C(s) = \Delta G(s)R(s) \quad (24-7-3)$$

در سیستم‌های حلقه - بسته این تغییرات به صورت زیر در خروجی نشان داده خواهد شد

$$C(s) + \Delta C(s) = \frac{G(s) + \Delta G(s)}{1 + [G(s) + \Delta G(s)]H(s)} R(s) \quad (25-7-3)$$

و لذا تغییر در خروجی عبارتست از

$$\Delta C(s) = \frac{\Delta G(s)}{[1 + G(s)H(s) + \Delta G(s)H(s)][1 + G(s)H(s)]} R(s) \quad (26-7-3)$$

در اکثر مواقع داریم $(26-7-3)$ داریم $G(s)H(s) \gg \Delta G(s)H(s)$ ، و لذا از معادله (۲۶-۷-۳) داریم

$$\Delta C(s) \approx \frac{\Delta G(s)}{[1 + G(s)H(s)]} R(s) \quad (27-7-3)$$

معادله (۲۷-۷-۳) نشان می‌دهد که تغییر خروجی سیستم با عامل $[1 + G(s)H(s)]$ کاهش یافته است و این عامل در بسیاری از موارد بسیار بزرگتر از یک است. در واقع همانطور که بعداً نیز خواهیم دید، عامل $[1 + G(s)H(s)]$ نقش مهمی را در مشخصه سیستم‌های کنترل فیدبک ایفا می‌کند.

بنابر تعریف، حساسیت سیستم برابر است با نسبت درصد تغییر در تابع تبدیل سیستم حلقه - بسته به درصد تغییر در تابع تبدیل حلقه - باز، با نشان دادن تابع تبدیل حلقه - بسته به

صورت $T(s)$ در صد تغییر در تابع تبدیل حلقه - بسته عبارتست از $\Delta T(s)/T(s)$ و هم چنین در صد تغییر در تابع تبدیل حلقه - باز عبارتست از $\Delta G(s)/G(s)$. بنابراین از تعریف حساسیت سیستم داریم

$$S_G^T = \frac{\Delta T(s)/T(s)}{\Delta G(s)/G(s)} \quad (28-7-3)$$

که در آن، S_G^T تابع حساسیت است. حد معادله (۲۸-۷-۳) عبارتست از

$$S_G^T = \frac{\partial T(s)/T(s)}{\partial G(s)/G(s)} = \frac{\partial \ln T(s)}{\partial \ln G(s)} \quad (29-7-3)$$

با جایگزینی $T(s) = C(s)/R(s)$ از معادله (۲۲-۷-۳) در معادله (۲۹-۷-۳)، بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} S_G^T &= \frac{\partial T}{\partial G} \cdot \frac{G}{T} = \frac{1}{[1+G(s)H(s)]} \frac{G(s)}{G(s)/[1+G(s)H(s)]} \\ &= \frac{1}{1+G(s)H(s)} \end{aligned} \quad (30-7-3)$$

از معادله (۳۰-۷-۳) مشاهده می‌گردد که با افزایش $G(s)H(s)$ می‌توان حساسیت سیستم‌های کنترل را نسبت به تغییرات مدل سیستم حلقه - باز کم کرد.

به طور مشابهی، می‌توان نشان داد که حساسیت سیستم حلقه - بسته به تغییرات در عنصر فیدبک $H(s)$ عبارتست از

$$S_H^T = \frac{\partial T}{\partial H} \cdot \frac{H}{T} = \left(\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \right)^{-1} \frac{-H(s)}{G(s)/[1+G(s)H(s)]} \quad (31-7-3)$$

معادله (۳۱-۷-۳) نشان می‌دهد که برای $G(s)H(s) \rightarrow \infty$ $S_H^T \rightarrow 1$ و لذا در انتخاب $H(s)$ باید دقت کرد که ثابت بوده و یا تغییرات آن با محیط و سایر عوامل دیگر حداقل باشد. سرانجام، حساسیت پاسخ سیستم حلقه - بسته نسبت به تغییرات در مدل حلقه - باز $(G(s))$ را بررسی می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned} S_G^C &= \frac{\partial C(s)}{\partial G(s)} \frac{G(s)}{C(s)} = \frac{R(s)}{[1+G(s)H(s)]} \frac{[1+G(s)H(s)]}{R(s)} \\ &= \frac{1}{1+G(s)H(s)} \end{aligned} \quad (32-7-3)$$

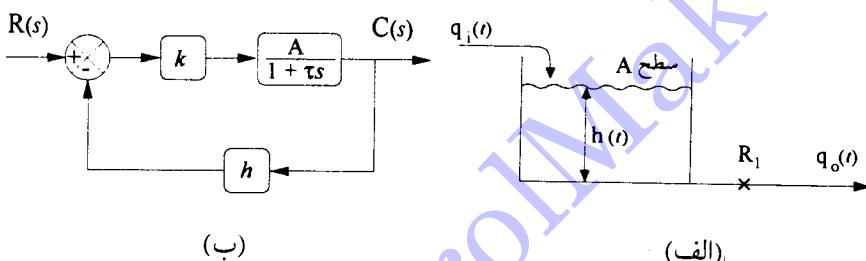
که همانند معادله (۲-۷-۳۰) است و با افزایش $G(s)H(s)$ این حساسیت کاهش می‌یابد.

مثال ۱-۷-۳

تابع تبدیل یک مخزن حاوی مایع با ورودی مایع $q_i(t)$ ، خروجی مایع $q_o(t)$ ، ارتفاع سطح مایع $h(t)$ و سطح مخزن A که در شکل ۲۹-۳ (الف) نشان داده شده است، عبارت است از

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{R_1}{A_1 R_1 s + 1}$$

که در آن R_1 مقاومت شیر خروجی مخزن است. دیگر ام بلورکی سیستم کنترل ارتفاع مایع این سیستم در شکل ۲۹-۳ (ب) نشان داده شده است. تابع تبدیل حلقه - بسته سیستم عبارت است از



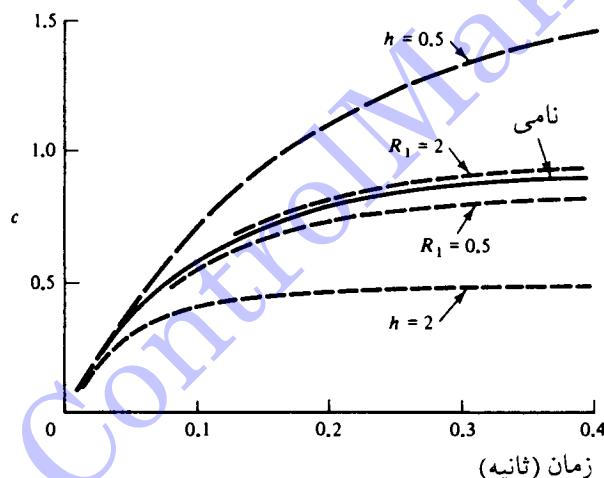
شکل ۲۹-۳ (الف) یک مخزن مایع، (ب) سیستم کنترل ارتفاع مایع

$$T(s) = \frac{kA}{\tau s + 1 + kAh}$$

که در آن $K_v = K_v R_1$ بهره شیر کنترلی است و همچنان $A, R_1, \tau = A_1 R_1 \tau$ است. بهره h در فیدبک شکل ۲۹-۳ (ب) نیز بهره حس کننده ارتفاع مایع در مخزن است. در این سیستم کنترل، بهره‌های R_1 و h به ترتیب می‌توانند به دلایل عوامل سد کننده، تنظیم غیر دقیق و خرابی حس کننده تغییر کنند. برای نشان دادن این تغییرات، پاسخ پله واحد سیستم را هنگامیکه پارامترهای R_1 و h از مقادیر نامی خود دو برابر بیشتر و نصف می‌شوند را مقایسه و حساسیت سیستم را به این تغییرات بررسی می‌کنیم. با فرض مقادیر عددی $A_1 = 1, K_v = 1, R_1 = 1$ و مقادیر نامی $h_1 = 1$ پاسخ سیستم را بر حسب پارامترهای R_1 و h برای پله واحد بدست می‌آوریم. داریم

$$c(t) = \frac{9}{9h_1 + 1/R_1} \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{9h_1 + 1}{R_1} \right) t \right] \right\}$$

شکل ۳۰-۳ پاسخ سیستم (t) را برای مقادیر نامی داده شده $R_1 = 2$ و همچنین مقادیر $h = 2$ ، $R_1 = 0.5$ و $h = 0.5$ نشان می‌دهد. با کاهش بهره h تغییرات نشان داده شده در شکل ۳۰-۳ بیشتر خواهد شد. همانطور که از شکل ۳۰-۳ مشاهده می‌گردد، تغییرات پاسخ نسبت به پاسخ نامی هنگامی که R_1 از ۱ به ۲ تغییر پیدا می‌کند کمتر از هنگامی است که R_1 از ۱ به ۰.۵ تغییر پیدا می‌کند. اگر $h = 0$ و کنترل سیستم حلقه - باز باشد، تغییرات به صورت تناسبی در مقادیر حالت ماندگار پاسخ ظاهر خواهند شد. اکنون حساسیت سیستم حلقه - بسته را نسبت به تغییر پارامترهای A ، h و τ بررسی می‌کنیم. این حساسیتها را به ترتیب با S_A^T ، S_h^T و S_τ^T نشان می‌دهیم. داریم.



شکل ۳۰-۳ تغییرات پارامترها در مثال ۳۰-۳

$$S_A^T = \frac{\partial T/T}{\partial A/A} = \frac{\partial T}{\partial A} \cdot \frac{A}{T} = \frac{A}{T} \cdot \frac{k(\tau s + 1)}{(\tau s + 1 + kAh)} = \frac{\tau s + 1}{\tau s + 1 + kAh}$$

$$S_h^T = \frac{\partial T/T}{\partial h/h} = \frac{\partial T}{\partial h} \cdot \frac{h}{T} = \frac{h}{T} \cdot \frac{-kA}{(\tau s + 1 + kAh)} = \frac{-kAh}{\tau s + 1 + kAh}$$

$$S_\tau^T = \frac{\partial T/T}{\partial \tau/\tau} = \frac{\partial T}{\partial \tau} \cdot \frac{\tau}{T} = \frac{\tau}{T} \cdot \frac{-kAs}{(\tau s + 1 + kAh)} = \frac{-\tau s}{\tau s + 1 + kAh}$$

همانطور که از معادله های بالا مشاهده می شود، حساسیتهای S_A^T و S_T^T با افزایش h کاهش یافته و حال S_h^T آنکه به سمت ۱ میل می کند.

۸-۳ تحلیل پایداری

یکی از مهمترین مشخصه های سیستم پایداری^۱ آن است. به سیستم پایدار گویند که اگر ورودی یا اختشاشات با دامنه محدود به آن اعمال گردد، پاسخ بدست آمده دامنه ای محدود داشته باشد.

تابع تبدیل سیستم را در حالت کلی زیر در نظر بگیرید

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (1-8-3)$$

رابطه بین قطبها سیستم (ریشه های معادله مشخصه داده شده در مخرج تابع تبدیل (۱-۸-۳)) و حالت گذراي سیستم مرتبه دوم را در بخش ۴-۳ بررسی کردیم. این نتایج را می توان در حالت کلی به صورت زیر بیان کرد:

۱- اگر قطبها تابع تبدیل در حوزه ζ در سمت چپ محور موهومی قرار گیرند، پاسخ گذراي سیستم میرا شونده است و با گذشت زمان به صفر میل کرده و سیستم پایدار است.

۲- چنانچه یک یا چند زوج قطب (غیر تکراری) تابع تبدیل بر روی محور موهومی قرار گیرند و سایر قطبها در سمت چپ محور موهومی باشند، پاسخ سیستم به صورت نوسانات سینوسی میران شده خواهد بود.

۳- حتی اگر تنها یک قطب تابع تبدیل در سمت راست محور موهومی قرار گیرد، دامنه پاسخ سیستم نسبت به زمان افزایش خواهد یافت و سیستم ناپایدار است.

برای بررسی پایداری سیستم می توان چند جمله ای مخرج تابع تبدیل (معادله مشخصه) را به صورت حاصلضرب فاکتورهای ریشه های آن به صورت زیر نوشت:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = k(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n) \quad (2-8-3)$$

که در آن p_1, \dots, p_n قطب‌های سیستم هستند. با بررسی این قطبها می‌توان ماهیت پایداری سیستم را تعیین نمود. در عمل محاسبه ریشه‌های چند جمله‌ای (۲-۸-۳) برای چند جمله‌ای‌های درجه بالا بسادگی امکان‌پذیر نیست. بنابراین، در این بخش به بررسی روش‌های خواهیم پرداخت که ماهیت پایداری سیستم را بدون نیاز به حل معادله مشخصه و تعیین دقیق محل قطب‌های آن، تعیین کنند. از تئوری چند جمله‌ای‌ها می‌دانیم که شرط لازم برای اینکه تمامی ریشه‌های یک چند جمله‌ای دارای قسمت حقیقی منفی باشند، آن است که اولاً تمامی ضرایب چند جمله‌ای هم علامت بوده و ثانیاً هیچ‌کدام صفر نباشند. لازم بذکر است که دو شرط فوق‌الذکر اگر چه لازم هستند لیکن کافی نمی‌باشند و ممکن است چند جمله‌ای با دارا بودن این شرایط، دارای ریشه‌هایی با قسمت حقیقی غیرمنفی باشد.

در این بخش روش‌های روث و هرویتز را برای تعیین پایداری آرایه می‌کنیم. روش‌های مکان ریشه و پاسخ فرکانسی برای تعیین پایداری در فصلهای بعد بررسی خواهند شد.

۱-۸-۳ روش روث

در این روش از آرایه روث^۱ برای تعیین پایداری استفاده می‌شود. آرایه روث با استفاده از ضرایب معادله مشخصه a_i ($i=0, 1, \dots, n$) داده شده در معادله (۱-۸-۳) تشکیل می‌شود. نحوه تشکیل این آرایه در زیر نشان داده شده است:

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	...
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	...
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	...
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3
\vdots	\vdots				
s^1	g_1				
s^0	k_1				

همانطور که مشخص است، اعداد ردیفهای اول و دوم (متناظر با s^n و s^{n-1}) از ضرایب معادله

1- Routh array

مشخصه، a_i ها، به ترتیب نشان داده شده انتخاب می‌شوند. اعداد ردیف سوم از معادله‌های

زیر بحسبت می‌آیند:

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2}-a_na_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4}-a_na_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_3 = \frac{a_{n-1}a_{n-6}-a_na_{n-7}}{a_{n-1}}$$

⋮
⋮

و اعداد ردیف چهارم زیر به صورت زیر تعیین می‌گردند:

$$c_1 = \frac{b_1a_{n-3}-b_2a_{n-1}}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1a_{n-5}-b_3a_{n-1}}{b_1}$$

$$c_3 = \frac{b_1a_{n-7}-b_4a_{n-1}}{b_1}$$

⋮

و سپس تمامی ردیفها را به همین ترتیب پر می‌کنیم. بعد از تکمیل شدن آرایه روث، می‌توان نشان داد که تعداد قطبهای سمت راست معادله مشخصه برابر با تعداد تغییر علامتها در ستون اول آرایه روث است، بنابراین تنها سیستمی پایدار است که تمامی اعداد ستون اول جدول هم علامت باشند. توجه کنید که در روش روث تنها تعداد قطبهای ناپایدار سیستم (در صورت وجود) تعیین می‌شوند و این روش قادر به تعیین موقعیت این قطبها نیست.

مثال ۱-۸-۳

چند جمله‌ای زیر را در نظر بگیرید

$$s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + 15 = 0$$

آرایه روث برای این چند جمله‌ای عبارتست از:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 11 & 15 \\ s^3 & 6 & & \\ s^2 & 10 & 15 & \\ s^1 & -3 & & \\ s^0 & 15 & & \end{array}$$

در ستون اول آرایه بالا یک تغییر علامت از 10 به -3 و تغییر علامت دیگری از -3 به 15 داریم. بنابراین این چند جمله‌ای دو ریشه در سمت راست محور موهومی دارد. لذا سیستمی که معادله مشخصه آن، چند جمله‌ای داده شده باشد بدلیل داشتن دو قطب ناپایدار، ناپایدار است.

مثال ۲-۸-۳

معادله مشخصه سیستمی عبارتست از:

$$s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + k = 0$$

که در آن k بهره سیستم است. مطلوب است که پایداری سیستم را برای تغییرات بهره k بررسی کنیم. توجه کنید که محل ریشه‌های این چند جمله‌ای به مقدار بهره ثابت k بستگی خواهد داشت. آرایه روث را برای این چند جمله‌ای تشکیل می‌دهیم. داریم

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 3 \\ s^2 & 3 & 1+k \\ s^1 & \frac{\lambda-k}{3} & \\ s^0 & 1+k & \end{array}$$

با توجه به آرایه تشکیل شده روث، برای اینکه تغییر علامتی در ستون اول آرایه رخ ندهد باید نامعادله‌های زیر را داشته باشیم

$$\lambda - k > 0, \quad 1 + k > 0$$

بنابراین برای پایداری سیستم باید داشته باشیم

$$-1 < k < \lambda$$

ساده کردن آرایه روث. اعداد سطرهای مختلف آرایه روث را می‌توان $\frac{1}{x}$ از اعداد مثبت ضرب و یا آنها را برابر اعداد مثبت تقسیم کرد و این عمل در جواب نهایی پایداری تأثیری نمی‌گذارد. با این عمل می‌توان از بزرگی اعداد و در نتیجه از حجم زیاد عملیات جبری به مقدار متناسبی کم کرد.

موارد خاص در تشکیل آرایه‌های روث. اگر در تشکیل آرایه روث در اولین ستون یک عدد صفر ظاهر شود، تکمیل آرایه روث امکان پذیر نخواهد بود زیرا در ادامه تشکیل آرایه تقسیم بر صفر لازم خواهد بود. در صورتیکه یکی از اعداد ستون اول آرایه روث صفر باشد و سایر اعداد آن سطر همگی صفر نباشند، می‌توان از یکی از دو روش زیر برای تکمیل آرایه روث استفاده کرد:

۱- در معادله اصلی بجای s ، از $\frac{1}{x}$ استفاده کنید و سپس معادله را برای x برسی و آرایه را برای چند جمله‌ای بر حسب x تشکیل دهید.

۲- معادله اصلی را در فاکتور معلوم $(s+1)$ ضرب کنید و سپس آرایه روث را برای معادله بدست آمده تشکیل دهید. این عمل ریشه شناخته شده $= -s$ را به معادله اصلی اضافه می‌کند.

مثال ۳-۸-۳

چند جمله‌ای زیر را در نظر بگیرید

$$s^4 + s^3 + 3s^2 + 3s + 6 = 0$$

آرایه روث را تشکیل می‌دهیم. داریم

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 3 & 6 \\ s^3 & 1 & 3 \\ s^2 & 0 & 6 \end{array}$$

همانطور که مشاهده می‌شود، اولین عنصر از سومین سطر صفر بوده و عنصر بعد از آن غیرصفر است. دقت کنید که ادامه تشکیل چهارمین سطر آرایه امکان پذیر نیست. با

جایگزینی $\frac{1}{x} = s$ در معادله داده شده بدست می‌آوریم

$$6x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1 = 0$$

آرایه روث برای این معادله عبارتست از

$$\begin{array}{c|ccc} x^4 & 6 & 3 & 1 \\ x^3 & 3 & 1 & \\ x^2 & -1 & 1 & \\ x^1 & -4 & & \\ x^0 & 1 & & \end{array}$$

بدیهی است که در این حالت در تشکیل آرایه روث با مشکلی مواجه نشده و در واقع از آرایه بالا مشاهده می‌شود که معادله داده شده دو ریشه ناپایدار دارد.

مثال ۴-۸-۳

چند جمله‌ای زیر را در نظر بگیرید

$$s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 6s + 2 = 0$$

اولین سه ردیف آرایه روث عبارتند از

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 2 & 2 \\ s^3 & 3 & 6 & \\ s^2 & 0 & 2 & \end{array}$$

بنابراین در سومین ردیف اولین عنصر \circ است. اگر چند جمله‌ای داده شده را در عامل $(s+1)$ ضرب کنیم داریم

$$(s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 6s + 2)(s+1) = s^5 + 4s^4 + 5s^3 + 8s^2 + 8s + 2$$

آرایه روث را برای چند جمله‌ای جدید تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 5 & 8 \\ s^4 & 4 & 8 & 2 \\ s^3 & 3 & 7/5 & \\ s^2 & -2 & 2 & \\ s^1 & 10/5 & & \\ s^0 & 2 & & \end{array}$$

از آرایه تشکیل شده داریم که به علت تغییر علامت در اولین ستون، معادله داده شده ناپایدار است و علاوه بر آن تعداد قطبهای ناپایدار آن دو می‌باشد. توجه کنید که عامل ضرب شده

نهاییک ریشه در -1 ، در سمت چپ محور موهومی در صفحه دارد و لذا دو ریشه ناپایدار، ریشه‌های معادله اصلی هستند.

دومین مورد خاص در تشکیل آرایه روث هنگامی رخ می‌دهد که کلیه عناصر یک سطر از آرایه روث صفر شوند. صفر شدن کلیه عناصر سطر، توسط جفت ریشه‌های مختلط مزدوج که قسمت حقیقی آنها لزوماً غیرصفر نیست و (یا) توسط جفت ریشه‌های حقیقی با علامتهاي مضاد بوجود می‌آيد. در صورت ایجاد یک سطر صفر در آرایه روث برای تکمیل آن می‌توان به طریق زیر عمل کرد: با استفاده از سطر قبلی (سطر مقابل سطر صفر)، یک معادله کمکی^۱ تشکیل دهید. از معادله کمکی (سطر مقابل سطر صفر) مشتق بگیرید. اعداد بدست آمده از مشتق معادله کمکی را بجای سطر صفر جایگزین کنید.

مثال ۵-۸-۳

چند جمله‌ای زیر را در نظر بگیرید

$$s^4 + s^3 + 11s^2 + 9s + 18 = 0$$

آرایه روث برای این چند جمله‌ای عبارتست از

$$\begin{array}{c|cccc} s^4 & 1 & 11 & 18 \\ s^3 & 1 & 9 \\ s^2 & 2 & 18 \\ s^1 & 0 \end{array}$$

در این آرایه سطر متناظر با یک سطر صفر است. سطر قبلی را برای سادگی محاسبات در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم و معادله سطر قبل چنین خواهد شد:

$$s^2 + 9 = 0$$

وجود یک ردیف صفر در آرایه روث نشان می‌دهد که معادله مشخصه ریشه‌هایی دارد که منفی‌های یکدیگرند.

ریشه‌های معادله کمکی عبارتند از

$$s = \pm 3j$$

این ریشه‌ها، ریشه‌های معادله اصلی نیز هستند. با توجه به موهومی محض بودن این ریشه‌ها

داریم که پاسخ سیستم، مولفه نوسانی سینوسی خواهد داشت.

برای تکمیل نمودن آرایه روث، از معادله کمکی مشتق می‌گیریم. داریم

$$2s + 0 = 0$$

ضرایب این معادله در ردیف متناظر با دبه جای ردیف صفر جایگزینی می‌شوند و لذا

$$\begin{array}{c|cc} s^1 & 2 \\ \hline s^0 & 9 \end{array}$$

بنابراین با توجه به اینکه تغییر علامتی در اولین ستون آرایه روث رخ نمی‌دهد، معادله مشخصه ریشه‌ای با قسمت حقیقی مثبت ندارد.

مثال ۶-۸-۳

چند جمله‌ای زیر را در نظر بگیرید

$$s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 9s^2 + 2s + 10 = 0$$

اولین پنج ردیف آرایه روث عبارتند از

$$\begin{array}{c|ccccc} s^5 & 1 & 3 & 2 \\ \hline s^4 & 2 & 9 & 10 \\ s^3 & -1/5 & -3 \\ s^2 & 5 & 10 \\ s^1 & 0 \end{array}$$

ردیف پنجم یک ردیف صفر است، لذا از معادله ردیف چهارم به عنوان معادله کمکی استفاده می‌کنیم. داریم

$$5s^5 + 2s^4 + 10s^3 - 10s^2 + 2s = 0$$

با مشتق گرفتن از معادله کمکی بدست می‌آوریم

$$2s + 0 = 0$$

بنابراین آرایه روث را تکمیل می‌کنیم

$$\begin{array}{c|cc} s^1 & 2 \\ \hline s^0 & 10 \end{array}$$

دو تغییر علامت در اولین ستون آرایه وجود دارد و لذا چند جمله‌ای دو ریشه ناپایدار دارد.

مثال ۷-۸-۳

چند جمله‌ای زیر را در نظر بگیرید

$$s^5 + 2s^3 + 15s^2 - 20s - 40 = 0$$

از تغییر علامت در ضرایب چند جمله‌ای می‌توان نتیجه گرفت که چند جمله‌ای داده شده ناپایدار است. با استفاده از روش روث، تعداد ریشه‌های ناپایدار تعیین می‌شوند. آرایه روث عبارتست از

s^5	۱	۱۵	-۲۰	
s^4	۲	۳۰	-۴۰	
s^3	۰			

برای تکمیل آرایه از معادله کمکی دیف دوم استفاده می‌کنیم. داریم

$$2s^4 + 3s^2 - 40 = 0 \text{ یا } s^4 + 15s^2 - 20 = 0$$

با مشتق گیری از معادله کمکی بدست می‌آوریم

$$4s^3 + 30s - 0 = 0 \text{ یا } 2s^3 + 15s - 0 = 0$$

بنابراین در ادامه آرایه روث داریم

s^3	۲	۱۵		
s^2	$15/2$	-۲۰		
s^1	$30/2$			
s^0	-۲۰			

بنابراین چند جمله‌ای داده شده تنها یک ریشه ناپایدار دارد.

۷-۸-۴ روش هرویتز

روش متداول دیگر بررسی پایداری سیستم، روش هرویتز است. در این روش a_n (اولین ضریب معادله مشخصه) مثبت فرض می‌شود. دترمینان کلی سیستم را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & \begin{matrix} a_0 \\ a_1 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{اگر } n \text{ فرد است} \\ \text{اگر } n \text{ زوج است} \end{matrix} & \dots & \dots \\ a_n & a_{n-2} & \dots & \begin{matrix} a_1 \\ a_0 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{اگر } n \text{ فرد است} \\ \text{اگر } n \text{ زوج است} \end{matrix} & \dots & \vdots \\ \dots & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & & \dots & \\ \dots & a_n & a_{n-2} & \dots & & \dots & \\ \vdots & & & & & & \\ \dots & & & & & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

دترمینان‌های دیگر را Δ_i ($i=1, 2, \dots, n-1$) را به عنوان دترمینان‌های کهاد اصلی^۱ به صورت زیر بدست می‌آوریم

$$\Delta_1 = a_{n-1}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-3} \\ \dots & a_{n-1} & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

تمامی ریشه‌های معادله مشخصه در سمت چپ محور موهومی قرار می‌گیرند و سیستم پایدار است اگر و فقط اگر $\Delta_i > 0$ ($i=1, 2, \dots, n$).

مثال ۸-۸-۳

برای معادله مشخصه

$$s^3 + 4s^2 + 1s + 12 = 0$$

دترمینان‌های سیستم را تشکیل می‌نمیم:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 192 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 16 \quad \Delta_1 = 4$$

بنابراین سیستم با این معادله مشخصه پایدار است.

مثال ۳-۸-۹

معادله مشخصه سیستمی عبارتست از

$$s^2 + ks + k - 1 = 0$$

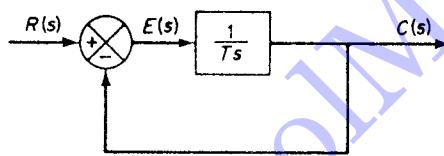
برای بررسی پایداری سیستم به روش هروتیز داریم

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 1 & k-1 \end{vmatrix} = k(k-1) \quad \Delta_1 = k$$

بنابراین، برای پایداری باید داشته باشیم $0 < k < 1$ یعنی $1 < k < k$ شرط پایداری سیستم است.

مسایل

- ۱-۳-۱. دیاگرام بلوکی نشان داده شده در شکل ۳۱-۳ را در نظر بگیرید. پاسخ سیستم را برای ورودی ضربه واحد بدست آورید و رسم کنید.



شکل ۳۱-۳ سیستم حلقه-بسته مسئله ۱-۳

۲-۳-۱.تابع تبدیل یک سیستم مرتبه دوم عبارتست از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

(الف) پاسخ ضربه واحد این سیستم را برای مقادیر مختلف $\xi = 0, 0.5, 1$ و 1.5 به

صورت تحلیلی بدست آورید. همچنین نشان دهد که پاسخهای بدست آمده

با مشتقگیری از پاسخهای متناظر برای پاسخ پله واحد نیز می‌توانستند تعیین گردند.

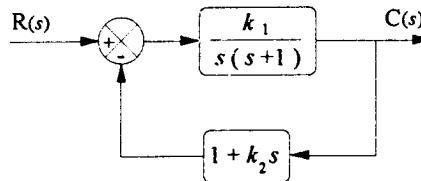
(ب) پاسخهای بدست آمده را در (الف) برای زمان ترمالیزه شده $t = \omega_n / \xi$ بر حسب $c(t)/\omega_n$

برای مقادیر ξ به ترتیب $1/10, 1/5, 1/3, 1/2, 1/10$ و $1/5$ رسم کنید.

۳-۳-۲. سیستم فیدبک نشان داده شده در شکل ۳۲-۳ را در نظر بگیرید. مقادیر بهره k_1 و k_2

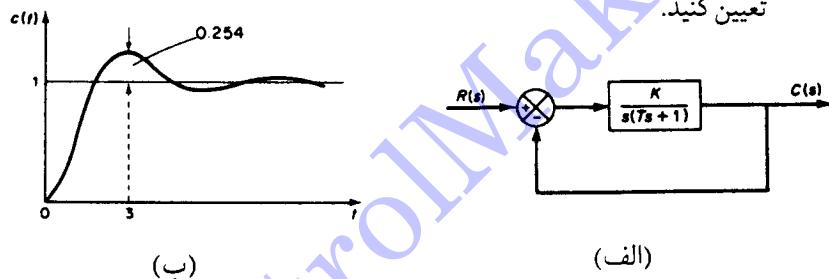
را به گونه‌ای تعیین کنید که فراجهش حد اکثر به پله واحد $2/5$ و زمان ستیغ ۱ ثانیه

باشد. با این مقادیر بهره، زمان صعود و زمان استقرار را بدست آورید.



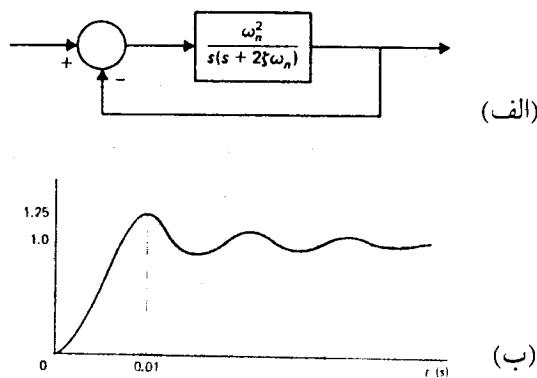
شکل ۳۲-۳ سیستم حلقه - بسته مسئله ۳-۳

خروجی سیستم نشان داده شده در شکل ۳۳-۳ (الف)، در اعمال ورودی پله واحد به صورت نشان داده شده در شکل ۳۳-۳ (ب) می باشد. مقادیر k و T را از منحنی پاسخ تعیین کنید.



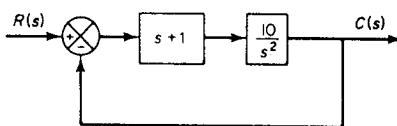
شکل ۳۳-۳ (الف) سیستم حلقه - بسته (ب) پاسخ پله واحد

دیاگرام بلوکی یک سیستم کنترل حلقه - بسته و پاسخ پله واحد آن در شکلهاي ۳۴-۳ (الف) و (ب) نشان داده شده اند. پارامترهای سیستم را تعیین کنید.



شکل ۳۴-۳ (الف) سیستم حلقه - بسته (ب) پاسخ پله واحد

۳-۶. پاسخهای حالت گذرا و حالت ماندگار سیستم حلقه - بسته نشان داده شده در شکل ۳۵-۳ را برای ورودی پله واحد بدست آورید.

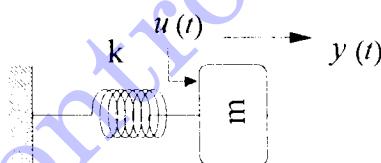


شکل ۳۵-۳ سیستم حلقه - بسته

۷-۳. تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی عبارتست از

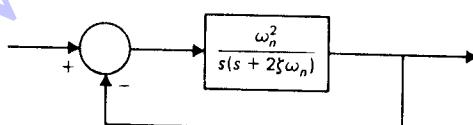
$$G(s) = \frac{1638(s^2 + 2/6s + 1/60)}{s(s^2 + 40s + 300)(s^2 + 4/60s + 0/40)}$$

قطبهای غالب و نسبت میرابی سیستم حلقه - بسته را با فیدبک واحد تعیین کنید.
۸-۳. سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل ۳۶-۳ را در نظر بگیرید. اگر به این سیستم یک ضربه واحد اعمال کردد، نوسانات حاصله را تعیین کنید.



شکل ۳۶-۳ سیستم مکانیکی مسئله ۸-۳

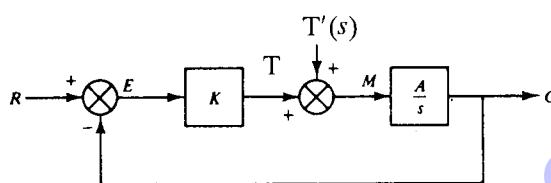
۹-۳. سیستم نشان داده شده در شکل ۳۷-۳ را در نظر بگیرید



شکل ۳۷-۳ یک سیستم حلقه - بسته

برای مقادیر پارامترهای $\omega_n = 5$ و (رادیان بر ثانیه) $\zeta = 0.4$ ، زمان صعود، زمان سُتیغ، فراجهش حد اکثر و زمان استقرار سیستم را در پاسخ به ورودی پله واحد تعیین کنید.

۱۰-۳ - سیستم کنترل سرعت نشان داده شده در شکل ۳۸-۳ را در نظر بگیرید. سیستم تحت گشتاور اغتشاشی $(s)T'$ عمل می‌کند. $(s)T$ گشتاور محرکه سیستم می‌باشد. اگر $(s)=T'$ باشد، خروجی سیستم ورودی مرجع را دنبال می‌کند. پاسخ حالت ماندگار سیستم را برای ورودی مرجع صفر و گشتاور اغتشاشی پله واحد بدست آورید.



شکل ۳۸-۳ سیستم کنترل سرعت.

۱۱-۳ - تابع تبدیل سیستمی عبارتست از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{3(s+2)}{(s+4)(s+1)^2}$$

پاسخ سیستم به ورودی پله واحد را بدست آورید.

۱۲-۳ - تابع تبدیل یک سیستم حلقه - باز عبارتست از

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

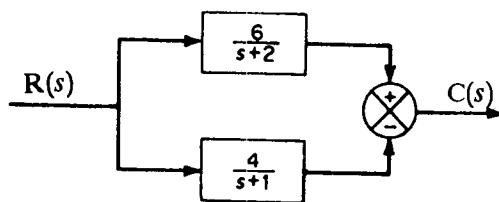
اگر به تابع تبدیل بالا، قطبها بی در $-0/2$ ، $-0/5$ ، $-1/10$ - اضافه کنیم، پاسخ سیستم حلقه - بسته با فیدبک واحد را به ورودی پله واحد بدست آورده، رسم کنید. نتایج بدست آمده را با نتایج بخش ۳-۵ مقایسه کنید.

۱۳-۳ - تابع تبدیل یک سیستم حلقه - باز عبارتست از

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

اگر به تابع تبدیل بالا، صفرها بی در $1/1$ ، $0/5$ ، $0/2$ و $-1/10$ - اضافه کنیم، پاسخ سیستم حلقه - بسته با فیدبک واحد را به ورودی پله واحد بدست آورده، رسم کنید. نتایج بدست آمده را با نتایج بخش ۳-۵ مقایسه کنید.

۱۴-۳- سیستم نشان داده شده در شکل ۳۹-۳ را در نظر بگیرید. نشان دهد که تابع تبدیل سیستم $C(s)/R(s)$ یک صفر ناپایدار دارد (به سیستمی که صفر ناپایدار داشته باشد سیستم غیر می نیم فاز^۱ گفته می شود). پاسخ سیستم را برای ورودی پله واحد بدست آورده، رسم کنید.

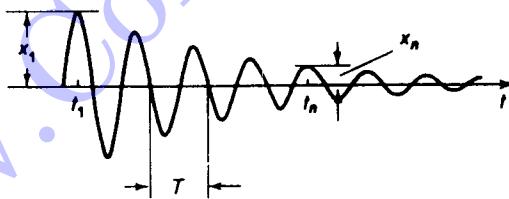


شکل ۳۹-۳ سیستم مسئله ۳-۱۴

۱۵-۳- تابع تبدیل یک سیستم نوسانی مرتبه دوم عبارتست از

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

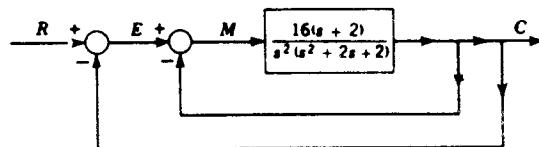
بابکارگیری نمودار پاسخ سیستم نشان داده شده در شکل ۴۰-۳، نسبت میرایی آنرا تعیین کنید.



شکل ۴۰-۳ نوسان میرا

۱۶-۳- سیستم نشان داده شده در شکل ۴۱-۳ را در نظر بگیرید. (الف) توابع تبدیل $C(s)/E(s)$ و $C(s)/R(s)$ را تعیین و نوع سیستم را مشخص کنید. (ب) ضرایب خطای

پله، شیب و سهیوی را پیدا کنید. (ج) مقدار حالت ماندگار خروجی را برای ورودی $r(t) = 10$ پیدا کنید.



شکل ۴۱-۳ سیستم متناسب ۱۶-۳

۱۷-۳- برای یک سیستم با فیدبک واحد، دوتابع تبدیل حلقه - باز زیر را در نظر بگیرید:

$$G(s) = \frac{10(s+8)}{s^2(s+5)(s^2+2s+2)} \quad \text{و} \quad G(s) = \frac{12(s+4)}{s(s+1)(s+3)(s^2+2s+10)}$$

(الف) ثابتیهای خطای پله، شیب و سهیوی را تعیین کنید.

(ب) خطای حالت ماندگار پاسخ سیستم را برای ورودیهای زیر بدست آورید:

$$r_1(t) = 5t \quad \text{و} \quad r_2(t) = 16 + 2t$$

۱۸-۳- تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم کنترل حلقه - سیستم با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{k}{s(T_1 s + T_2)}$$

خطای حالت ماندگار پاسخ به ورودی شیب واحد را تعیین و تأثیر تغییرات پارامترهای k , T_1 و T_2 را بر خطای - حالت ماندگار پاسخ بررسی کنید.

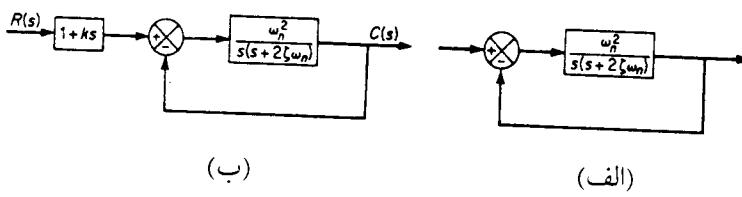
۱۹-۳- (الف) ثابتیهای خطای را برای سیستم مرتبه دوم زیر پیدا کنید.

$$G(s) = \frac{k\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

(ب) با اضافه کردن یک قطب در ω_1 تغییرات ثابتیهای خطای را بررسی کنید.

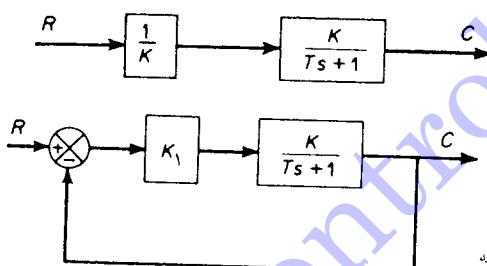
۲۰-۳- سیستم نشان داده شده در شکل ۴۲-۳ (الف) را در نظر بگیرید. (الف) نشان دهید که خطای حالت ماندگار به ورودی شیب واحد $\frac{2t}{\omega_n}$ است. (ب) با انتخاب مناسب k و

ضرب کردن ورودی در عامل $(1+ks)$ به صورت نشان داده شده در شکل ۴۲-۳ (ب)، نشان دهد که می‌توان خطای حالت ماندگار را صفر کرد.



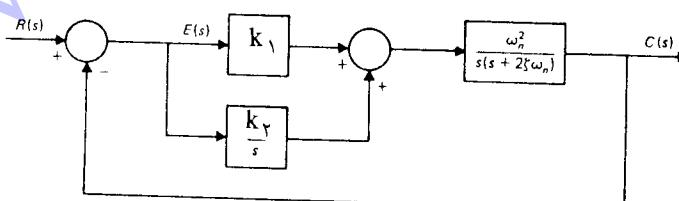
شکل ۴۲-۳ (الف) سیستم کنترل حلقه - بسته (ب) سیستم کنترل حلقه - بسته با عامل افزوده شده

۲۱-۳. سیستم کنترل حلقه - باز و حلقه - بسته نشان داده شده در شکل‌های ۴۳-۳ (الف) و (ب) را در نظر بگیرید. خطای حالت ماندگار را با فرض $k_1 k$ خیلی بزرگتر از یک، برای ورودی پله واحد مقایسه کنید.



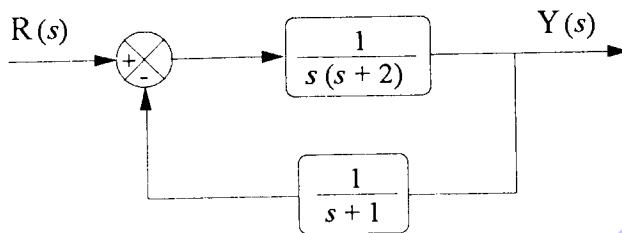
شکل ۴۳-۳ (الف) سیستم حلقه - باز
(ب) سیستم حلقه - بسته

۲۲-۳. سیستم کنترل نشان داده شده در شکل ۴۴-۳ را در نظر بگیرید. (الف) برای $k_1 = 0$ ، خطای حالت ماندگار را به ورودی پله با دامنه R بدست آورید. (ب) برای $k_1 \neq 0$ ، خطای حالت ماندگار را به ورودی پله با دامنه R بدست آورید. (ج) خطای حالت ماندگار را برای ورودی شبیه $R(t) = Rt$ بدست آورید.



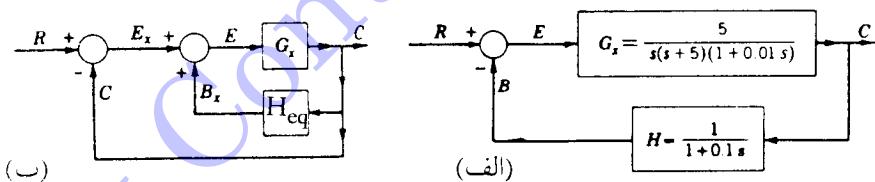
شکل ۴۴-۳ سیستم کنترل حلقه - بسته مسئله ۲۲-۳

۲۳-۳. خطای حالت ماندگار $C(s)-R(s)$ سیستم نشان داده شده در شکل ۴۵-۳ را برای ورودی شبیب بدست آورید.



شکل ۴۵-۳ سیستم کنترل فیدبک غیر واحد.

۲۴-۳. سیستم کنترل فیدبک غیر واحد نشان داده شده در شکل ۴۶-۳ (الف) را در نظر بگیرید. برای تحلیل خطای مطلوب است که سیستم را به شکل فیدبک نشان داده شده در شکل ۴۶-۳ (ب) تبدیل کنیم. (الف) تابع تبدیل $(s)H_{eq}$ را به گونه‌ای پیدا کنید که دو دیاگرام بلوکی معادل باشند. (ب) نوع سیستم نشان داده شده در شکل ۴۶-۳ (ب) را تعیین کنید. (ج) ضرایب خطای سیستم را بدست آورید. (د) خطاهای حالت ماندگار سیستم، $(t)e_{ss}(t)$ و $(t)C_{eq}$ را برای ورودی یله واحد بدست آورید.



شکل ۴۶-۳ (الف) سیستم کنترل فیدبک غیر واحد (ب) سیستم کنترل معادل.

۲۵-۳. مسئله ۲۴-۳ را با جایگزینی تابع تبدیل $H(s)=\frac{s+3}{s+1}$ در مسیر فیدبک نشان داده شده در شکل ۴۶-۳ (الف) تکرار کنید.

۲۶-۳. تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم کنترل حلقه - بسته با فیدبک واحد عبارتست از

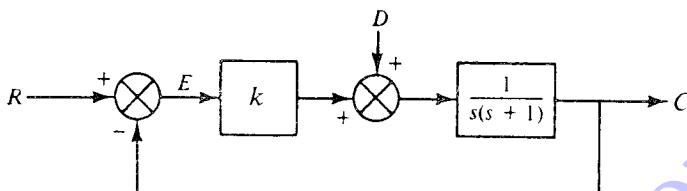
$$G(s) = \frac{k}{s(s+1)(0.05s+1)}$$

که در آن $r(t)=3e^{-3t}$ (الف) برای $k=3$ خطای حالت ماندگار را بدست آورید. (ب)

مطلوب است که خطای حالت ماندگار سیستم برای ورودی شبک کمتر یا مساوی

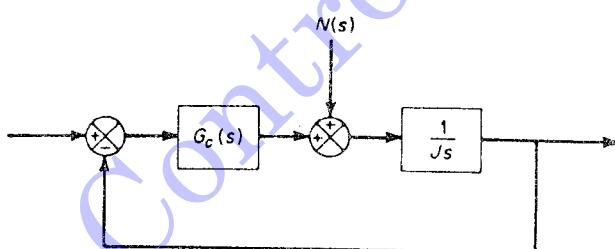
باشد. مقدار می نیمم k را برای برآورده ساختن این شرط تعیین کنید.

۲۷- سیستم نشان داده شده در شکل ۴۷-۳ را در نظر بگیرید. اثر k بر اغتشاش واردہ به سیستم چیست؟



شکل ۴۷-۳ سیستم کنترل مسئله ۲۷-۳

۲۸- سیستم کنترل نشان داده شده در شکل ۴۸-۳ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل $G(s)$ را به گونه‌ای انتخاب کنید که اغتشاش $N(s)$ مدل شده توسط پله واحد، حداقل اثر را بر روی عملکرد سیستم داشته باشد.

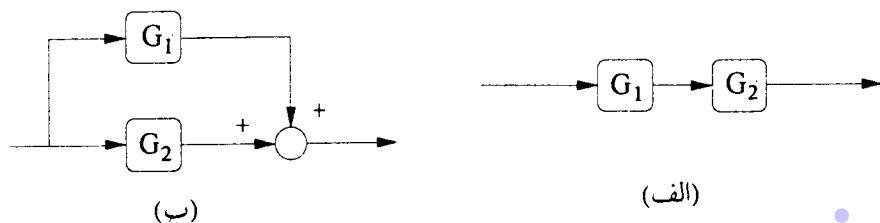


شکل ۴۸-۳ سیستم کنترل مسئله ۲۸-۳.

۲۹- حساسیت تابع تبدیل حلقه - باز $G(s)$ را نسبت به تغییرات در پارامتر τ برای $G(s)=e^{-\tau s}\hat{G}(s)$

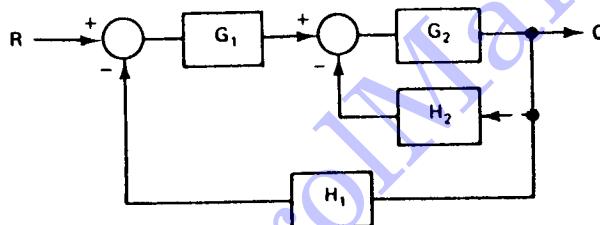
پیدا کنید.

۳۰-۳- حساسیت سیستم‌های نشان داده شده در شکل ۴۹-۳ (الف) و (ب) را برای تغییرات پارامتر p در حالت‌های (۱) p در $G_1(s)$ و (۲) p در $G_2(s)$ ، پیدا کنید.



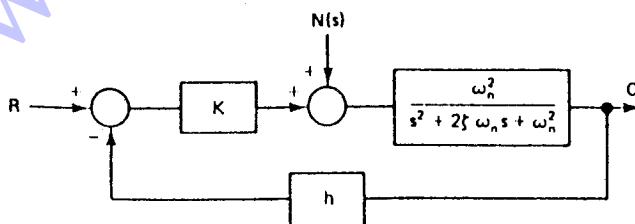
شکل ۴۹-۳ (الف) سیستم سری (ب) سیستم موازی

۳۱-۳. دیاگرام بلوکی نشان داده شده در شکل ۵۰-۳ را در نظر بگیرید. حساسیت سیستم حلقه - بسته را برای تغییرات p در تابع تبدیل $G_1(s)$ بدست آورید.



شکل ۵۰-۳ دیاگرام بلوکی مسئله ۳۱-۳.

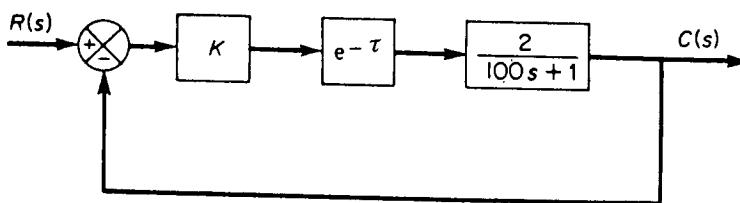
۳۲-۳. سیستم کنترل نشان داده شده در شکل ۵۱-۳ را در نظر بگیرید. (الف) حساسیت سیستم حلقه - بسته را به تغییرات در پارامترهای k , ω_n و ζ پیدا کنید. (ب) اثرات اغتشاش را برای سیستم حلقه - باز ($h=0$) و حلقه - بسته تعیین و مقایسه کنید.



شکل ۵۱-۳ سیستم کنترل مسئله ۳۲-۳

۳۳-۳. سیستم نشان داده شده در شکل ۵۲-۳ را در نظر بگیرید. حساسیت سیستم حلقه

بسته را نسبت به تغییرات در زمان تاخیر τ بدست آورید.



شکل ۳-۲-۳ سیستم فیدبک مسئله ۵۲-۳

۳۴-۳ با بکارگیری معیار روث، تعداد ریشه‌های ناپایدار چند جمله‌ای‌های زیر را تعیین کنید:

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + s + 5 = 0 \quad (\text{الف})$$

$$s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 2s + 2 = 0 \quad (\text{ب})$$

$$s^3 - 4s^2 - 7s + 1 = 0 \quad (\text{ج})$$

$$s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 9s^2 + 2s + 1 = 0 \quad (\text{د})$$

$$s^3 + 3s^2 + s + 3 = 0 \quad (\text{ه})$$

$$s^4 + s^3 + s^2 + s + 2 = 0 \quad (\text{و})$$

۳۵-۳ با بکارگیری معیار روث، گستره پایداری را برای تغییرات k در چند جمله‌ای‌های زیر

تعیین کنید:

$$s^3 + 3ks^2 + (k+3)s + 5 = 0 \quad (\text{الف})$$

$$s^3 + 1/4s^2 + s + k = 0 \quad (\text{ب})$$

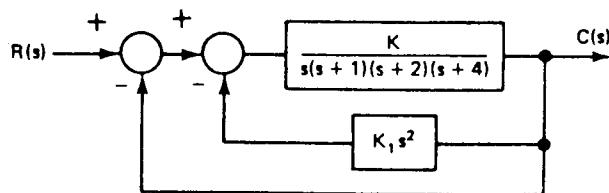
۳۶-۳ تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{k \left(1 - \frac{T}{\tau} s \right)^2}{s \left(1 + \frac{T}{\tau} s \right)^2}$$

پایداری سیستم حلقه - بسته را به ازاء تغییرات بهره k و ثابت T بررسی کنید.

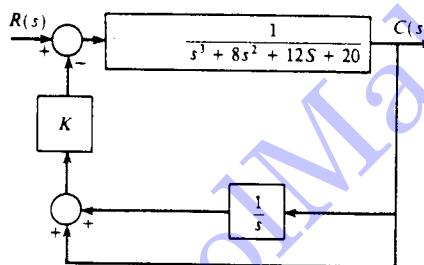
۳۷-۳ سیستم کنترل نشان داده شده در شکل ۳-۵۳ را در نظر بگیرید. محدوده پایداری را

برای سیستم حلقه - بسته بر حسب k و τ بدست آورید.



شکل ۳-۳ سیستم حلقه - بسته مسئله ۳۷-۳

۳۸-۳. سیستم کنترل نشان داده شده در شکل ۳-۴ را در نظر بگیرید. محدوده پایداری را برای سیستم حلقه - بسته به ازاء بهره k بدست آورید.



شکل ۳-۴ سیستم حلقه - بسته مسئله ۳۸-۳

۳۹-۳. تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{k(2s+1)}{s^4 + 8s^3 + 12s^2 + 20}$$

وروودی اعمال شده به سیستم $r(t) = 1 + t$ می باشد. (الف) مطلوب است که برای داده شده خطای حالت ماندگار کمتر یا مساوی ۱/۰ باشد. حداقل بهره k که این مقدار را برآورده می سازد، پیدا کنید.

(ب) با بکارگیری معیار روث پایداری سیستم را برای بهره بدست آمده در (الف) بررسی کنید.

۴۰-۳. پایداری معادله های زیر را با استفاده از روش هرویتز بررسی کنید.

$$s^4 + 4s^3 + 4s^2 + 8s + 16 = 0 \quad (\text{الف})$$

$$s^3 + 8s^2 + 14s + 24 = 0 \quad (\text{ب})$$

$$s^3 + 5s^2 + 8s + 5 + k = 0 \quad (\text{ج})$$

مراجع فصل سوم

- [3-1] Frank, P. M., *Introduction to system sensitivity Theory*, Academic press, 1981.
- [3-2] Trimmer, J. D. *Response of physical systems*, Wiley, NewYork, 1969.
- [3-3] Singh, V., *Comments on the Routh-Hurwitz criterion*, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-26, pp.612, 1981.
- [3-4] Porter B., *Stability criteria for linear dynamical systems*, Academic press, NewYork, 1968.
- [3-5] Krishnamurthi V., *Implications of Routh stability criteria*, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-25, pp. 559-595, 1980.
- [3-6] Khatwani, K. J., *On Routh-Hurwitz criterion*, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-26, pp 583-584, 1981.
- [3-7] Pillai, S. K., *On the ϵ -Method of the Routh-Hurwitz criterion*, IEEE Trans. Autom. Control, Vol AC-26, pp.584, 1981.
- [3-8] Bongionro J. J., Jr, *A recursive algorithm for computing the partial fraction expansion of rational functions having multiple poles*, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-29, pp 650-652, 1984.
- [3-9] Davison E. J., *A method for simplifying linear dynamical systems*, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-11, pp-93-101, 1966.
- [3-10] Hisa T. C., *On the simplification of linear systems*, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC. 17, pp 372-374, 1972.
- [3-11] Vidyasagar M., *On undershoot and non-minimum phase zeros*, IEEE Trans. Autom. Control Vol AC-31, pp 440, 1986.
- [3-12] Gantmacher F. R., *The theory of matrices*, Chelsea Publishing Company, 1960.

کتاب شناسی

پاسخ سیستم‌های کنترل به ورودیهای استاندارد را می‌توان مستقیماً از حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم بدون استفاده از تبدیل لاپلاس بدست آورد. برای این نحوده برخورده با بررسی پاسخهای حالت گذرا و حالت ماندگار به مرجع [1] مراجعه نمایید. پاسخ گذرای سیستم‌های مرتبه سوم و بالاتر را می‌توان در مرجع [2] پیدا کرد. در مراجع [1], [2], [3] و [4] مثالهای عملی از سیستم‌های مرتبه دوم آورده شده‌اند. در محاسبه پاسخ حالت گذرا با استفاده از تابع تبدیل در حوزه s باید تابع تبدیل را به صورت کسرهای متواالی تبدیل کرد. روش‌های محاسبه ماندها در کسرهای متواالی در این کتاب مورد بررسی قرار نگرفته‌اند، برای اطلاعات بیشتر به مراجع [1] تا [4] و [6] مراجعه شود. یک مقاله تخصصی در زمینه سطح کسرهای جزبی، مرجع [3-8] از مراجع همین فصل است.

همانطور که در این فصل اشاره شده است، بسیاری از سیستم‌های صنعتی را می‌توان به صورت توابع تبدیل مرتبه دوم و یا مرتبه اول نمایش داد. یک راه ساده سازی مدل یک سیستم مرتبه بالاتر، تعیین قطبهای غالب و غیر غالب و حذف قطبهای غیر غالب آن می‌باشد. در مراجع [3] و [4]، بطور مختصر ساده سازی سیستم‌ها مورد بحث قرار گرفته است. برای بررسی بیشتر می‌توان به مراجع [3-9] و [3-10] همین فصل مراجعه کرد. در ارتباط با مشخصه‌های پاسخ گذرای سیستم‌های مرتبه دوم مانند زمان صعود به مرجع [25] نیز مراجعه نمایید.

اگر سیستمی دارای صفر ناپایدار باشد آنرا، غیر می‌نیمم فاز نامیده و رفتار حالت گذرای آن با یک سیستم می‌نیمم فاز (سیستمی که تمامی صفرهای آن پایدار می‌باشند) متفاوت است. این پدیده در مرجع [3-11] مفصلًاً مورد بررسی قرار گرفته است. بررسی پاسخ سیستم‌های فیزیکی به طور مفصل در [3-2] آمده است.

بکارگیری فیدبک برای کاهش اثر اغتشاشات خارجی و حساسیت بخوبی در [2], [4], [5], [12] و [25] بحث شده است. برای بررسی بیشتر حساسیت در سیستم‌های کنترل به مرجع [3-1] همین فصل مراجعه شود.

خطاهای در تحلیل سیستم کنترل نقش مهمی دارند و به همین دلیل در تمامی کتابهای کنترل کلاسیک، مفصلًاً مورد بحث قرار گرفته‌اند. نکته قابل توجه این است که خطای حالت ماندگار

در سیستم‌های کنترل با فیدبک غیر واحد خطای بین خروجی سیستم و ورودی مرجع است و در برخی از منابع کنترل کلاسیک خطای بین خروجی بلوک در مسیر فیدبک و ورودی مرجع به عنوان خطای تلقی گردیده است. در این کتاب و اکثریت کتابهای کنترل کلاسیک حالت اول در نظر گرفته شده است، لیکن در مراجعی مانند [5] حالت دوم در نظر گرفته شده است. برای مطالعه بیشتر در مورد خطای سیستم‌های کنترل با فیدبک غیر واحد به مرجع [1] مراجعه شود همچنین در [25] این نکته در تعریف خطای مورد بحث قرار گرفته است و تأثیر آن بر روش تعریف نوع سیستم و خطای حالت ماندگار آورده شده است. نوع سیستم در این مرجع به خوبی تعریف و برای ردبایبی و ورودیهای اغتشاشی تعریف شده است.

بررسی پایداری به روشهای مختلفی امکان‌پذیر است. علاوه بر روش روث و هروتیز می‌توان از روش کسرهای متوالی¹ نیز نامبرد. این روش در مرجع [6] آمده است. برای برخوردن با حالت خاص اولین عنصر در یک سطر از آرایه روث می‌توان از روش² استفاده کرد، که در مراجع [3] و [4] آمده است. توجه کنید که روش² در مواجه با معادلاتی که ریشه‌های موقتی محض دارند ممکن است که پاسخ درستی ندهد. روش روث برای پایداری در مراجع [3-3]، [3-5]، [3-6]، [3-7] مفصلًاً بحث شده است. برای بررسی کلی تر پایداری به مرجع [3-4] همین فصل مراجعه شود. اثبات ریاضی روشهای روث و هروتیز در مرجع [3-12] آمده است.



۲

مکان ریشه

اهداف فصل:

- ۱- آشنایی با ایده مکان ریشه.
- ۲- شرایط دامنه و زاویه: دو خاصیت اساسی مکان ریشه.
- ۳- ارایه قواعد ترسیم مکان ریشه برای رسم دقیق تر و سریعتر مکان ریشه.
- ۴- آشنایی با مسیرهای ریشه و رسم آن.

۱-۴ مقدمه

همانطور که در فصل سوم نشان داده شد، مشخصه اصلی رفتار حالت - گذرای یک سیستم حلقه - بسته به موقعیت قطبهای حلقه - بسته آن بستگی دارد. اگر سیستم یک بهره متغیر و قابل تنظیم داشته باشد، موقعیت قطبهای حلقه - بسته با تغییر و تنظیم این بهره، تغییر خواهد گرد. بنابراین، طراح سیستم کنترل باید از روند تغییرات قطبهای حلقه - بسته با تغییر بهره آن اطلاع داشته باشد. برای پیدا نمودن این روند و یا تعیین قطبهای حلقه - بسته می‌توان، معادله مشخصه سیستم حلقه - بسته را حل کرد. لیکن حل معادله مشخصه برای سیستم‌های مرتبه سوم و بالاتر، مشکل و نیازمند بکارگیری نرم‌افزارهای مناسب است. علاوه بر آن، با تغییر بهره باید تمامی محاسبات انجام شده را برای تعیین قطبهای حلقه - بسته دوباره انجام داد.

از نقطه نظر طراحی نیز ممکن است با تغییر بهره سیستم به مشخصه‌های مطلوب عملکرد رسید، در اینصورت طراحی تنها تغییر بهره به گونه‌ای است که محل قطبها در مکانهای مطلوب از قبل تعیین شده باشد. اگر با این تغییر بهره نتوانیم به مشخصه‌های مطلوب عملکرد سیستم حلقه - بسته دست پیدا کنیم، باید از روش‌های جبران سازی که در فصل ششم ارایه می‌شوند، استفاده کنیم.

یک روش بسیار ساده ترسیمی برای تعیین محل ریشه‌های معادله مشخصه به ازاء تغییرات بهره، توسط و. رایانتر^۱ ارایه شده است. این روش که مکان ریشه^۲ نامیده می‌شود، به طور وسیعی در مهندسی کنترل کاربرد پیدا کرده است. در این روش، مکان ریشه معادله مشخصه برای کلیه مقادیر یک پارامتر سیستم رسم می‌شوند. ریشه‌های متناظر با یک مقدار خاص از این پارامتر را می‌توان بر روی نمودار حاصله تعیین کرد، در عمل این پارامتر غالباً بهره حلقه - باز سیستم است، لیکن هر پارامتر دیگری از سیستم نیز می‌تواند باشد. به طور خلاصه می‌توان گفت که مکان ریشه، نموداری از ریشه‌های معادله مشخصه یک سیستم حلقه - بسته به صورت تابعی از بهره سیستم حلقه - باز است.

معادله مشخصه یک سیستم حلقه - بسته با عنصر غیر واحد (s) در مسیر فیدبک و تابع تبدیل حلقه - باز $G(s)$, معادله $H(s) = G(s) + H(s) = 1$ است. ایده اصلی روش مکان ریشه آن

است که مقادیری از ω_n که ریشه معادله مشخصه می‌باشند، این معادله را برآورده می‌سازند. در واقع، قطب‌های سیستم حلقه - بسته (مشخص کننده‌های پاسخ حالت - گذرا)، با صفرها و قطب‌های $G(s)H(s)$ و بهره حلقه - باز ارتباط مستقیم دارند.

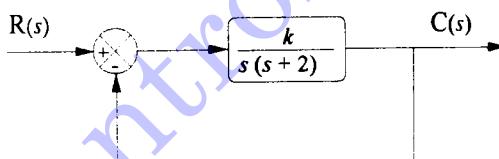
۲-۴ رسم ریشه‌های معادله مشخصه

برای درک بهتر روش مکان ریشه، سیستم کنترل حلقه - بسته نشان داده شده در شکل ۱-۴ را در نظر بگیرید.تابع تبدیل سیستم حلقه - بسته عبارتست از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} \quad (1-2-4)$$

$$= \frac{k}{s^2 + 2s + k} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

که در آن $\omega_n = \sqrt{k}$ و $\xi = 1/\sqrt{k}$ نیز بهره ثابت سیستم حلقه - باز است که از ۰ تا ∞ تغییر می‌کند.



شکل ۱-۴ یک سیستم کنترل حلقه - بسته

$$\text{ریشه‌های معادله مشخصه سیستم حلقه - بسته عبارتند از} \quad (2-2-4)$$

$$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-k}$$

با بکارگیری معادله (۲-۲-۴) می‌توان ریشه‌های حلقه - بسته را به ازاء کلیه تغییرات پارامتر بهره k تعیین کرد. برای $k=0$ ریشه‌ها عبارتند از $s_1 = -2$ و $s_2 = 0$ که همان قطب‌های حلقه - باز سیستم هستند. برای $k=1$ ریشه‌های سیستم حلقه - بسته هر دو در -1 خواهند بود. بنابراین برای $k < 0$ ، ریشه‌ها حقیقی و بر روی محور حقیقی منفی به ترتیب بین -2 و 0 تا -1 و 0 تا -1 قرار دارند. برای بهره‌های بزرگتر از 1 ، $s_1 = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\xi^2} = -1 \pm j\sqrt{k-1}$

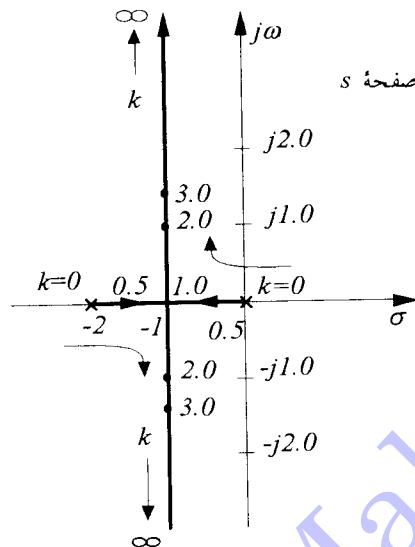
$$s_{1,2} = \sigma \pm j\omega_d = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\xi^2} = -1 \pm j\sqrt{k-1} \quad (3-2-4)$$

اگر ریشه‌های معادله مشخصه $0 = +2s + k$ بسته باشد اور داشته باشند، می‌توان آنها را بر حسب k رسم نمود. جدول ۱-۴، ریشه‌های حلقه - بسته را برای مقادیر مختلفی از بهره حلقه - باز k نشان می‌دهد. در شکل ۲-۴ نیز این ریشه‌ها بر حسب k رسم شده‌اند. با رسم یک منحنی بین نقاط تعیین شده، دو شاخه بسته باشند می‌آید که تمامی ریشه‌های معادله مشخصه را به ازاء تغییرات k بین 0 تا ∞ دربرمی‌گیرد. به این منحنیهای بسته آمده نمودار مکان ریشه معادله (۱-۲-۴) می‌گویند. با بسته آوردن این نمودار می‌توان (در صورت امکان) ریشه‌های مطلوب معادله مشخصه را بر روی آن تعیین کرد و بهره‌ای که این ریشه‌ها را بسته می‌دهد محاسبه نمود. با تعیین ریشه‌های مطلوب، پاسخ حالت - گذرا را نیز می‌توان پیش‌بینی کرد. در این مثال ساده که ایده مکان ریشه را بخوبی نمایش می‌دهد، پیدا کردن و رسم ریشه‌های معادله مشخصه به ازاء تغییرات k بسادگی امکان‌پذیر است. توجه کنید که برای سیستم‌های مرتبه بالاتر تشکیل جدولی مانند ۱-۴ و نموداری مانند شکل ۲-۴، در عمل بسیار مشکل است. لذا در این فضای روش‌های ترسیمی را از این خواهیم نمود که کار رسم نمودار مکان ریشه را بسیار ساده می‌کنند. از نرم‌افزارهای موجود کنترلی مانند Matlab و CC نیز می‌توان برای رسم دقیق این نمودارها کمک حست.

در این کتاب و در اکثر کاربردهای عملی، مقدار بهره k مثبت فرض شده است. البته k می‌تواند مقادیر منفی نیز اختیار کند که در آن صورت معادله (۱-۲-۴) تنها مقادیر حقیقی خواهد داشت. توجه کنید که با انتخاب هر k منفی، سیستم حلقه - بسته یک ریشه مثبت (ناپایدار) خواهد داشت.

k	s_1	s_2
0	0	$-2/0$
$0/5$	$-0/293$	$-1/707$
$0/75$	$-0/5$	$-1/5$
$1/0$	$-1/0$	$-1/0$
$2/0$	$-1/0+j1/0$	$-1/0-j1/0$
$3/0$	$-1/0+j1/414$	$-1/0-j1/414$
$50/0$	$-1/0+j7/0$	$-1/0-j7/0$

جدول ۱-۴ ریشه‌های معادله مشخصه $0 = +2s + k$ برای مقادیر مختلف k



شکل ۴-۴ نمودار کلیه ریشه‌های معادله مشخصه $0 = s^3 + 2s^2 + 2s + k$ برای $k < \infty$ ، مقادیر مشخص شده‌اند.

با بدست آوردن مکان ریشه، می‌توان تغییر در عملکرد سیستم را نسبت به تغییر در بهره k تعیین کرد. برای روشنتر کردن این مطلب به سیستم در نظر گرفته شده در شکل ۱-۴ توجه کنید. همانطور که از معادله (۳-۲-۴) مشخص است، تابع تبدیل حلقه - بسته سیستم برای $k > 1$ عبارتست از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{(s-\sigma-j\omega_d)(s-\sigma+j\omega_d)} \quad (4-2-4)$$

- با توجه به تعاریف بخش ۳-۴، شکل ۳-۴ نسبت میرایی چند قطب را نشان می‌دهد. با تحلیل مکان ریشه می‌توان نتایج زیر را برای این سیستم به ازاء افزایش بهره آن استنتاج نمود:
۱. افزایش بهره موجب کاهش نسبت میرایی $\frac{C(s)}{R(s)}$ و در نتیجه افزایش فرا جهش پاسخ است.
 ۲. افزایش بهره موجب افزایش فرکانس طبیعی میرانشده ω_n می‌شود.
 ۳. افزایش بهره موجب افزایش فرکانس طبیعی میرانشده ω_d می‌شود.
 ۴. افزایش بهره تأثیری بر نرخ صفر شدن پاسخ (σ) نخواهد داشت. (توجه کنید که این مطلب برای سیستم‌های مرتبه بالاتر صادق نیست).

۵. سیستم به ازاء کلیه مقادیر بهره از ۰ تا ∞ همواره پایدار است.

۳-۴ خواص اساسی مکان ریشه

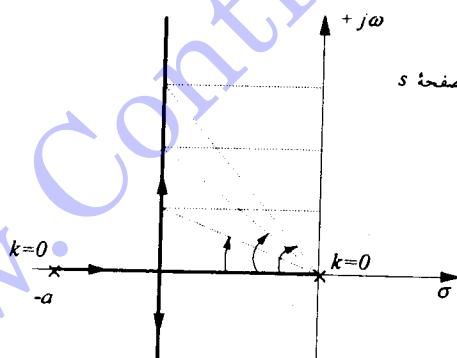
تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم با قطب‌های p_1, \dots, p_n و صفرهای z_1, \dots, z_m عبارتست

$$G(s) = \frac{k(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} \quad (1-3-4)$$

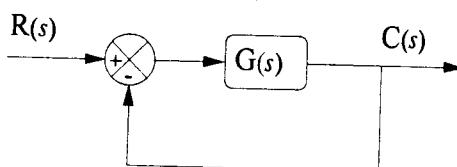
سیستم حلقه - بسته نشان داده شده در شکل ۴-۴ را در نظر بگیرید. بهره k قابل تنظیم است، قطبها و صفرهای سیستم حلقه - بسته به مقدار k و همچنین قطبها و صفرهای $G(s)$ در معادله (۱-۳-۴) بستگی دارد. تابع تبدیل سیستم حلقه - بسته عبارتست از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{A(s)}{B(s)} \quad (2-3-4)$$

که در آن $A(s)$ و $B(s)$ به ترتیب چند جمله‌ای صفر و قطب سیستم حلقه - بسته هستند. این چند جمله‌ایها، صفرها و قطبها سیستم را بست می‌دهند. ریشه‌های چند جمله‌ای قطب،



شکل ۳-۴ مشخصه‌های یک سیستم کنترل مرتبه دوم از نمودار مکان ریشه.



شکل ۴-۴ سیستم فیدبک واحد

در معادله

$$B(s) = 1 + G(s) = 0 \quad (3-3-4)$$

صدق می‌کنند و به ازاء مقادیر که معادله (۳-۳-۴) را برآورده می‌سازند، داریم

$$G(s) = -1 \quad (4-3-4)$$

مقادیر که معادله (۴-۳-۴) را برآورده می‌سازند، مکان ریشه سیستم حلقه - بسته هستند. توجه کنید که این معادله به ازاء تمام مقادیر بهره صادق است.

شرط دامنه از معادله (۴-۳-۴) داریم

$$|G(s)| = 1 \quad (5-3-4)$$

به معادله (۴-۳-۵)، شرط دامنه گفته می‌شود. اگر تابع تبدیل $G(s)$ را به صورت زیر بنویسیم

$$G(s) = k G'(s) \quad (6-3-4)$$

که در آن تابع تبدیل $(s) G'$ ، بهره متغیر k را شامل نمی‌شود، آنگاه از معادله (۴-۳-۴) داریم

$$G'(s) = -\frac{1}{k} \quad (7-3-4)$$

و یا

$$|G'(s)| = \frac{1}{|k|} \quad -\infty < k < \infty \quad (8-3-4)$$

معادله (۸-۳-۴) صورت دیگری از شرط دامنه است. همچنین از معادله (۱-۳-۴)، شرط دامنه می‌دهد

$$\frac{\prod_{i=1}^m |s+z_i|}{\prod_{j=1}^n |s+p_j|} = \frac{1}{|k|} \quad -\infty < k < \infty \quad (9-3-4)$$

شرط زاویه: با توجه به ماهیت مختلط $(s) G$ ، معادله (۴-۳-۴) برای $k \geq 0$ می‌دهد

$$\angle G(s) = \pm 180^\circ (2k+1) \quad (10-3-4)$$

که در آن $k = 0, 1, 2, \dots$ و برای $k > 0$ ، داریم

$$\angle G(s) = \pm 36^\circ k \quad (11-3-4)$$

که در آن $k=0, 1, 2, \dots$ همچنین از معادله (۱-۳-۴)، داریم

$$\angle G(s) = \sum_{i=1}^m \angle(s+z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s+p_j)$$

$$= \begin{cases} \pm(2k+1)\pi & k \geq 0 \\ \pm 2k\pi & k < 0 \end{cases} \quad (12-3-4)$$

بنابراین برای هر نقطه‌ای در صفحه Δ که بر روی مکان ریشه یک سیستم قرار دارد، مجموع زوایا از صفرها به آن نقطه منتهای مجموع زوایا از قطبها به آن نقطه، باید معادله (۱۲-۳-۴) را برآورده سازد که شرط زاویه 1 نامیده می‌شود.

در عمل شرایط بدست آمده در معادله‌های (۱-۳-۴) یا (۵-۳-۴) یا (۶-۳-۴) یا (۷-۳-۴) و یا (۸-۳-۴) یا (۹-۳-۴) یا (۱۰-۳-۴) یا (۱۱-۳-۴) یا (۱۲-۳-۴)، هر کدام نقش خاصی را در ترسیم کامل مکان ریشه ایفاء می‌کنند. شرط زاویه را برای تعیین مکان ریشه در صفحه Δ بکار خواهیم بست. شرط دامنه را پس از رسم مکان ریشه، برای تعیین مقادیر بهره k ، استفاده خواهیم نمود. ترسیم مکان ریشه یک مسئله ترسیمی است که با بکارگیری قواعد ترسیم بدست آمده از شرایط زاویه، حل خواهد شد. اساس و شروع این ساختار ترسیمی نیز از قطبها و صفرهای حلقه - باز سیستم است که از معادله (۱-۳-۴) بدست آمده‌اند.

مثال ۱-۳-۴

تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی عبارتست از

$$G(s) = \frac{k(s+5)}{s(s+1)(s+8)}$$

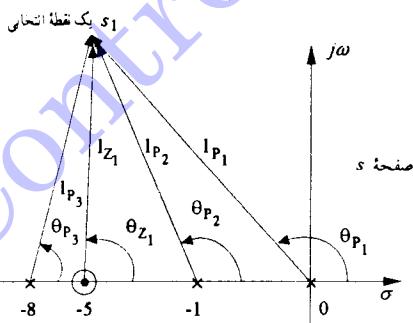
توجه کنید که تابع تبدیل داده شده ممکن است به صورت نوشته شده در معادله (۱-۳-۴) نباشد. در این حالت نخست باید آن را به صورت داده شده با معادله (۱-۳-۴) تبدیل کنیم. به عنوان مثال، ممکن است تابع تبدیل بالا به صورت زیر باشد

$$G(s) = \frac{k(1+0/\sqrt{2}s)}{s(1+s)(1+0/\sqrt{2}\omega s)}$$

که باید آن را به صورت معادله (۱-۳-۴) تبدیل کرد. قطبها و صفرهای اینتابع تبدیل به ترتیب با علامتهای \times و \odot در شکل ۵-۴ در صفحه ۵-۴ نشان داده شده‌اند. اگر یک نقطه مانند s را در صفحه s انتخاب کنیم، برای اینکه این نقطه بر روی مکان ریشه این سیستم قرار گیرد، باید در دو شرط زاویه و دامنه صدق کند. اگر همانطور که در شکل ۵-۴ نشان داده شده است، زوایای قطبها به نقطه انتخابی و صفرها به این نقطه را به ترتیب با θ_{p_1} و θ_{z_1} نشان دهیم (توجه کنید که براساس قرارداد، زوایا در جهت خلاف عقربه ساعت، مثبت در نظر گرفته می‌شوند) و فاصله این نقطه از قطبها و صفرها را به ترتیب با $|p_1|$ و $|z_1|$ نشان دهیم، از شرایط زاویه داریم

$$\theta_{z_1} - \theta_{p_1} - \theta_{p_2} - \theta_{p_3} = \begin{cases} \pm(1+2k)\pi & k \geq 0 \\ \pm 2k\pi & k < 0 \end{cases}$$

که در آن $k=0, 1, 2, \dots$. این شرط باید توسط کلیه نقاط صفحه s که بر مکان ریشه قرار گرفته‌اند، برآورده گردد. با این شرط می‌توان این نقاط را تعیین کرد. همچنین اگر نقطه‌ای این شرط را برآورده سازد، بر روی مکان ریشه قرار خواهد داشت و از شرط دامنه، می‌توان مقدار بهره k در آن نقطه را تعیین نمود. برای شرط دامنه داریم



شکل ۵-۴ تشکیلات قطب - صفر برای تابع تبدیل مثال ۱-۳-۴.

$$|k| = \frac{|s_1| |s_1 + 1| |s_1 + 8|}{|s_1 + 5|} = \frac{l_p l_p l_{p_3}}{l_z}$$

همانطور که از مثال ۱-۳-۴ مشاهده می‌شود، مراحل اصلی ترسیم کامل مکان ریشه عبارتند از:

۱. تعیین کلیه نقاطی در صفحه s که شرط زاویه را برآورده می‌سازند.
۲. تعیین مقادیر k در نقاط مختلف بر روی مکان ریشه با استفاده از شرط دامنه.

بدیهی است که روش سعی و خطای در تعیین نقاطی در صفحه «که شرط زاویه را برآورده می‌سازند، برای یک سیستم ساده کاری دشوار و برای سیستم‌های مرتبه بالاتر عملأً غیرممکن می‌شود. پیشنهاد دهنده روش مکان ریشه (ایوانز)، برای ترسیم مکان ریشه و سیله‌ای به نام اسپاپرول^۱ را طراحی کرده است که توسط آن جمع و تفیریق کردن زوایای بودارها را تا حدی سریعتر انجام می‌داد. اگر چه این سیله به ترسیم مکان ریشه سرعت بخشد، لیکن با وجود آن نیز ترسیم کامل مکان ریشه کاری وقت‌گیر و طولانی است. به این دلیل دسته‌ای از قواعد با استفاده از شرایط زاویه و دامنه ارایه گردیده‌اند که با بکارگیری آنها رسم مکان ریشه بسیار سر راست و ساده است. امروزه با بکارگیری کامپیوتراهای دیجیتال و نوشتمن نرم‌افزارهای مناسب براساس این قواعد، می‌توان با سرعت زیادی مکان ریشه سیستم‌های بسیار پیچیده را سریعاً بدست آورد و طراحیهای مختلفی را براساس روش مکان ریشه بسادگی انجام داد.

۴-۴ قواعد ترسیم مکان ریشه

در این بخش قواعدی را ارایه خواهیم کرد که با بکارگیری آنها می‌توان، مکان ریشه سیستم را به طور کامل ترسیم نمود. این قواعد براساس رابطه بین قطبها و صفرهای $(s+G)$ و (s) معادله مشخصه (قطبهای سیستم حلقه - بسته) $G+1$ ، بنا نهاده شده‌اند.

قاعده ۱: تعداد شاخه‌های مکان ریشه

یک شاخه^۲ مکان ریشه، مکان یک ریشه به ازاء تغییرات Δ بین $-\infty$ و $+\infty$ است. درجه معادله مشخصه داده شده با معادله $(3-4)$ برابر n است و لذا n ریشه دارد. بنابراین تعداد شاخه‌های مکان ریشه یک سیستم برابر با درجه چند جمله‌ای مشخصه آن (تعداد قطبها حلقه - باز) سیستم است.

مثال ۱-۴-۴

تعداد شاخه‌های مکان ریشه معادله مشخصه داده شده در زیر

$$s(s+1)(s+3)(s+4)+k(s+1)(s+3)=0$$

چهار است، زیرا معادله درجه چهارم است. معادله چهار ریشه دارد و لذا چهار شاخه مکان ریشه وجود خواهد داشت.

قاعده ۲: مکان ریشه بر روی محور حقیقی

به مکان قطبها و صفرها در شکل ۶-۴ توجه کنید. یک نقطه انتخابی مانند s_1 را بر روی محور حقیقی در نظر بگیرید. نکات زیر از شکل ۶-۴ بسادگی مشاهده می‌شوند:

(الف). جمع زوایای بدست آمده از قطبها و یا صفرهای مختلط برابر 360° است. به عبارت دیگر

$$\theta_{p_5} + \theta_{p_4} = 360^\circ$$

ولذا قطبها و یا صفرهای مختلط (s) بر توزیع مکان ریشه بر روی محور حقیقی تأثیر نخواهد گذاشت.

(ب). تنها آن دسته از قطبها و یا صفرهای حقیقی (s) که در سمت راست ω قرار دارند، به مجموع زوایا سهمی خواهند افزود و در واقع سهم زاویه قطبها و یا صفرهای حقیقی که در سمت جیب ω قرار دارند، برابر صفر است. به عبارت دیگر

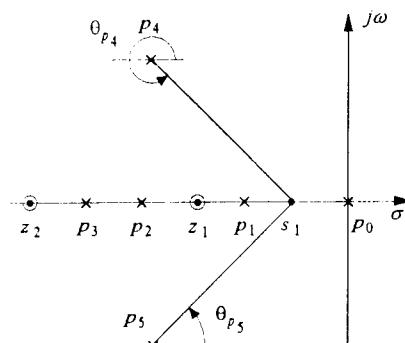
$$\theta_{p_+} = \theta_z = \theta_{p_-} = \theta_{p_r} = \theta_{z_r} = 0, \quad \theta_{p_0} = 180^\circ$$

ولذا با جایگزینی در معادله (۶-۳-۴) داریم

$$180^\circ + 0^\circ + 360^\circ = 3 \times 180^\circ$$

که نشان می‌دهد، اگر روی مکان ریشه قرار دارد.

در حالت کلی می‌توان نتیجه گرفت که اگر تعداد قطبها و صفرهای حقیقی در سمت راست نقطه انتخابی فرد باشند، آن نقطه بر روی مکان ریشه قرار دارد و در غیر اینصورت جزئی نز



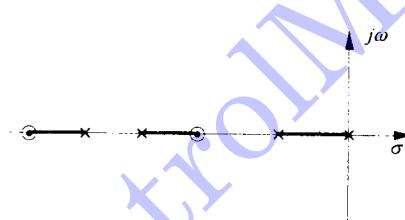
شکل ۶-۴: زوایای قطبها و صفرها به نقطه انتخابی s_1

مکان ریشه نمی‌باشد. مکان ریشه برای قطبها و صفرهای شکل ۴-۶ بر روی محور حقیقی، در شکل ۷-۴ نشان داده شده است.

قاعده ۳: نقاط شروع و پایانی مکان ریشه از معادله (۴-۳) داریم

$$|G'(s)| = \frac{1}{|k|}$$

با به سمت صفر میل دادن بهره k ، $|G'(s)|$ به سمت بینهایت میل خواهد کرد و لذا δ به سمت قطبها (یا $G(s)$ میل می‌کند. بنابراین $k=0$ ، یا شروع مکان ریشه، قطبها (یا $G(s)$ است. همچنین با به سمت بینهایت میل دادن بهره k ، $|G'(s)|$ به سمت صفر میل خواهد کرد و لذا δ به سمت صفرهای (یا $G(s)$ میل می‌کند. بنابراین $k=\pm\infty$ ، یا نقاط پایانی مکان ریشه، صفرهای (یا $G(s)$ است.



شکل ۷-۴ مکان ریشه بر روی محور حقیقی.

مثال ۴-۴

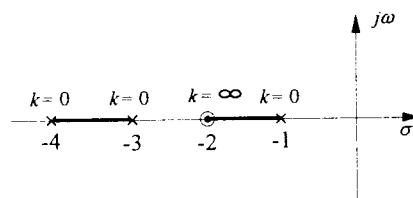
تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید:

$$G(s) = \frac{k(s+2)}{(s+1)(s+3)(s+4)}$$

معادله مشخصه سیستم حلقه - بسته عبارتست از
 $(s+1)(s+3)(s+4)+k(s+2)=0$

برای $k=0$ ، ریشه‌های معادله عبارتند از $s=-1$ ، $s=-3$ و $s=-4$. این سه ریشه، قطبها سیستم حلقه - باز می‌باشند. همچنین برای ∞ ، معادله مشخصه حلقه - بسته را می‌توان با $k(s+2)$ تقریب زد. ریشه این معادله $s=-2$ است که صفر تابع تبدیل حلقه - باز است. باید توجه داشت که برای سیستمی با تابع تبدیل گویا، تعداد قطبها و صفرهای آن با در نظر گرفتن

قطبهای و صفرها در بی‌نهایت برابر هستند. بنابراین مکان ریشه این سیستم به ازاء $k = \infty$ ، به نقاط -2 ، 0 و ∞ خواهد شد. شکل ۸-۴ نقاط شروع و یکی از نقاط پایانی مکان ریشه این سیستم را نشان می‌دهد.



شکل ۸-۴ نقاط متناظر با $k = 0$ و $k = \infty$ مکان ریشه سیستم مثال ۸-۴-۴

قاعده ۴: مجانبهای مکان ریشه برای $s \rightarrow \infty$ ترسیم مکان ریشه با مشخص نمودن رفتار مکان ریشه به ازاء $s \rightarrow \infty$ و یا به عبارت دیگر مشخص نمودن مجانبها^۱ که توسط شاخه‌های مختلف برای $s \rightarrow \infty$ دنبال می‌شوند، بسیار ساده‌تر می‌شود. داریم

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{k(s+z_1)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} = \frac{k}{s^{n-m}} = +1 \quad (1-4-4)$$

از معادله (۱-۴-۴) در حد $s \rightarrow \infty$ بدست می‌آوریم

$$-k = s^{n-m} \quad (2-4-4)$$

از آنجاییکه شرایط زاویه و دامنه باید برای $s \rightarrow \infty$ نیز برآورده گردند، داریم

$$|k| = |s^{n-m}| \quad (3-4-4)$$

$$\angle -k = \angle s^{n-m} = (1+2k)180^\circ \quad (4-4-4)$$

از معادله (۴-۴-۴) داریم

$$(n-m)\angle s = (1+2k)180^\circ \quad (5-4-4)$$

ولذا معادله (۵-۴-۲) می دهد که برای $\omega \rightarrow \infty$ ، زاویه شاخه عبارتست از

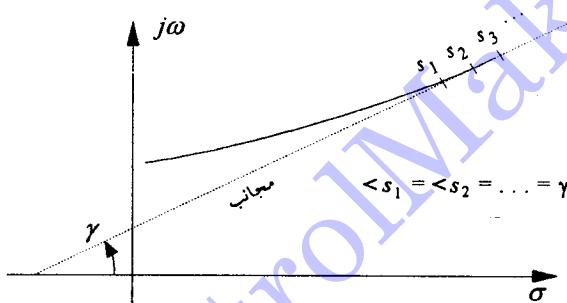
$$\angle s = \frac{(1+2k)\pi}{n-m} \quad (6-4-4)$$

بنابراین در حالت کلی تعداد $n-m$ مجانب در مکان ریشه وجود دارد که زوایای آنها با محور حقیقی از معادله زیر بدست می آیند:

$$\gamma = \frac{(1+2k)\pi}{n-m} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (7-4-4)$$

[عدد صفرهای محدود $G(s)$] - [عدد قطبهای محدود $G(s)$]

با استفاده از معادله (۷-۴-۴)، همانطور که در شکل ۹-۴ مشاهده می شود، تمامی مقادیر s در حد $\omega \rightarrow \infty$ بر روی مکان ریشه زوایای یکسان خواهند داشت.



شکل ۹-۴ شرط مجانبی برای مقادیر بزرگ s

قاعده ۵: نقطه تلاقی مجانبها با محور حقیقی

محاذ تلاقی مجانبها مکان ریشه، بر روی محور حقیقی فوار دارد و نقطه تلاقی آنها از رابطه زیر بدست می آید:

$$\sigma_c = \frac{\sum_{i=1}^m [G(s_i) - \text{قطبهای محدود}]}{n-m} \quad (8-4-4)$$

از آنجائیکه قطبها و صفرهای $G(s)$ حقیقی یا مختلط مزدوج هستند، قسمتهای موهومی در معادله (۸-۴-۴) همواره یکدیگرند را حذف خواهند کرد. لذا عبارات معادله (۸-۴-۴) را می توان با قسمتهای حقیقی قطبها محدود $G(s)$ و قسمتهای حقیقی صفرهای محدود $G(s)$ جایگزین کرد.

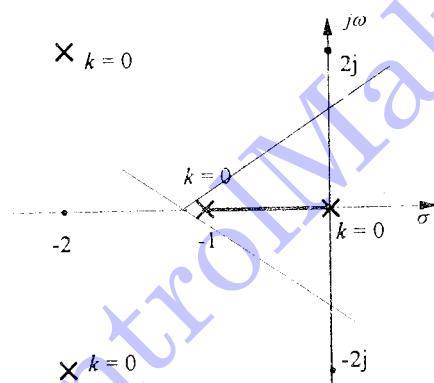
مثال ۳-۴-۲

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s^2 + 4s + \lambda)} \quad (k > 0)$$

معادله مشخصه سیستم حلقه - بسته عبارتست از
 $s(s+1)(s^2 + 4s + \lambda) + k = 0$

تشکیلات قطب - صفر (s) در شکل ۱۰-۴ نشان داده شده است. از پنج قاعده بالا می‌توان اطلاعات زیر را در رابطه با مکان ریشه سیستم بدست آورد:



شکل ۱۰-۴ اطلاعات مکان ریشه برای مثال ۳-۴-۲

۱. تعداد ساخه‌های مکان ریشه برابر با $n=4$ است.

۲. نقاط شروع مکان ریشه از قطب‌های حلقه باز، متناظر با $k=0$ و نقاط پایانی متناظر با $k=\infty$ در چهار صفر در بی‌نهایت قرار دارند (این تابع تبدیل صفر محدود ندارد).

۳. تنها گستره بین 0 و -1 بر روی محور حقیقی جزو مکان ریشه است. توجه کنید که تعداد قطبها در سمت راست این گستره یک است.

۴. مکان ریشه چهار مجانب خواهد داشت. زوایای این مجانبهای عبارتند از

$$\gamma = \frac{(1+2k)180^\circ}{4} \quad k=0, 1, 2, 3$$

ولذا

$$\gamma = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$$

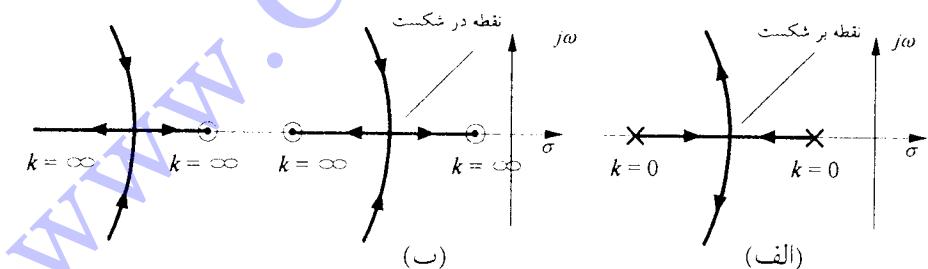
۵. نقطه تلاقی این مجذبها بر روی محور حقیقی به صورت زیر است

$$\sigma = -\frac{\omega}{4}$$

قاعده ۶: نقاط شکستگی بر روی مکان ریشه

شاخه‌های مکان ریشه از قطب‌های حلقه - باز متناظر با $= k$ شروع می‌شوند و در صفرهای محدود یا نامحدود حلقه - باز متناظر با $= \infty$ خاتمه می‌یابند. حالتی را در نظر بگیرید که مکان ریشه بین دو قطب حقیقی شاخه داشته باشد، همانطور که در شکل ۱۱-۴ (الف) نشان داده شده است. بدینهی است که باید نقطه‌ای بین دو قطب بر روی محور حقیقی وجود داشته باشد که شاخه‌ها از محور حقیقی جدا شده و به محدوده مختلط صفحه Δ وارد شوند و به سمت صفرهای سیستم حلقه - باز حرکت کنند. همچنین برای دو صفر محدود یا یک صفر محدود و یک صفر نامحدود، همانطور که در شکل ۱۱-۴ (ب) نشان داده شده است، شاخه‌ها از محدوده مختلط صفحه Δ باید بر نقاطهای بر روی محور حقیقی وارد شده و به سمت صفرها حرکت کنند. به این نقاط به ترتیب نقاط در شکست^۱ و نقاط بر شکست^۲ گفته می‌شود.

در حالت کلی، مکان ریشه ممکن است بیش از یک نقطه بر شکست یا در شکست داشته باشد. همچنین این نقاط لزوماً همواره بر روی محور حقیقی قرار ندارند و ممکن است که در ناحیه مختلط صفحه Δ نیز وجود داشته باشند. از آنجاییکه مکان ریشه، حالت متقارنی نسبت به محور حقیقی دارد (کلیه ریشه‌ها به صورت مختلط مزدوج رخ می‌دهند) این نقاط در محدوده مختلط صفحه Δ باید به صورت جفت‌های مختلط مزدوج باشند.



شکل ۱۱-۴ نقاط خروج و ورود بر روی محور حقیقی

می‌توان نشان داد که نقاط برشکست یا درشکست بر روی مکان ریشه معادله مشخصه $1+kG_1(s)=0$ ، باید معادله زیر را براورده سازند

$$\frac{dG_1(s)}{ds} = 0 \quad (9-4-4)$$

توجه کنید که معادله $(9-4-4)$ یک شرط لازم ولی غیرکافی را برای محاسبه نقاط برشکست یا درشکست بدست می‌دهد. به عبارت دیگر هر کدام از این نقاط باید معادله $(9-4-4)$ را براورده سازند، لیکن کلیه نقاطی که معادله $(9-4-4)$ را براورده می‌سازند، لزوماً نقاط برشکست یا درشکست نمی‌باشند. برای آنکه پاسخ معادله $(9-4-4)$ یک نقطه برشکست یا درشکست باشد، باید معادله $1+kG_1(s)=0$ را نیز براورده سازد.

شرط شکستگی را به صورت معادل دیگری نیز می‌توان بیان نمود. داریم

$$k = -\frac{1}{G_1(s)} \quad (10-4-4)$$

با مشتقگیری از طرفین معادله $(10-4-4)$ نسبت به s ، بدست می‌آوریم

$$\frac{dk}{ds} = \frac{dG_1(s)/ds}{[G_1(s)]^2}$$

بنابراین شرط شکستگی را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت

$$\frac{dk}{ds} = 0 \quad (11-4-4)$$

مثال ۴-۴-۴

تابع تبدیل حلقه - باز زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$$

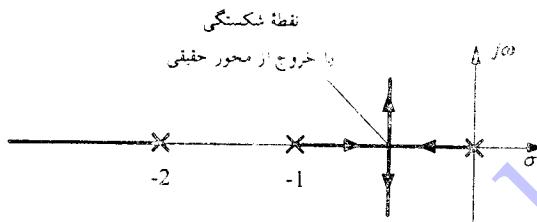
نقاط برشکست یا درشکست برای مکان ریشه را می‌توان با بکارگیری معادله $(9-4-4)$ بدین صورت بدست آورد

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s(s+1)(s+2)} \right] = -\frac{3s^2 + 6s + 2}{s^3(s+1)^2(s+2)^2} = 0$$

ولذا

$$3s^2 + 6s + 2 = 0$$

ریشه‌های این معادله عبارتند از $\frac{1}{6}$ - و $\frac{-5}{4226}$ - ولی همانطور که از شکل ۱۲-۴ مشاهده می‌شود، تنها نقطه $\frac{-5}{4226}$ - بر روی مکان ریشه قرار دارد و لذا یک نقطه خروج از محور حقیقی است و بین دو قطب قرار گرفته است. نقطه $\frac{1}{6}$ - بر روی مکان ریشه قرار ندارد. (توجه کنید که اگر مکان ریشه را برابر 0 رسم کنیم، نقطه $\frac{1}{6}$ - بر روی آن قرار می‌گیرد و یک نقطه در شکست خواهد بود)



شکل ۱۲-۴ نقطه برشکست مثال ۴-۴-۴

قاعده ۷: زاویه خروج از قطب‌های مختلط و زاویه ورود به صفرهای مختلط برای رسم نسبتاً دقیق مکان ریشه، باید موقعیت مکان ریشه را در نزدیکی قطبها و صفرهای مختلط تعیین کنیم. یک نقطه آزمایشی را در محدوده‌ای بسیار کوچک حول قطب مختلط، همانطور که در شکل ۱۲-۴ (ب) نشان داده شده است، در نظر بگیرید (این محدوده به منظور نمایش زاویه خروج بسیار بزرگتر نشان داده شده است). تحت این شرایط بدینه است که زوایایی بدست آمده از سایر قطبها و صفرهای بجز p_+ به این نقطه آزمایشی، هر کجا محدوده قرار گرفته شده باشد تقریباً ثابت است. از نظر سایر قطبها و صفرهای خارج از محدوده در نظر گرفته شده، سهم زاویه‌ای آنها به نقطه آزمایشی و قطب p_+ تقریباً یکسان است. با اعمال شرط زاویه به این محدوده کوچک داریم

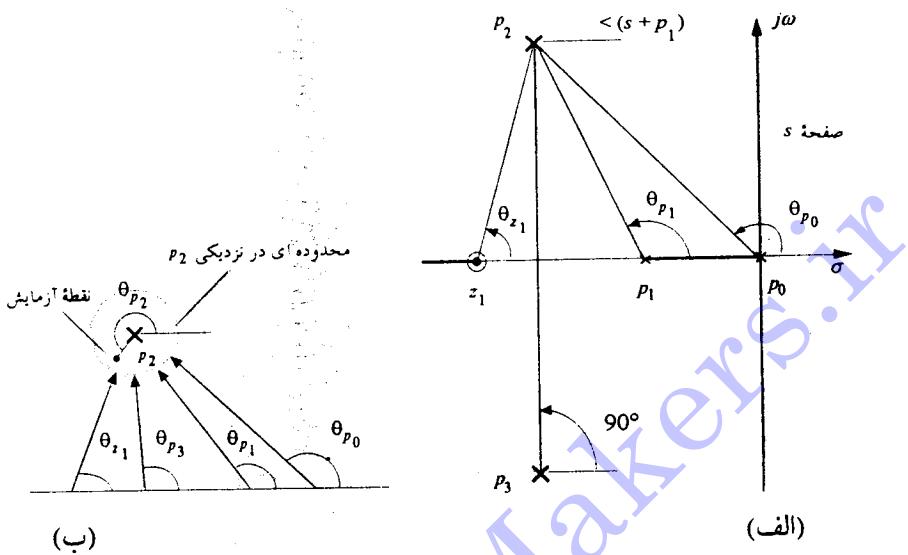
$$\theta_{p_+} + \theta_{p_+} + \theta_{p_+} + \theta_{p_+} - \theta_z = (1+2k)180^\circ$$

و لذا زاویه خروج عبارتست از

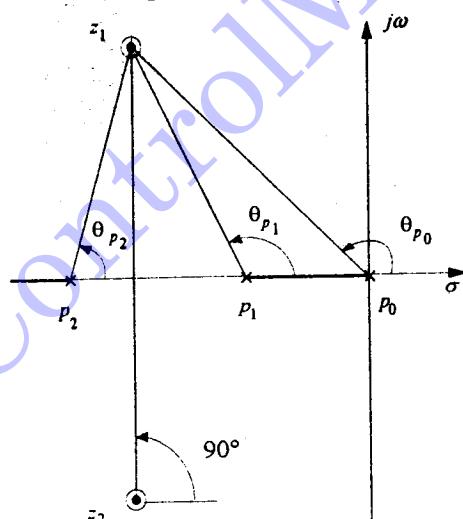
$$\angle(s+p_+) = \theta_{p_+} = (1+2k)180^\circ - (\theta_{p_+} + \theta_{p_+} + 90^\circ - \theta_z)$$

به طور مشابهی، می‌توان زاویه ورود به یک صفر مختلط را نیز تعیین نمود. برای تشکیلات قطب - صفر نشان داده در شکل ۱۴-۴، زاویه ورود به صفر z_1 عبارتست از

$$\angle(s+z_1) = \theta_{z_1} = (\theta_{p_+} + \theta_{p_+} + 90^\circ) - (1+2k)180^\circ$$



شکل ۱۴-۴ جهت زاویه در نزدیکی قطب مختلط



شکل ۱۴-۴ شرط زاویه در نزدیکی صفر مختلط

به عبارت دیگر در حالت کلی، زوایای خروج و ورود به قطبها و صفرهای مختلط را می‌توان بدین صورت بدست آورد: زاویه خروج از قطب مختلط برابر است با [مجموع زوایای بردارها به قطب مختلط از صفرها] - [مجموع زوایای بردارها به قطب مختلط از سایر قطبها] - 180° .

و همچنین، زاویه ورود به صفر مختلط برابر است با:

- ۱۸۰ - [(مجموع زوایای بردارها به صفر مختلط از سایر صفرها) - (مجموع زوایای بردارها به صفر مختلط از قطبها)]

به طور مشابهی، می‌توان گفت که زاویه خروج از قطب مختلط s_1 عبارتست از

$$180^\circ + \arg(G(s)) \Big|_{s_1}$$

که در آن $\arg(G(s))$ زاویه فاز تابع تبدیل پس از حذف عبارت مربوط به قطب s_1 است. همچنین، زاویه ورود به صفر مختلط s_1 عبارتست از $-180^\circ - \arg(G(s))$ ، که در آن $\arg(G(s))$ زاویه فاز تابع تبدیل پس از حذف عبارت مربوط به صفر s_1 است.

مثال ۴-۴

تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی عبارتست از

$$G(s) = \frac{k(s^2 + 4s + 5)}{(s+1)(s^2 + 2s + 2)}$$

قطبها و صفرهای این سیستم به ترتیب عبارتند از -1 ، $j\pm 1$ و $j\pm 2$ ، محل این قطبها و صفرها در شکل ۱۵-۴ نشان داده شده است. با توجه به تقارن مکان حول محور حقیقی، در نظر گرفتن تنها یک قطب و صفر مختلط کفایت می‌کند. با مراجعه به شکل ۱۵-۴، θ_p زاویه خروج مکان ریشه از قطب مختلط $j+1$ است و لذا

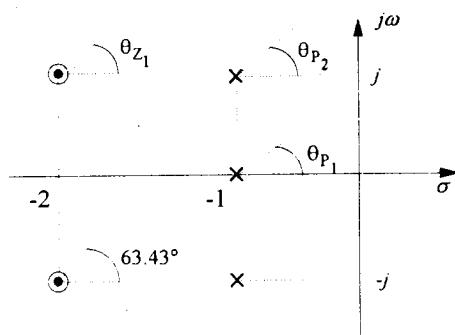
$$\theta_p = 180^\circ - [(90^\circ + 90^\circ) - (0^\circ + 63/43^\circ)] = 63/43^\circ$$

به طور مشابهی، θ_z زاویه ورود مکان ریشه به صفر مختلط $j+2$ است، و لذا

$$\begin{aligned} \theta_z &= [(180^\circ + 135^\circ + 116/57^\circ) - 90^\circ] - 180^\circ \\ &= 161/57^\circ \end{aligned}$$

زاویه خروج از قطب حقیقی ۱- نیز به صورت بالا بدست می‌آید. داریم

$$\begin{aligned} \theta_p &= 180^\circ - [(-90^\circ + 90^\circ) - (-45^\circ + 45^\circ)] \\ &= 180^\circ \end{aligned}$$



شکل ۱۵-۴ محل قطب و صفر مثال ۴-۴

یعنی همانطور که انتظار می‌رفت، مکان ریشه از قطب در ۱- شروع می‌شود و بر روی محور حقیقی منفی حرکت درخواهد آمد.

قاعده ۸: نقاط تلاقی مکان ریشه و محور موهومی
نقاط تلاقی محور موهومی با مکان ریشه، نقطه ورود به محدوده ناپایداری را نشان می‌دهد و می‌توان آن را توسط روش روث و یا هر زیر مشابه دیگر تعیین کرد.

مثال ۴-۶

معادله مشخصه $= s^3 + 6s^2 + 6s + k = 0$ را در نظر بگیرید. آرایه روث برای این معادله مشخصه عبارتست از

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 6 \\ s^2 & 6 & k \\ s^1 & \frac{48-k}{6} & \end{array}$$

برای $k=48$ ، ردیف مقابله صفر می‌شود و ریشه‌ها موهومی می‌باشند. از معادله کمکی $= s^3 + 48s^2 + 6s = 0$ محل قطع محور موهومی توسط مکان ریشه را در $j\omega$ تعیین می‌کنیم.

قاعده ۹: محاسبه k بر روی مکان ریشه

پس از رسم کامل مکان ریشه، مقدار k در هر نقطه بر روی مکان را می‌توان از شرط دامنه تعیین کرد. در واقع مقدار k بر روی هر نقطه از مکان ریشه از رابطه زیر بدست می‌آید

$$\frac{\text{حاصلضرب طول بردارهای رسم شده از قطبها} (s) \text{ به نقطه مورد نظر}}{\text{حاصلضرب طول بردارهای رسم شده از صفرها} (s) \text{ به نقطه مورد نظر}} = |k| \quad (12-4-4)$$

این مقدار را می‌توان به طور ترسیمی یا تحلیلی محاسبه کرد.

مثال ۷-۴-۴

معادله مشخصه زیر را در نظر بگیرید

$$s^2 + 2s + 2 + k(s+2) = 0$$

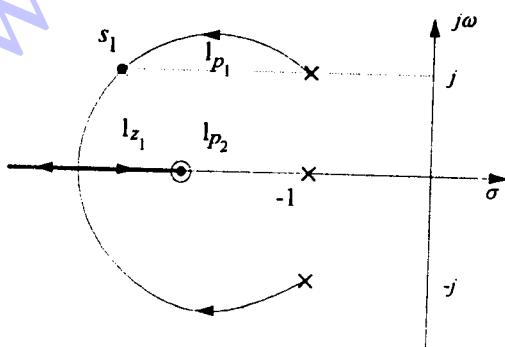
مکان ریشه این معادله در شکل ۱۶-۴ رسم شده است. مقدار بهره k در هر نقطه انتخابی، بر روی مکان ریشه را می‌توان همانطور که در شکل ۱۶-۴ نشان داده شده است از رابطه زیر بدست آورد

$$k = \frac{l_p/l_{p_1}}{l_{z_1}}$$

که در آن l_p/l_{p_1} به ترتیب طول بردارهای رسم شده از قطبها سیستم حلقه - باز در $\sigma \pm j\omega$ به نقطه s می‌باشند و l_{z_1} نیز طول بردار رسم شده از صفر سیستم حلقه - باز در $-j\omega$ است. قواعد بالا، رسم مکان ریشه را برای سیستم‌های مختلف امکان‌پذیر می‌سازد. در اینجا این

قواعد را برای مرور سریع خواننده ارایه می‌کنیم:

۱. تعداد شاخه‌های مکان ریشه برابر با تعداد قطبها تابع تبدیل حلقه - باز ($G(j\omega)$) است.
۲. برای $0 < k <$ ، نقاطی از محور حقیقی بر روی مکان ریشه قرار دارند که، در سمت راست



شکل ۱۶-۴ روش ترسیمی تعیین بهره بر روی مکان ریشه

آنها تعداد فردی از صفرها و قطبها قرار گرفته باشند.

۳. نقاط شروع مکان ریشه ($k=0$) قطب‌های حلقه - باز و نقاط پایانی آن ($k=+\infty$) صفرهای حلقه - باز سیستم می‌باشند.

۴. برای $\infty \rightarrow s$ شاخه‌های مکان ریشه بطرف مجانبها آن میان خواهند کرد. زوایای مجانبها برابرند با ($0 < k < 0$).

$$\gamma = \frac{(1+2k)180^\circ}{\text{تعداد قطبها محدود } G(s) - \text{تعداد صفرها محدود } G(s)} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

۵. نقطه قطع این مجانبها با محور حقیقی از رابطه زیر بدست می‌آید

$$\sigma_p = \frac{(\text{مجموع قسمت حقیقی صفرها}) - (\text{مجموع قسمت حقیقی قطبها})}{(\text{تعداد قطبها محدود } G(s) - \text{تعداد صفرها محدود } G(s))}$$

۶. نقاط برشكست و درشكست مکان ریشه از

$$\frac{dk}{ds} = 0$$

بدست می‌آیند.

۷. زاویه خروج از قطب مختلط برابر است با حاصل جمع زوایای کلیه صفرها منتهای حاصل جمع زوایای کلیه قطبها سیستم به قطب موردنظر و جمع این حاصل جمع با $180^\circ(1+2k)$.

زاویه ورود به صفر مختلط برابر است با حاصل جمع زوایای کلیه قطبها منتهای حاصل جمع زوایای کلیه صفرها و تفريط این حاصل جمع از $(1+2k)180^\circ$.

۸. نقاط تلاقی مکان ریشه با محور موهومی را می‌توان از روش روث بدست آورد. ابتدا با صفر قرار دادن ردیف مقابله k مقدار بهره k را محاسبه کرده و سپس با استفاده از معادله کمکی (ردیف مقابله k) مقدار k را تعیین می‌کنیم.

۹. مقدار بهره k برای هر نقطه بر روی مکان ریشه را می‌توان از شرط دامنه بدست آورد:

$$|k| = \frac{\text{حاصلضرب فاصله نقطه انتخابی تا قطبها}}{\text{حاصلضرب فاصله نقطه انتخابی تا صفرها}}$$

مثال ۴-۴

تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی عبارتست از

$$G(s) = \frac{k(s+3)}{s(s^2 + 3s + 4)} \quad (k > 0)$$

مکان ریشه سیستم حلقه - بسته را به ازاء تغییرات k رسم کنید.

معادله مشخصه سیستم حلقه - بسته عبارتست از

$$s^3 + 3s^2 + 4s + k(s+3) = 0$$

سیستم سه قطب دارد و لذا تعداد شاخه‌های مکان ریشه سه است. قطب‌های سیستم حلقه - باز در $0, \frac{1}{3} + j\frac{1}{5}, \frac{1}{3} - j\frac{1}{5}$ و صفر آن در -3 قرار دارد. بنابراین نقاط شروع مکان ریشه در $0, \frac{1}{3} + j\frac{1}{5}, \frac{1}{3} - j\frac{1}{5}$ و نقطه پایانی آن در -3 و دو صفر در بینهایت قرار دارند. با توجه به وجود دو صفر در بینهایت، دو شاخه از شاخه‌های مکان ریشه به سمت مجانب‌های خود میل خواهند کرد. زوایای مجانبها عبارتند از

$$\gamma = \frac{(1+2k)180^\circ}{3-1} = (1+2k)90^\circ \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

و لذا

$$\gamma = 90^\circ, 270^\circ$$

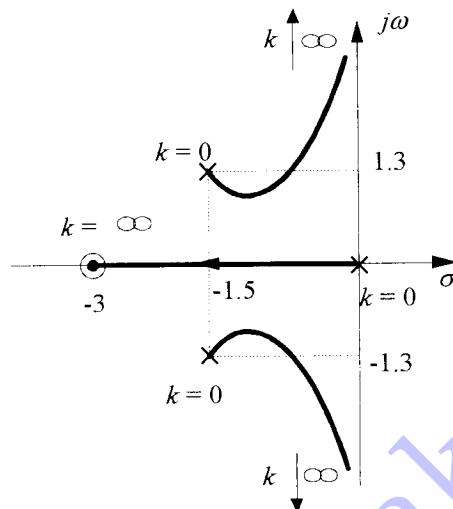
نقطه تلاقی مجانبها و محور حقیقی نیز از رابطه زیر بدست می‌آید

$$\sigma_+ = \frac{-\frac{3}{2} - \frac{3}{2} + 3}{3-1} = 0$$

با توجه به تشکیلات قطب - صفرنشان داده شده در شکل ۴-۱۷ بدینهی است که مکان ریشه، نقطه برشکست و یا درشکستی نخواهد داشت و لذا اعمال قاعده ۶ ضروری به نظر نمی‌رسد. دو قطب مختلط در $\frac{1}{3} + j\frac{1}{5}, \frac{1}{3} - j\frac{1}{5}$ متناظر با $k=0$ ، نقاط شروع دو شاخه مکان ریشه هستند که به سمت مجانبها در بینهایت میل خواهند کرد. بنابراین برای رسم دقیقترا مکان ریشه، زاویه خروج از این دو قطب را بدست می‌آوریم. داریم

$$(180^\circ - \theta_p + 90^\circ) - (180^\circ - \theta_z) = \text{زاویه خروج از قطب مختلط } j\frac{1}{3}$$

با جایگزینی برای $\theta_2 = 41^\circ$ و $\theta_p = 139^\circ$ داریم که زاویه خروج از قطب مختلط تقریباً 8° است. برای تعیین نقطه احتمالی تلاقی مکان ریشه با محور موهومی، آرایه روث را برای



شکل ۴-۱۷ مکان ریشه مثال ۴-۴-۸

معادله مشخصه حلقه - بسته تشکیل می دهیم:

$$s^4 + 4s^3 + 3s^2 + 3s + k = 0$$

و لذا مکان ریشه هیچگاه محور موهومی را قطع نمی کند.

مثال ۴-۴-۹

تابع تبدیل حلقه - باز سیستم عبارتست از

$$G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s^2 + 4s + \lambda)} \quad (k > 0)$$

مکان ریشه سیستم حلقه - بسته را به ازاء تغییرات k رسم کنید.

معادله مشخصه سیستم حلقه - بسته عبارتست از

$$s(s+1)(s^2 + 4s + \lambda) + k = 0$$

از آنجاییکه سیستم چهار قطب دارد، لذا تعداد شاخه های مکان ریشه نیز ۴ است و از قطبها

سیستم، همانطور که در شکل ۱۸-۴ نشان داده شده است، در $\theta = -1^\circ$ و $\theta = 2^\circ$ - شروع می‌شوند. با توجه به اینکه چهار صفر در بی‌نهایت داریم، هر چهار شاخه مکان ریشه به سمت چهار مجانب در بی‌نهایت میل خواهند کرد. توجه کنید که در گستره بین 0° و 1° - بر روی محور حقیقی، یک قطب در سمت راست وجود دارد و لذا مکان ریشه بر روی محور حقیقی تنها در

این گستره قرار گرفته است. زوایای مجانبها با محور حقیقی عبارتند از

$$\gamma = \frac{(1+2k)180^\circ}{4} \quad k=0, 1, 2, 3$$

و به عبارت دیگر

$$\gamma = \frac{180^\circ}{4}, \frac{3 \times 180^\circ}{4}, \frac{5 \times 180^\circ}{4}, \frac{7 \times 180^\circ}{4}$$

هم چنین نقطه تلاقی مجانبها با محور حقیقی عبارتست از

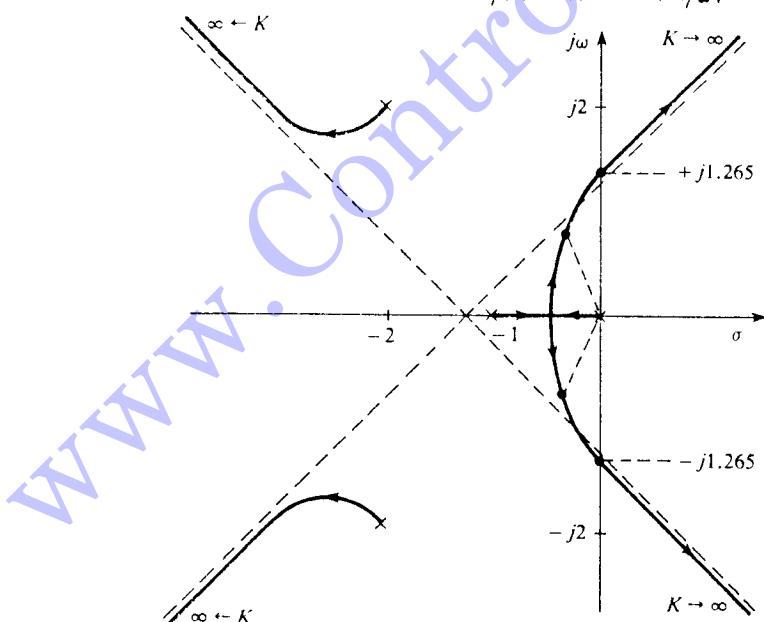
$$\sigma = \frac{-\omega}{4}$$

زاویه خروج از قطب‌های مختلط بدین صورت تعیین می‌گردد

$$\theta_p = -\theta_{p_r} - \theta_{p_i} - (2k+1)180^\circ \quad \text{زاویه خروج از قطب مختلط}$$

$$= -135^\circ - 116/5V^\circ - 90^\circ - (2k+1)180^\circ$$

$$= -341/5V^\circ - 180^\circ = -161/5V^\circ$$



شکل ۱۸-۴ مکان ریشه مثال ۹-۴-۴

به طور مشابهی، زاویه خروج از قطب مختلط در $z = 2 - j$ بدست می‌آید. از تقارن مکان ریشه داریم که این زاویه $161/57^\circ$ است. با توجه به تشکیلات قطب - صفر سیستم، یک نقطه بر شکست بین دو قطب در 0 و 1 - وجود خواهد داشت. این نقطه بر شکست را به صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$\frac{dk}{ds} = -(4s^3 + 15s^2 + 24s + 8) = 0.$$

ریشه قابل قبول این معادله (ریشه‌ای که بر روی مکان ریشه قرار داشته باشد) عبارتست از $s = -0/4402$. در اینجا با بکارگیری روش روث، نقطه تلاقی مکان ریشه با محور موهومی را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 12 & k \\ \hline s^3 & 5 & 8 & \\ s^2 & 10/4 & k & \\ s^1 & 1-5k/10/4 & & \\ \hline s^0 & k & & \end{array}$$

با صفر قرار دادن ردیف مقابله k بهره‌ای که در آن مکان ریشه، محور موهومی راقطع خواهد کرد بدست می‌آوریم. داریم $0 = 10/4 - 5k$ و لذا در $k = 16/64$ ریشه‌ها بر روی محور موهومی قرار خواهند گرفت. دقت کنید که در واقع شرایط پایداری این سیستم عبارتند از $0 < k < 16/64$. برای تعیین نقاط تلاقی از معادله کمک استفاده می‌کنیم. داریم

$$10/4s^3 + 16/64 = 0$$

و لذا نقاط قطع در $z = 1/265 \pm j$ قرار دارند.

از قاعده نهم می‌توان بهره k را در هر نقطه بر روی مکان ریشه تعیین کرد. در واقع در این حالت داریم که برای هر نقطه انتخابی k مقدار بهره عبارتست از

$$k = |s_1 + 0| \cdot |s_1 + 1| \cdot |s_1 + 2 - 2j| \cdot |s_1 + 2 + 2j|$$

از شکل ۱۸-۴ مشاهده می‌شود که قطب‌های غالب سیستم بر روی شاخه‌های مکان ریشه در سمت راست شکل ۱۸-۴ قرار دارند. دو قطب مختلط سمت را می‌توان به صورت $w_m + w_n + 2\omega_m + \omega_n$ نوشت. اگر بخواهیم که نسبت میرایی قطبها $1/5$ و فرکانس طبیعی غیر میرای آنها نیز $695/0$ باشد، ریشه‌های سیستم در $z = 12 + j(3475 \pm 0)$ قرار خواهند گرفت.

(توجه کنید که ریشه‌های با نسبت میرایی $5/0^\circ$ بر روی خط‌هایی با زوایای $\pm 60^\circ$ (یعنی $\pm \cos^{-1} 5/0^\circ$) قرار دارند). مقدار بهره k را در این دو نقطب می‌توان از رابطه بالا بدست آورد، در واقع $k = 4/114$ است.

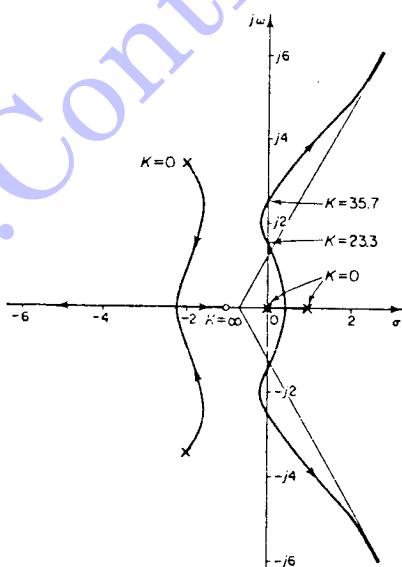
مثال ۱۰-۴-۴

تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی عبارتست از

$$G(s) = \frac{k(s+1)}{s(s-1)(s^2 + 4s + 16)}$$

مکان ریشه سیستم حلقه - بسته را به ازاء تغییرات پارامتر k از صفر تا بی‌نهایت رسم کرده و محدوده k را برای پایداری تعیین نماید.

قطبهای سیستم حلقه - باز عبارتند از 10° و $2\pm j27^\circ$ ، هم چنین صفرهای سیستم حلقه - باز عبارتند از -1° و سه صفر در بی‌نهایت. مکان ریشه بر روی محور حقیقی بین 1° و -1° و $-\infty$ خواهد بود. (به تعداد قطبها و صفرها در سمت راست این گسترده‌ها همانطور که در شکل ۱۹-۴ نشان داده شده است، توجه کنید) از آنجاییکه سه صفر در بی‌نهایت داریم، لذا



شکل ۱۹-۴ مکان ریشه مثال ۱۰-۴-۴

مکان ریشه نیز سه مجانب خواهد داشت. زاویه این مجانبها عبارتند از:

$$\gamma = \frac{(1+2k)180^\circ}{4-1} \quad k=0, 1, 2$$

$$= 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$$

نقطه تلاقی مجانبها و محور حقیقی نیز از رابطه زیر بدست خواهد آمد

$$\sigma = -\frac{(-1+2+j\sqrt{3}+2-j\sqrt{3})-1}{4-1} = -\frac{2}{3}$$

با توجه به تشکیلات صفر - قطب نشان داده شده در شکل ۴-۱۹، بدینهی است که دو نقطه شکست خواهیم داشت. بین دو قطب در ۱ و ۰ و همچنین بین صفر در ۱ و صفر در بی نهایت به ترتیب نقاط برشکست و درشکست قرار گرفته‌اند. برای تعیین نقاط برشکست و درشکست نخست رابطه زیر را می‌نویسیم

$$k = -\frac{s(s-1)(s^2+4s+16)}{s+1}$$

با مشتق‌گیری k نسبت به s بدست می‌آوریم

$$\frac{dk}{ds} = \frac{3s^4 + 10s^3 + 21s^2 + 24s - 16}{(s+1)^2}$$

$= 0$

ولذا نقاط برشکست و درشکست به ترتیب در $s=0/46$ و $s=-2/22$ قرار دارند.

از معیار روث برای تعیین مقادیر بهره k که به ازاء آنها شاخه‌های مکان ریشه محور موهوی را قطع می‌کنند، استفاده می‌کنیم. معادله مشخصه سیستم حلقه - بسته عبارتست از

$$s^4 + 3s^3 + 12s^2 + (k-16)s + k = 0$$

آرایه روث را تشکیل می‌دهیم

s^4	1	12	k
s^3	2	$k-16$	
s^2	$\frac{52-k}{3}$	k	
s^1	$\frac{-k^2 + 59k - 832}{(52-k)}$		
s^0	k		

از صفر قوار دادن ردیف مقابله داریم

$$\frac{-k^2 + 59k - 832}{(52-k)} = 0.$$

که برای $k = 35/7$ و $k = 23/3$ صفر است. معادله کمکی را برای تعیین مقادیر بروی محور

موهومی در هنگام قطع شاخه‌ها، بکار می‌گیریم. ردیف مقابله داریم

$$\frac{52-k}{3}s^2 + k = 0.$$

و پاسخهای آن برای $k = 35/7$ و $k = 23/3$ به ترتیب عبارتند از

$$s_1 = \pm j 2/56$$

$$s_2 = \pm j 1/56$$

لذا مکان ریشه چهار بار محور موهومی را قطع می‌کند.

برای تعیین زاویه خروج از قطب مختلط در $-2 + j 27/3$ داریم

$$\begin{aligned} -2 + j 27/3 &= (2k+1) 180^\circ + 1/6^\circ - 120^\circ - 130/5^\circ - 90^\circ \\ &= -54/5^\circ \end{aligned}$$

و زاویه خروج از قطب مختلط در $-2 + j 27/3$ برابر است با $54/5^\circ$.

با توجه به شکل مکان ریشه و یا با بکارگیری نتایج معیار روث، سیستم تنها برای

$23/3 < k < 35/7$ پایدار است.

مثال ۴-۱۱

تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی عبارتست از

$$G(s) = \frac{k}{s(s+4)(s^2 + 4s + 20)}$$

مکان ریشه سیستم حلقه - بسته را به ازاء تغییرات بهره k از 0 تا بی‌نهایت رسم کنید.

معادله مشخصه سیستم حلقه - بسته عبارتست از

$$s(s+4)(s^2 + 4s + 20) + k = 0.$$

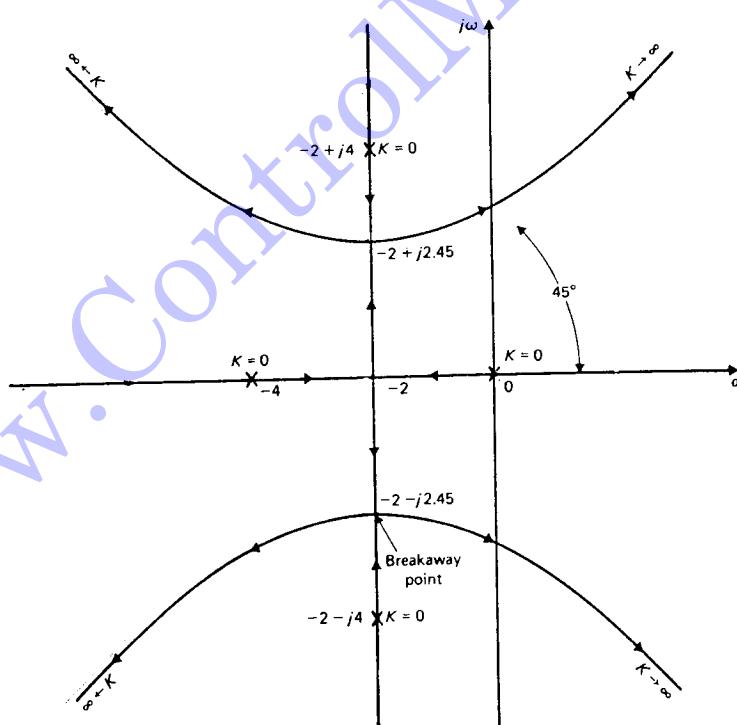
قطبهای سیستم حلقه - باز در $0, -4, -2 \pm j 4$ قرار دارند. همچنین صفرهای حلقه - باز سیستم

در بی‌نهایت قوار دارند. گستره بین قطبهای 0 و -4 بر روی محور حقیقی منفی جزء مکان

ریشه می باشد. اگر در این حالت بخواهیم نقطه برشکست بین دو قطب را تعیین کنیم، داریم

$$\frac{dk}{ds} = - \left(4s^3 + 24s^2 + 72s + 80 \right) / \left[s(s+4)(s^2 + 4s + 20) \right]^2$$

ریشه های معادله بالا در -2 و $-2 \pm j\sqrt{2}/45$ قرار دارند. بسادگی می توان نشان داد که در این حالت کلیه این ریشه ها بر روی مکان ریشه قرار دارند و لذا علاوه بر نقطه برشکست در -2 که نقطه خروج از محور منفی حقیقی می باشد، دو نقطه برشکست مختلط نیز در $-2 \pm j\sqrt{2}/45$ قرار دارد. همانند قبل می توان زاویه مجانبهای مکان ریشه را بدست آورد که 45° ، 135° ، 225° و 315° بوده و نقطه تلاقی آنها با محور حقیقی نیز در -2 می باشد. نقاط تلاقی شاخه های مکان ریشه و محور موهومی از روش روش تعیین شده و این نقاط عبارتند از $1 \pm j\sqrt{3}/4$. مکان ریشه این سیستم در شکان ۲۰-۴ نشان داده شده است.



شکل ۲۰-۴ مکان ریشه مثال ۱۱-۴-۴

مثال ۴-۲-۱

تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی عبارتست از

$$G(s) = \frac{k_1(1-s)}{s(1+s)(1+0/5s)(1+0/25s)}$$

مکان ریشه سیستم حلقه - بسته را به ازاء تغییرات بهره k_1 از 0 تا بینهاست رسم کنید. نخست

تابع تبدیل را به صورت مناسب تبدیل می‌کنیم

$$G(s) = \frac{-k_1(s-1)}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$$

با جایگزینی $k_1 = -8k$ داریم

$$G(s) = \frac{k(s-1)}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$$

قطبهای سیستم حلقه باز در 0 , -1 , -2 , -4 و ∞ قرار دارند. همچنان سیستم یک صفر محدود ناپایدار در 1 و سه صفر در بینهاست دارد. توجه کنید که در این مسئله با دو بهره k_1 و k , برخورد داریم که از نظر علامت عکس هم می‌باشند. در واقع برای $k > 0$ یا $k < 0$, گسترده‌های $(-\infty, -4)$, $(-2, -1)$ و $[0, 1)$ بر روی مکان ریشه قرار خواهند گرفت.

گسترده‌های $[-4, -2)$, $[-1, 0]$ و $(\infty, 1)$ بر روی مکان ریشه قرار خواهند گرفت. مکان ریشه چهار مجانب خواهد داشت. برای $k > 0$ یا $k < 0$, زوایای این مجانبها از رابطه زیر تعیین می‌گردند

$$\gamma = \frac{(1+2k)180^\circ}{4-1} = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$$

همچنان برای $k > 0$ یا $k < 0$, زوایای این مجانبها از رابطه زیر تعیین می‌گردند

$$\gamma = \frac{(2k)180^\circ}{4-1} = 0, 120^\circ, 240^\circ$$

توجه کنید که این رابطه از معادله $(4-4-2)$ به ازاء k منتهی بدست می‌اید، در این حالت معادله $(4-4-4)$ به صورت $\angle k = 180^\circ$ تغییر پیدا خواهد کرد. نقطه تلاقی این مجانبها

با محور حقیقی نیز عبارتست از

$$\sigma_0 = \frac{(0-1-2-4)-(1)}{4-1} \\ = -\lambda/3$$

کنون نقاط برشکست و درشکست مکان ریشه را محاسبه می‌کنیم. داریم

$$k = \frac{s(s+1)(s+2)(s+4)}{(s-1)}$$

ولذا

$$\frac{dk}{ds} = \frac{(s+0/3225)(s+1/484)(s+3/24)(s-1/717)}{(s-1)^3} \\ = 0$$

از اینرو $0/3225 - 1/484 - 0/24 - 1/717$ می‌توانند نقاط برشکست و درشکست مکان ریشه باشند. با توجه به مکان ریشه بر روی محور حقیقی، داریم که $0/3225$ و $-1/484$ نقاط برشکست و $1/717$ یک نقطه در شکست برای مکان ریشه به ازاء $k > 0$ یا $k < 0$ می‌باشند. همچنین، $-1/24$ یک نقطه برشکست بر روی مکان ریشه به ازاء $k > 0$ یا $k < 0$ است. برای تعیین برخورد احتمالی مکان ریشه با محور موهومی از جدول روث استفاده می‌کنیم. معادله مشخصه سیستم حلقه - بسته عبارتست از

$$s^4 + 7s^3 + 14s^2 + (\lambda + k) - k = 0$$

ولذا جدول روث عبارتست از

s^4	1	14	$-k$
s^3	7		$k + \lambda$
s^2	14		$-7k$
s^1	$-k^2 + 13k + 72$		
s^0	$-7k$		

داریم

$$-k^2 + 13k + 72 = 0$$

ولذا برای بھره‌های $5/283$ و $0/283$ نقاط قطع با محور موهومی را خواهیم داشت. نقاط تلاقی در این بھره‌ها $0/623 \pm j4/54$ برای $k = -5/283$ و $0/623 \pm j4/54$ برای $k = 126/283$ و $0/4$ می‌باشند.

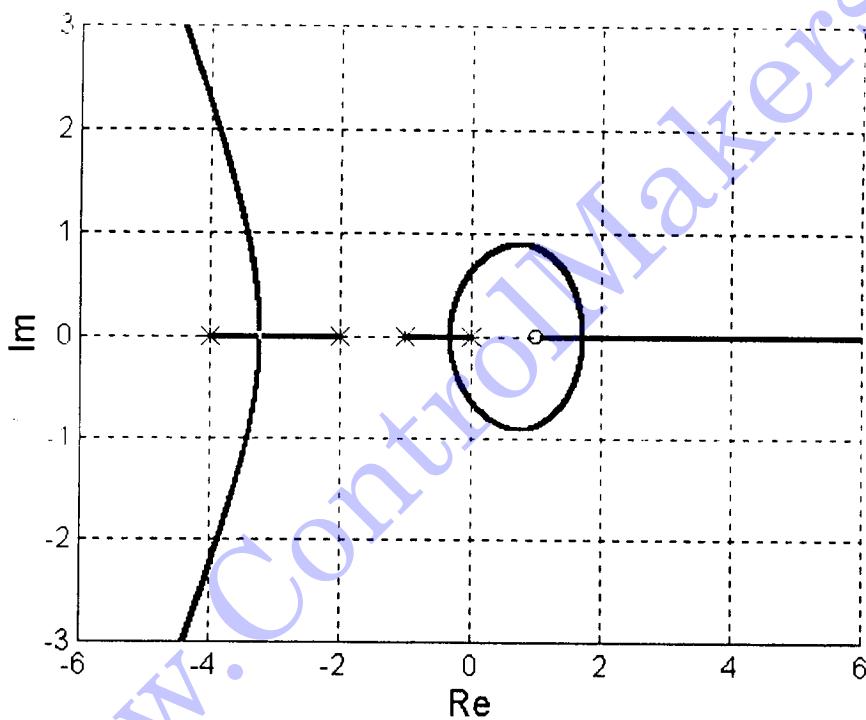
برای پایداری نیز از جدول روث داریم

$$90 - k > 0, \quad -k^2 + 131k + 720 > 0, \quad -7k > 0.$$

و لذا برای یک سیستم پایدار باید داشته باشیم

$$0 < k_1 < 0/66$$

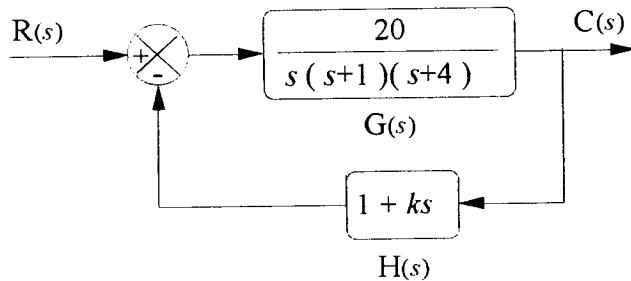
با توجه به نکات داده شده، مکان ریشه به صورت داده شده در شکل ۲۱-۴ می‌باشد.



شکل ۲۱-۴ مکان ریشه مثال ۱۲-۴-۴ برای $k_1 > 0$ و $k > 0$

قاعده ۱۰: رسم مکان ریشه هنگامیکه پارامتر متغیر k به صورت یک بهره ضرب شونده در تابع تبدیل ظاهر نشده است.

تذکر این نکته لازم است که سیستم‌هایی که تاکنون در نظر گرفته شده‌اند، سیستم‌های کنترلی با فیدبک واحد بوده‌اند. اگر سیستم کنترل همانطور که در شکل ۲۲-۴ نشان داده شده است، فیدبک غیر واحد (H) داشته باشد، آنگاه تمامی قواعد ذکر شده در این بخش را



شکل ۲۲-۴ سیستم کنترل مثال ۱۳-۴-۴

می‌توان بدون تغییر برای تابع تبدیل حلقه - باز $G(s)H(s)$ اعمال کرد. دقت کنید که تابع تبدیل حلقه - بسته سیستم عبارتست از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (13-4-4)$$

ولذا از معادله (۱۳-۴-۴)، معادله مشخصه سیستم حلقه - بسته عبارتست از

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad (14-4-4)$$

بنابراین شرایط دامنه و زاویه و قواعد داده شده را می‌توان بدون تغییر همانند قبل برای $G(s)H(s)$ به جای $G(s)$ (بافیدبک واحد) بیان کرد.

در اینجا حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن $(s)G(s)H(s)$ را نتوان به صورت معادله (۱۳-۴-۶) نوشت، به عبارت دیگر بهره متغیر k ، به صورت یک عامل ضرب شونده در تابع تبدیل حلقه - باز $G(s)H(s)$ ظاهر نمی‌شود. راه حل کلی در این چنین مواردی نوشتمن معادله مشخصه حلقه - بسته سیستم به صورتی است که k به صورت یک عامل ضرب کننده $G(s)H(s)$ ظاهر شود. برای نشان دادن این مطلب به مثال ۱۳-۴-۴ توجه کنید.

مثال ۱۳-۴-۴

سیستم حلقه - بسته نشان داده شده در شکل ۲۲-۴ را در نظر بگیرید. مکان ریشه سیستم حلقه - بسته را رسم کنید.

تابع تبدیل حلقه - باز سیستم عبارتست از

$$G(s)H(s) = \frac{20(1+ks)}{s(s+1)(s+4)}$$

بديهی است که پارامتر بهره k به صورت يك عامل ضرب شونده در تابع تبدیل حلقه - باز سیستم ظاهر نشده است. معادله مشخصه سیستم حلقه - بسته به صورت زیر است

$$1 + \frac{20(1+ks)}{s(s+1)(s+4)} = 0$$

و يا

$$s^3 + 5s^2 + 4s + 20 + 20ks = 0$$

نخست تعریف کنید

$$k_1 = 20k$$

سپس طرفین معادله مشخصه حلقه - بسته را بر حاصل جمع عباراتی که بهره متغیر k را در بر نمی‌گيرند، تقسیم کنید و بدین ترتیب بدست می‌آوریم

$$1 + \frac{k_1 s}{s^3 + 5s^2 + 4s + 20} = 0$$

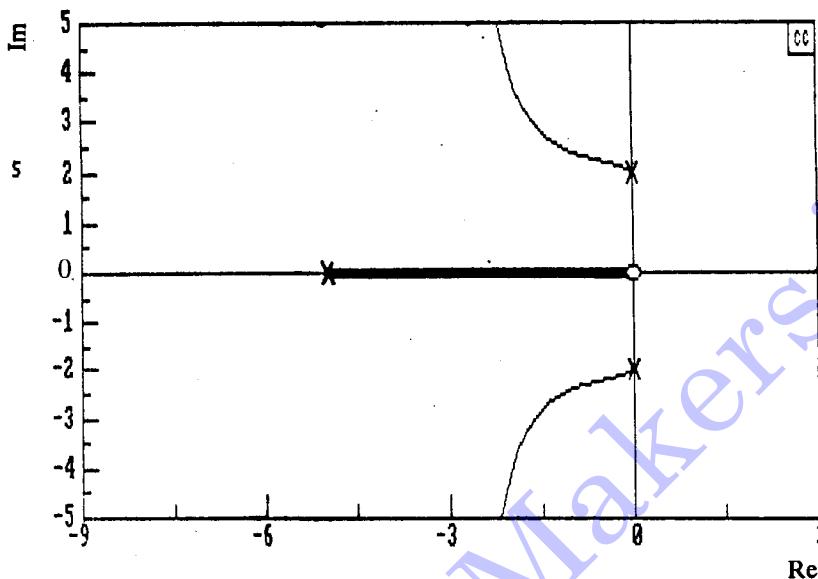
معادله بالا اکنون به صورت در نظر گرفته شده در قبل است، که در آن

$$G(s)H(s) = \frac{s}{s^3 + 5s^2 + 4s + 20}$$

قطبهای حلقه - باز عبارتند از $-5 \pm j2\sqrt{5}$. همچنان سیستم حلقه - باز يك صفر در 0° و دو صفر در بی‌نهایت دارد. با اعمال قواعد داده شده داریم که محور حقیقی منفی $0^\circ - 5^\circ$ - جزء مکان ریشه می‌باشد، زاویه مجانبهای مکان ریشه $\pm 90^\circ$ و نقطه قطع آنها با محور حقیقی در $-2/5$ می‌باشد. همچنان زاویه خروج از قطب مختلف در 2° برابر با $158/2^\circ$ و در -2° برابر با $158/2^\circ$ است. شکل ۲۳-۴ مکان ریشه این سیستم را نشان می‌دهد.

۵-۴ نمودارهای مسیرهای ریشه

در رسم مکان ریشه، ارایه شده در بخش‌های قبل، بهره قابل تغییر سیستم حلقه - باز k و يا يك بهره قابل تنظیم در يكی از بلوک‌های سیستم کنترل، تنها متغیر در معادله مشخصه سیستم



شکل ۲۳-۴-۴ مکان ریشه مثال ۱۳-۴-۴

حلقه - بسته بود. بسیاری از سیستم‌های کنترل در عمل بیش از یک بهره قابل تغییر و قابل تنظیم دارند و لذا بررسی ریشه‌های سیستم حلقه - بسته برای تغییر همزمان این پارامترها از اهمیت خاصی برخوردار است. اگر در سیستمی دو پارامتر (یا بیشتر) تغییر کند، مکان ریشه متناظر را مسیرهای ریشه^۱ می‌نامند.

معادله زیر را در نظر بگیرید

$$a(s) + k_1 b_1(s) + k_2 b_2(s) = 0 \quad (1-5-4)$$

که در آن k_1 و k_2 پارامترهای متغیر و $a(s)$ ، $b_1(s)$ و $b_2(s)$ چند جمله‌ای‌هایی از s هستند. اگر در معادله (۱-۵-۴)، k_2 را برابر صفر قرار دهیم داریم

$$a(s) + k_1 b_1(s) = 0 \quad (2-5-4)$$

و یا

$$1 + k_1 \frac{b_1(s)}{a(s)} = 0 \quad (3-5-4)$$

معادله (۴-۵-۳)، نشان دهنده معادله مشخصه یک سیستم حلقه - بسته با تابع تبدیل حلقه - باز (s/a) است، و رسم مکان ریشه آن با تغییر k ، بسادگی همانند قبال امکان پذیر است (معادله (۴-۵-۳) را با معادله (۴-۴-۱) مقایسه کنید). اکنون مقدار پارامتر k را ثابت فرض کرده و معادله (۴-۵-۱) را بر $a(s)+k, b_1(s)$ تقسیم می‌کنیم. داریم

$$1 + \frac{k_1 b_1(s)}{a(s) + k_1 b_1(s)} = 0 \quad (4-5-4)$$

معادله (۴-۵-۴) به صورت معادله مشخصه یک سیستم حلقه - بسته است، که در آن $1 + k_1 G_1(s)H_1(s) = 0$

$$G_1(s)H_1(s) = \frac{b_1(s)}{a(s) + k_1 b_1(s)} \quad (5-5-4)$$

تابع تبدیل حلقه - باز آن است. مسیرهای ریشه معادله (۴-۵-۱)، هنگامیکه k_1 تغییر کند ولی k_1 ثابت باشد، براساس تشکیلات قطب - صفر تابع تبدیل حلقه - باز داده شده با معادله (۵-۵-۴) ساخته می‌شود. توجه کنید که قطبهای $G_1(s)H_1(s)$ همان ریشه‌های معادله (۴-۵-۱) هستند.

بنابراین، مسیرهای ریشه معادله (۴-۵-۱)، هنگامیکه k_1 تغییر می‌کند باید همگی از نقاطی بر روی مکان ریشه معادله (۴-۵-۲) آغاز شوند. (نقطه شروع متاظریا $= 0$ هستند) با استفاده از مثال زیر، مفاهیم ارایه شده نشان داده می‌شوند.

مثال ۴-۵-۱

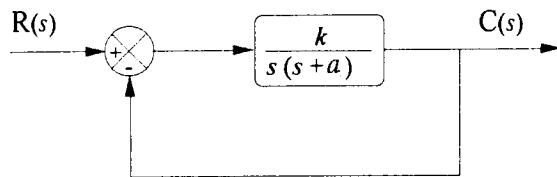
سیستم نشان داده شده در شکل ۴-۲۴ را در نظر بگیرید. در این سیستم علاوه بر بهره k ، پارامتر a نیز تغییر می‌کند. تابع تبدیل سیستم حلقه - بسته عبارتست از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{s^2 + as + k}$$

و معادله مشخصه آن عبارتست از

معادله مشخصه سیستم را به صورت زیر باز نویسی می‌کنیم

$$1 + \frac{as}{s^2 + k} = 0$$



شکل ۲۴-۴ سیستم حلقه - بسته مثال ۱-۵-۴

$$\frac{as}{s^2 + k} = -1$$

اگر بهره k را ثابت فرض کنیم، ریشه های حلقه - بسته را می توان بر حسب تغییرات a بدست آور. مسیرهای ریشه سیستم را می توان با بکارگیری روش ارایه شده رسم مکان ریشه تعیین کرد.

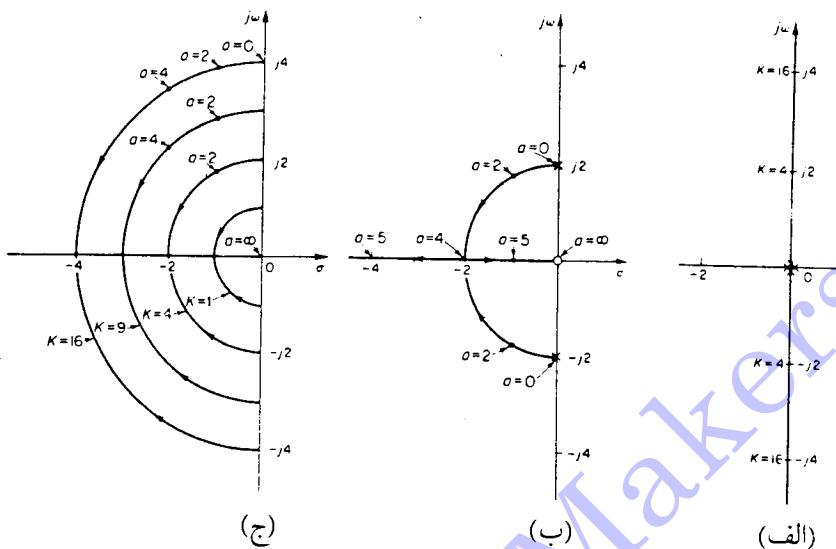
مسیرهای ریشه به ازاء تغییرات پارامترهای a و k باز ∞ تا 0 بدست می آیند. این مسیرها از قطبها $as/(s^2 + k)$ آغاز شده و به صفرهای آن ختم خواهند شد. برای $a = 0$ ، معادله مشخصه سیستم حلقه - بسته عبارتست از

$$s^2 + k = 0$$

در این حالت دو قطب حلقه باز در مبدأ وجود دارد و مکان ریشه معادله $s^2 + k = 0$ در شکل ۲۵-۴ (الف) نشان داده شده است. برای رسم مسیرهای ریشه، فرض کنید که k در ± 4 ثابت است. آنگاه داریم

$$\frac{as}{s^2 + 4} = -1$$

در این حالت قطبها حلقه - باز در $\pm 2\sqrt{a}$ قرار دارند و یک صفر محدود در مبدأ وجود دارد. مکان ریشه این معادله مشخصه در شکل ۲۵-۴ (ب) نشان داده شده است. اگر k را تغییر دهیم، مکان ریشه مشابهی را می توان رسم نمود. مسیرهای ریشه این سیستم به ازاء تغییرات a و k از صفر تا بی نهایت در شکل ۲۵-۴ (ج) نشان داده شده اند. بدیهی است که مسیرهای ریشه از قطبها آغاز می شوند و در صفرهای تابع تبدیل $as/(s^2 + k)$ خاتمه می یابند. همانطور که مشاهده شد، برای رسم مسیرهای ریشه یکی از پارامترهای متغیر را ثابت نگه می داریم و دومی را تغییر می دهیم، سپس دومین پارامتر متغیر را ثابت نگه می داریم و اولی



شکل ۴-۲۵ (الف) مکان ریشه برای سیستم مثال ۴-۵-۱ برای $a = 0$ و $k \leq \infty$ ، (ب) مکان

رسانه برای $k=4$ و $\infty \leq a \leq 0$ (ج) نمودار مسیرهای ریشه

راتغییر می دهیم، با بدست آوردن دو مکان ریشه برای سیستم ، مسیرهای ریشه را بدست می آوریم:

مسايل

۱-۴. (الف) مکان ریشه سیستم حلقه - بسته با فیدبک واحد که تابع تبدیل حلقه - باز آن در زیر داده شده است را رسم کنید.

$$G(s) = \frac{k(s+9)}{(s+1)^2}$$

(ب) اگر صفرهای حلقه - باز بجای $-9/1$ در قرار گیرند، تأثیر این تغییر مکان صفرهای حلقه - را به مکان رشته پرسه کند.

(ج) اگر صفرهای حلقه باز بجای ۹-۸-۷ در قرار گیرند، تأثیر این تغییر مکان صفرهای حلقه - باز دایم مکان ریشه بررسی کنید.

۴-۲. تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم حلقه - بسته با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{2/5k(s+2)}{(s-1)(s+1)}$$

(الف) مکان ریشه سیستم را رسم کنید.

(ب) محدوده بهره k برای پایداری را پیدا کنید.

۴-۳. تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم حلقه - بسته با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{k}{(1+0.5s)(1+0.2s)(1+s)^2}$$

مکان ریشه سیستم را رسم کنید.

۴-۴. تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم حلقه - بسته با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{k}{s(20s^2 + 10s + 1)(s+2)^2}$$

مکان ریشه سیستم را رسم کنید.

۴-۵. تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم حلقه - بسته با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{k(s+1)}{s^2(s^2 + 10s + 29)}$$

مکان ریشه سیستم را رسم کنید.

۴-۶. تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم حلقه - بسته با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{k}{s(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 6s + 10)}$$

مکان ریشه سیستم را رسم کنید.

۴-۷. تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم حلقه - بسته با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$$

(الف) مکان ریشه سیستم را رسم کنید.

(ب) مقدار بهره k که قطبهای مختلط حلقه - بسته با نسبت میرایی $5/0 = \mu$ را بدست می‌دهد، تعیین کنید.

۸-۴. تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم حلقه - بسته با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{k}{s(s^2 + 8s + 20)}$$

(الف) مکان ریشه سیستم را رسم کنید.

(ب) مقدار بهره k را به گونه‌ای تعیین کنید که قطبهای مختلط حلقه - بسته نسبت میرایی $58/0 = \mu$ داشته باشند.

۹-۴. تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم حلقه - بسته با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{k}{s(1+0/0.2s)(1+0/0.1s)}$$

(الف) مکان ریشه سیستم را رسم کنید.

(ب) مقدار بهره k که سیستم را ناپایدار می‌کند، تعیین کنید.

(ج) از مکان ریشه، آن مقدار k که به ازاء آن قطبهای حلقه - بسته نسبت میرایی $0/58 = \mu$ داشته باشند را تعیین کنید.

(د) برای بهره بدست آمده از (ج) خطای سیستم به ورودی شب را تعیین کنید.

۱۰-۴. مسئله ۹-۴ را برای تابع تبدیل حلقه - باز زیر تکرار کنید

$$G(s) = \frac{100k}{s(s^2 + 12s + 25)}$$

۱۱-۴. تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم حلقه - بسته با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{k(s+10)}{s(s+1)(s+2)}$$

(الف) مکان ریشه سیستم را رسم کنید.

(ب) مقدار بهره k که سیستم را ناپایدار می‌کند، تعیین کنید.

(ج) تابع تبدیل حلقه - بسته سیستم را برای $=\infty$ بدست آورید.

۱۲-۴- مسئله ۱۱-۴ را برای تابع تبدیل حلقه - باز زیر تکرار کنید:

$$G(s) = \frac{k(1+0/04s)}{s(1+0/1s)(1+0/1s+0/0125s^2)}$$

۱۳-۴- (الف) مکان ریشه سیستم حلقه - بسته با فیدبک غیرواحد را رسم کنید، که در آن

$$G(s) = \frac{k(1+s/5)}{s^2(1+s/12)}$$

$$H(s) = 1 + \frac{s}{12}$$

تابع تبدیل عنصر فیدبک آن می‌باشد.

(ب) با فرض یک مقدار پایدار بهره k و ورودی پله واحد، مقدار پاسخ حالت -

ماندگار سیستم را بدست آورید.

۱۴-۴- مسئله ۱۳-۴ را برای توابع تبدیل زیر تکرار کنید

$$G(s) = \frac{k}{s^2+2s+2}$$

$$H(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

و

۱۵-۴- تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم حلقه - بسته با فیدبک واحد عبارتست از

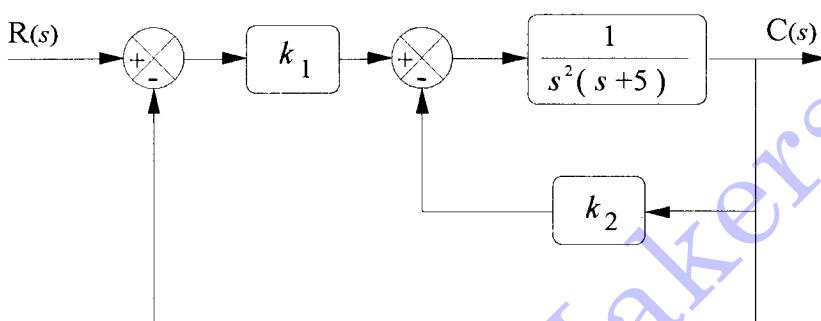
$$G(s)H(s) = \frac{k}{(s+5)(0/4s+1/2)(0/5s^2+2s+4)}$$

بارسم مکان ریشه، مقدار بهره k را چنان تعیین کنید تا سیستم حلقه - بسته یک نوسان

کننده کامل^۱ باشد.

۱۶-۴. سیستم کنترل فیدبک نشان داده شده در شکل ۲۶-۴ را در نظر بگیرید. (الف) مکان ریشه سیستم حلقه - بسته را برای $k_2 = 0$ و $k_1 < \infty$ رسم کنید.

(ب) برای $k_2 = 10$ و $k_1 < \infty$ مکان ریشه حلقه - بسته را رسم کنید.



شکل ۲۶-۴ سیستم کنترل مسئله ۱۶-۴

۱۷-۴. تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم حلقه - بسته با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{k(1+Ts)}{s(s+1)(s+2)}$$

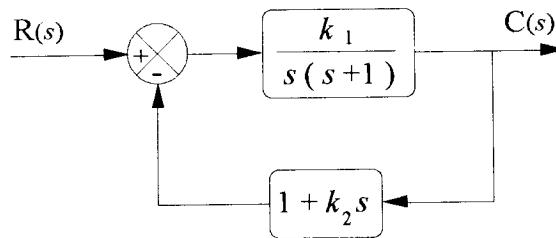
نمودار مسیرهای ریشه را برای تغییرات پارامترهای k و T از صفر تا بینهایت رسم کنید.

۱۸-۴. تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم حلقه - بسته با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+a)}$$

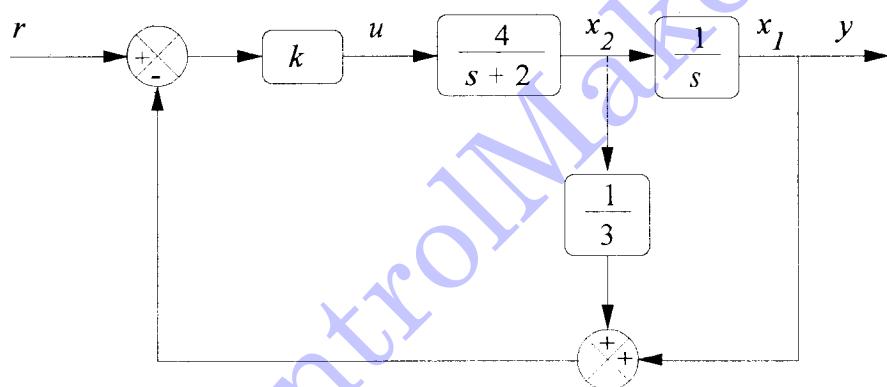
نمودار مسیرهای ریشه را برای تغییرات پارامترهای k و a از صفر تا بینهایت رسم کنید.

۱۹-۴. سیستم نشان داده شده در شکل ۲۷-۴ را در نظر بگیرید. (الف) برای $k_2 = 0$ و $k_1 = 5$ تغییرات k_1 از صفر تا بینهایت مکان ریشه را رسم کنید. (ب) نمودار مسیرهای ریشه را برای تغییرات k_1 و k_2 از صفر تا بینهایت رسم کنید. (ج) قطبهای حلقه - بسته را بر روی مسیرهای ریشه برای $k_1 = 10$ و $k_2 = 0/5$ بدست آورید.



شکل ۴-۲۷ سیستم مسئله ۱۹-۴.

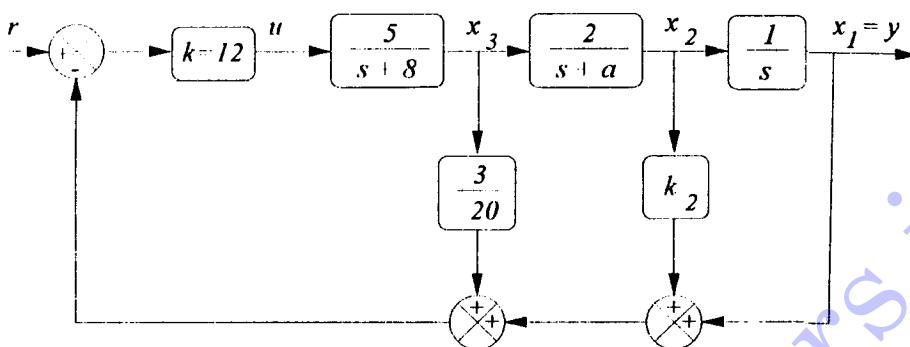
۲۰-۴- مکان ریشه سیستم نشان داده شده در شکل ۴-۲۸ را رسم کنید.



شکل ۴-۲۸ سیستم مسئله ۲۰-۴.

۲۱-۴- سیستم نشان داده شده در شکل ۴-۲۹ را در نظر بگیرید. (الف) مکان ریشه سیستم را برای $a=2$ و $b=\frac{17}{6}$ رسم کنید. (ب) تغییرات در مکان ریشه را به ازاء تغییرات در a و b تعیین کنید.

۲۲-۴- سیستم کنترل نشان داده شده در شکل ۴-۳۰ را در نظر بگیرید. (الف) مکان ریشه را برای $G(s)=\frac{k}{s(s+4)}$ و $D(s)=1$ رسم کنید. (ب) مکان ریشه را برای $G(s)=\frac{s+2}{s+6}$ و $D(s)$ رسم کرده و تأثیر $D(s)$ را بر مکان ریشه سیستم بررسی کنید.



شکل ۴-۲۹ سیستم مسئله ۲۱-۴

۲۳-۴- سیستم نشان داده شده در شکل ۳۰-۴ را در نظر بگیرید. برای

$$D(s) = \frac{s+b}{s+4}, \quad G(s) = \frac{10k}{s(s+1)(s+4)}$$

با بکارگیری مکان ریشه، مقادیر k و b که قطبهاي غالب حلقه - بسته $\zeta = 1 \pm j\sqrt{3}$ - را
می‌دهند، تعیین کنید.

۲۴-۴- سیستم نشان داده شده در شکل ۳۰-۴ را در نظر بگیرید. برای

$$D(s) = \frac{s+b}{s+4}, \quad G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

مکان ریشه سیستم را برای حالتهای زیر رسم کرده و ناپایداری سیستم حلقه - بسته را
در هر حالت بررسی کنید:

$1 < b < a$

حالت دوم:

$1 < a < b$

حالت اول:

$a < b < 1$

حالت چهارم:

$b < a < 1$

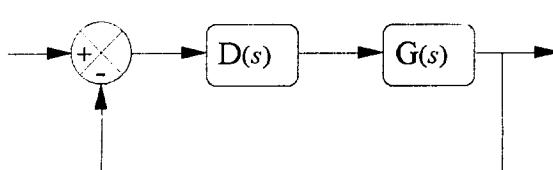
حالت سوم:

$b < 1 < a$

حالت ششم:

$a < 1 < b$

حالت پنجم:



شکل ۴-۳۰ یک سیستم کنترل.

مراجع فصل چهارم

- [4-1] Evans, W. R, *Graphical analysis of control systems*, Trans. AIEE, Vol. 67, pp 547-551, 1948.
- [4-2] Evans, W. R, *Control systems synthesis by the root locus method*, Trans. AIEE, Vol. 69, pp 66, 1950.
- [4-3] Evans W. R, *Control systems dynamics*, NewYork, McGraw-Hill, 1954.
- [4-4] Chang C. S., *Analytical Method for obtaining the root-locus with positive and negative gain*, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-10, pp 92-44, 1965
- [4-5] Yeh V. C. M, *The study of transients in linear feedback systems by conformal mapping and root-locus method*, Trans. ASME, Vol 76, pp 349-361, 1954.
- [4-6] Lorens C. S. and Titsworth R.C., *Properties of root locus asymptotes*, IRE Trans. Automatic. Control, AC-5, pp 71-72, Jan 1960.
- [4-7] Remec M. J., *Saddle-points of a complete root locus and an algorithm for their easy location in the complex frequency plane*, Proc. Natl. Electronic conf., Vol. 21, pp 605-608, 1965.
- [4-8] Chen C. F., *A new rule for finding breaking points of root loci involving complex roots*, IEEE Trans. Automatic control, AC-10, pp 373-374, July 1965.
- [4-9] Krishnan V., *Semi-analytic approach to root locus*, IEEE Trans. Automatic control, Vol. AC-11, pp 102-108, Jan 1968.
- [4-10] Doda D. J., *The digital computer makes root locus easy*, Control Eng., May 1958.

- [4-11] Klagsbrunn Z. and Wallach Y., *On computer implementation of analytic root-locus plotting*, IEEE Trans. Automatic control, Vol AC-13, pp 744-745, Dec. 1968.
- [4-12] Ash R. H. and Ash G. R., *Numerical computation of root loci using the Newton-Raphson technique*, IEEE Trans. Automatic control, Vol AC-13, pp 576-582, Oct. 1968.
- [4-13] Haung R.Y., *The sensitivity of the poles of linear closed-loop systems*, Trans. AIEE Appl. Ind. Vol. 77, Part 2, pp 182-187, Sep. 1958.
- [4-14] Ur H., *Root-locus properties and sensitivity relations in control systems*, IRE Trans. Automatic control, Vol AC-5, pp 57-65, Jan 1960.
- [4-15] CHu Y., *Feedback control system with dead-time or distributed lag by root-locus method*, Trans. AIEE, Vol. 70, Part 2, PP 291, 1951.
- [4-16] Yeung K. S., *A remark on the use of Reme's method for finding breakaway points*, IEEE Trans. Automatic control, Vol. AC-26, pp 940-941, 1981.

کتاب شناسی

روش مکان ریشه برای تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل توسط ایوانز ارایه شده است. منابع اولیه در این زمینه، مراجع [1]، [2-4] و [4-3] هستند. بکارگیری قواعد مرحله به مرحله برای ترسیم سریعتر و دقیق‌تر مکان ریشه، در مراجعی مانند [4]، [4-6]، [4-7]، [4-8] و [4-9] پایه گذاری شده و امروزه در اکثر کتابهای درسی کنترل سیستم‌های خطی به طور مفصل و دقیق ارایه شده‌اند. هر کدام از مراجع پایان کتاب [1] تا [6] می‌توانند برای این منظور به کار گرفته شوند. در [3] رسم مکان ریشه برای بهره‌های منفی k به طور مفصل، همزمان با رسم برای بهره‌های مثبت (که در این فصل مورد بررسی قرار گرفت)، ارایه شده است، هم‌چنین می‌توان به مرجع [4-4] نیز مراجعه کرد.

در [1] و [16-4] تعابیری برای توجیه نقاط برشکست و درشکست و وجود آنها در مکان ریشه بر حسب بهره حلقه - باز سیستم k آمده است. در مرجع [1]، علاوه بر قواعد ذکر شده در این فصل برای ترسیم مکان ریشه، قواعد تکمیلی برای تعیین تلاقی و یا عدم تلاقی مجایهای مکان ریشه، بقاء مجموع ریشه‌های سیستم و تعیین ریشه‌ها بر روی مکان ریشه آمده است. یکی از کاربردهای فرعی مکان ریشه، تعیین ریشه‌های یک چند جمله‌ای است. این کاربرد در مراجع [2] و [9] با ذکر مثال‌هایی آورده شده است. از کاربردهای دیگر مکان ریشه تحلیل حساسیت ریشه‌ها است. مراجع [4-13] و [4-14]، از اولین منابع در این زمینه می‌باشند. کتابهای [4]، [9] و [3] با این مسئله به طور ساده و نسبتاً کاملی برخورد داشته‌اند. اگر بنایه دلایلی در سیستم حلقه - بسته حذف صفر و قطبی رخ دهد، اثر این حذف و تحلیل آن توسط مکان ریشه در مراجع [2] و [8] آمده است.

با توجه به پیشرفت چشمگیر در زمینه طراحی سیستم‌های کنترل به کمک کامپیوتر، استفاده از نرم‌افزارهای مناسب برای تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مراجع [4-10]، [4-11] و [4-12] را شاید بتوان از پیشگامان روش‌های ترسیم مکان ریشه توسط کامپیوتر داشت. لیکن امروزه از نرم‌افزارهای Matlab، ACSP و یا همراه با کتاب [3] و بسیاری از نرم‌افزارهای دیگر می‌توان برای ترسیم کامپیوتری مکان ریشه سود جست.

بسیاری از سیستم‌های صنعتی دارای تأخیر زمانی^۱ می‌باشند، برای قواعد ترسیم مکان ریشه برای سیستم‌های تأخیردار به مراجع [۴-۱۵] ، [۱] ، [۲] ، [۳] ، [۹] و یا [۱۱] مراجعه شود. مرجع [۱۱] عمیق‌تر از سایر مراجع به این موضوع پرداخته است.

- برای ترسیم مکان ریشه سیستم‌های زمان - گستته^۲ در تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل دیجیتال تقریباً (بجز محدوده پایداری) می‌توان قواعد ارایه شده در این بخش را به همین صورت بکار بست. ترسیم مکان هندسی ریشه‌های سیستم‌های زمان - گستته در [۲۶]

به تفصیل آورده شده است.

1- Time delay
2- Discrete-time



۵

تحلیل پاسخ فرکانسی

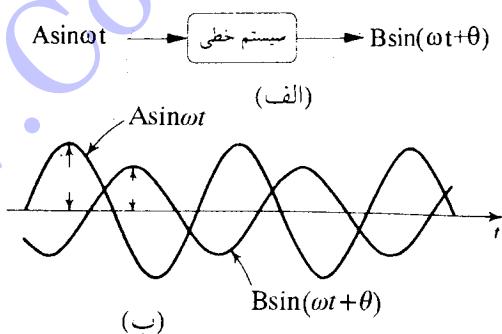
اهداف فصل:

- ۱- آشنایی با ایده تحلیل پاسخ فرکانسی سیستم‌های خطی
- ۲- رسم مشخصه‌های پاسخ فرکانسی تابع تبدیل به صورت نمودارهای دامنه و فاز بر حسب فرکانس: دیاگرام بود
- ۳- دیاگرام بود توابع تبدیل سیستم‌های خطی
- ۴- آشنایی با سیستم‌های غیر می‌نیم فاز و سیستم‌های تأخیر دار
- ۵- کاربرد دیاگرام‌های بود در شناسایی توابع تبدیل سیستم‌های نامعلوم
- ۶- نمودارهای نایکوئیست: نمودار دامنه بر حسب زاویه فاز
- ۷- نمودارهای نایکوئیست سیستم‌های نوع صفر، یک و دو
- ۸- تحلیل پایداری سیستم‌های خطی با نمودارهای نایکوئیست: معیار پایداری نایکوئیست
- ۹- نمودارهای معکوس نایکوئیست و معیار پایداری
- ۱۰- حاشیه بهره و حاشیه فاز در نمودارهای نایکوئیست
- ۱۱- چارت نیکولز و پاسخ فرکانسی سیستم حلقه - بسته
- ۱۲- مشخصه‌های عملکرد سیستم براساس پاسخ فرکانسی

۱-۵ مقدمه

در بررسی سیستم‌های کنترل خطی به روش کلاسیک، دو شیوه اساسی برای تحلیل و بهبود عملکرد سیستم وجود دارد که بدون حل معاملات دیفرانسیل حاکم بر سیستم عمل می‌کنند. یکی از این روشها مکان ریشه است که در فصل چهارم مفصل‌آرایه گردید. تحلیل و طراحی سیستم کنترل در روش مکان ریشه، با بررسی رفتار ریشه‌های حلقه - بسته در صفحه ۴ در پاسخ به تغییر پارامتری در سیستم انجام می‌یابد. این پارامتر همانطور که در فصل قبل مشاهده شد، عموماً بهره سیستم حلقه - باز است. لیکن هر پارامتر دیگری از سیستم نیز می‌تواند باشد. تحلیل پاسخ فرکانسی^۱ روش دیگری است که در این فصل به بررسی آن خواهیم پرداخت. در تحلیل پاسخ فرکانسی برخلاف مکان ریشه، بهره سیستم و سایر پارامترهای آن ثابت فرض شده، تغییرات دامنه^۲ و فاز^۳ تابع تبدیل (۵) G در پاسخ به تغییرات قطب‌های تابع تبدیل در نظر گرفته می‌شود.

توجه کنید که هر قطب در صفحه ۵ از یک قسمت حقیقی و یک قسمت موهومی تشکیل می‌شود، به عبارت دیگر $\sigma + j\omega = \sigma + j\omega$ و یک حالت بسیار مهم هنگامی است که $\sigma = 0$ و $\omega = s$. همانطور که از شکل ۱-۵ (الف) و (ب) مشاهده می‌شود و از تئوری سیستم‌های خطی می‌دانیم، پاسخ یک سیستم خطی پایدار به ورودی سینوسی $A \sin(\omega t)$ که در آن A اندازه ورودی است، خود نیز سینوسی است به عبارت دیگر، $(b) y(t) = B \sin(\omega t + \theta)$ که در



شکل ۱-۵ (الف) سیستم خطی (ب) سیگنال‌های ورودی و خروجی

1- Frequency response

2- Magnitude

3- Phase

آن B اندازه خروجی است و θ نیز اختلاف فاز بین سیگنال‌های ورودی و خروجی می‌باشد. برای نشان دادن این مطلب، سیستم خطی در نظر گرفته شده را با تابع تبدیل (s) نشان دهد. پاسخ حالت - ماندگار یک سیستم خطی پایدار تغییر نماید با زمان به ورودی سینوسی، به شرایط اولیه بستگی ندارد و از این‌رو می‌توان شرایط اولیه سیستم را صفر عرض کرد (به فصل دوم مراجعه شود). تبدیل لاپلاس سیگنال ورودی $u(t) = A \sin \omega t$ برابر است با

$$U(s) = \mathcal{L}(u(t)) = \frac{\omega A}{s^2 + \omega^2} \quad (1-1-5)$$

و لذا تبدیل لاپلاس خروجی عبارتست از

$$Y(s) = G(s) \frac{\omega A}{s^2 + \omega^2} \quad (2-1-5)$$

دو حالت را می‌توان برای (s) Y در نظر گرفت. در حالت اول قطب‌های (s) Y متمایز و در حالت دوم قطب‌های (s) Y مکرر را نیز شامانی می‌شوند. این دو حالت را به طور جداگانه بررسی می‌کنیم.

حالت اول: اگر قطب‌های (s) Y متمایز باشند، معادله $(2-1-5)$ را می‌توان بدین صورت

نوشت

$$Y(s) = \frac{b(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} \frac{\omega A}{s^2 + \omega^2} \quad (3-1-5)$$

که در آن (s) b چند جمله‌ای صفر تابع تبدیل و p_1, p_2, \dots, p_n قطب‌های $G(s)$ هستند. بسط کسرهای جزیی معادله $(3-1-5)$ خواهد داد

$$Y(s) = \frac{a}{s+j\omega} + \frac{\bar{a}}{s-j\omega} + \frac{b_1}{s+p_1} + \frac{b_2}{s+p_2} + \dots + \frac{b_n}{s+p_n} \quad (4-1-5)$$

که در آن a و b_i $i=1, \dots, n$ ثابت‌های مناسب و \bar{a} مختلط مزدوج a است. دقت کنید که دو عبارت اول سمت راست معادله $(4-1-5)$ از ورودی و عبارت باقی مانده از تابع تبدیل سیستم بدست آورده شده‌اند. با گرفتن عکس تبدیل لاپلاس از معادله $(4-1-5)$ ، برای $t \geq 0$ بدست می‌آوریم

$$y(t) = a e^{-j\omega t} + \bar{a} e^{j\omega t} + b_1 e^{-p_1 t} + b_2 e^{-p_2 t} + \dots + b_n e^{-p_n t} \quad (5-1-5)$$

برای یک سیستم پایدار قطبهای $i = 1, \dots, n$ به سمت حقیقی منفی خواهند داشت. بنابراین با میل کردن به سمت بی‌نهایت، عبارات $e^{-p_i t}$ به سمت صفر میل خواهند کرد. لذا، کلیه عبارات در معادله (۴-۱-۵) بجز دو عبارات اول در حالت - ماندگار صفر خواهند شد.

حالت دوم: اگر $G(s)$ علاوه بر قطبهای متمایز قطبهای مکرر نیز داشته باشد. بن قطبها را با p_j نشان داده و با تعدد m_j فرض می‌کنیم. در این صورت با عکس تبدیل لاپلاس از

$$Y(s) = \frac{b(s)}{(s+p_1) \dots (s+p_j)^{m_j} \dots (s+p_n)} \frac{\omega A}{s^r + \omega^2} \quad (4-1-5)$$

y شامل عباراتی مانند $t^{h_j} e^{-p_j t}$ خواهد بود، که در آن $h_j = 0, 1, \dots, m_j - 1$. برای یک سیستم پایدار عبارات $t^{h_j} e^{-p_j t}$ به ازاء j به سمت بی‌نهایت، به سمت صفر میل خواهند کرد. از بررسی دو حالت ۱ و ۲ در می‌باییم که در هر دو حالت، پاسخ حالت - ماندگار به صورت زیر خواهد بود:

$$y_{ss}(t) = a e^{j\omega t} + \bar{a} e^{-j\omega t} \quad (7-1-5)$$

که در آن ثابت a را از معادله (۴-۱-۵) بدین صورت تعیین می‌کنیم

$$a = G(s) \frac{\omega A}{s^r + \omega^2} (s + j\omega) \Bigg|_{s=-j\omega} = -\frac{A G(-j\omega)}{r j} \quad (8-1-5)$$

و همچنین

$$\bar{a} = G(s) \frac{\omega A}{s^r + \omega^2} (s - j\omega) \Bigg|_{s=j\omega} = \frac{A G(j\omega)}{r j} \quad (9-1-5)$$

از آنجاییکه $G(j\omega)$ یک کمیت مختلط است، می‌توان آنرا به صورت قطبی زیر نوشت

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\theta} \quad (10-1-5)$$

که در آن $|G(j\omega)|$ نشان دهنده دامنه $G(j\omega)$ و θ نشان دهنده زاویه $G(j\omega)$ است.

به عبارت دیگر

$$\theta = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left[\frac{\text{قسمت موهومی}}{\text{قسمت حقیقی}} \right] \quad (۱۱-۱-۵)$$

توجه کنید که θ می تواند منفی، مثبت و یا صفر باشد. هم چنین

$$G(-j\omega) = |G(-j\omega)| e^{-j\theta} = |G(j\omega)| e^{+j\theta} \quad (۱۲-۱-۵)$$

از معادله های (۷-۱-۵)، (۹-۱-۵)، (۸-۱-۵) و (۱۰-۱-۵) بدست می ازیم

$$\begin{aligned} y_{ss}(t) &= A |G(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \theta)} - e^{-j(\omega t + \theta)}}{2j} \\ &= A |G(j\omega)| \sin(\omega t + \theta) \\ &= B \sin(\omega t + \theta) \end{aligned} \quad (۱۳-۱-۵)$$

که در آن $B = A |G(j\omega)|$

بنابراین یک سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان پایدار تحت ورودی سینوسی، در حالت ماندگار نیز یک خروجی سینوسی با همان فرکانس دارد و تنها در حالت کلی دامنه و فاز سیگنال خروجی با دامنه و فاز سیگنال ورودی تفاوت خواهد داشت. در واقع دامنه خروجی برابر با حاصلضرب دامنه سیگنال ورودی A و اندازه تابع تبدیل $|G(j\omega)|$ است و اختلاف زاویه فاز سیگنال ورودی و خروجی برابر با $\angle G(j\omega) = \theta$ می باشد. (به شکل ۱-۵ مراجعه کنید).

به خروجی سیستم در این حالت پاسخ فرکانسی و به تابع $G(j\omega)$ تابع تبدیل سینوسی گفته می شود. توجه کنید که برای ورودی های سینوسی داریم

$$\frac{|G(j\omega)|}{|G(j\omega)|} = \frac{B}{A}$$

نتقال فاز خروجی سینوسی نسبت به ورودی سینوسی $\angle G(j\omega)$

مثال ۱-۵

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{3}{s+2}$$

تابع تبدیل سینوسی و پاسخ فرکانسی این سیستم با جایگزینی ω با $j\omega$ بدست خواهد آمد. لذا

$$G(j\omega) = \frac{\omega}{j\omega + 2}$$

نمایش

$$|G(j\omega)| = \frac{\omega}{(\omega^2 + 4)^{1/2}}, \quad \angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \left[\frac{\omega}{2} \right]$$

داده‌های پاسخ فرکانسی این سیستم در جدول ۵-۱ نشان داده شده‌اند.

جدول ۵-۱ داده‌های پاسخ فرکانسی سیستم مثل ۵-۵

فرکانس ω	دامنه $ G(j\omega) $	زاویه $\angle G(j\omega)$
۰	۱/۵	۰°
۲	۱/۰۶۱	-۴۵°
۱۰	۰/۲۹۴	-۷۸/۷۰°
∞	۰	-۹۰°

تحلیل حوزه فرکانسی سیستم‌های خطی را می‌توان توسط روش‌های زیر اعمال کرد:

۱- دیاگرام‌های بود

۲- نمودارهای نایکوئیست (یا قطبی)

۳- چارت نیکولز

در بخش‌های بعد به توضیح تفصیلی این روشها خواهیم پرداخت.

۵-۵ دیاگرام‌های بود

هنگامی که دامنه ورودی یک سیستم خطی تغییر نماید، با زمان پاسیونزیه صورت سینوسی با زمان تغییر می‌کند، خروجی آن نیز در حالت ماندگاریه صورت سینوسی است. دامنه آن ضریبی از دامنه سینگنال ورودی است و ممکن است که اختلاف فازی وجود داشته باشد. اگر دامنه سینگنال ورودی ثابت نگه داشته شده باشد، دامنه به بهره خروجی و هم‌جهتی اختلاف فاز آن را می‌توان برای گستره‌ای از مقادیر فرکانسی بیدار نمود. بدست مده دامنه و اختلاف فاز بر حسب فرکانس می‌توان دو نمودار رسم کرد، بهینه‌ترین نتیجه می‌توان

مشخصه‌های تابع تبدیل سیستم را بر حسب پاسخ فرکانسی آن به صورت دو نمودار، یکی دامنه بر حسب فرکانس و دیگری فاز بر حسب فرکانس تعیین نمود. همانطور که خواهیم دید، روش بهتر و بسیار سریعتر رسم نمودارهای دامنه و یا فاز بر حسب فرکانس، استفاده از مقادیر لگاریتمی دامنه و رسم این نمودارها بر حسب لگاریتم فرکانس است. بکارگیری لگاریتم، ضرب و تقسیم عوامل را به جمع و تقسیم تبدیل می‌کند. به عبارت دیگر

$$\log ab = \log a + \log b$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

هم چنین داریم

$$\log a^x = x \log a$$

ایده بکارگیری این روش تحلیل پاسخ فرکانسی، نخستین بار توسط مهندسی بنام بود^۱ در طراحی آمپلی فایرهای فیدبک مطرح گردید. بود با بکارگیری مقدار لگاریتمی دامنه بر روی یک مقیاس خطی و رسم آن بر حسب مقیاس غیر خطی لگاریتمی فرکانس، طراحیهای خود را انجام داد. این نمودارهای پاسخ فرکانسی را هنگامی که با نمودارهای متناظر اختلاف فاز بر روی یک محور خطی بر حسب لگاریتم فرکانس ترکیب شوند نمودارهای بود^۲ می‌نامند. نمودارهای بود و یا به عبارت دیگر نمودارهای دامنه و فاز بر حسب لگاریتم فرکانس. بر روی کاغذهای نیمه لگاریتمی^۳ کشیده می‌شوند. در واقع محور عمودی دامنه یا فاز، به صورت خطی مقیاس بندی شده است و حال آنکه محور افقی به صورت غیر خطی با مقیاس لگاریتم فرکانس رسم شده است. بدین ترتیب می‌توان از گستره فرکانسی بسیار وسیعتری نسبت به مقیاس خطی برای نمایش پاسخ فرکانسی استفاده کرد. از این‌رو فرکانس‌های پائین تر نیز دقیق‌تر و واضح‌تر نمایش داده می‌شوند.

تابع تبدیل یک سیستم خطی یک تابع مختلف است و می‌توان آنرا در مختصات قطبی
حسب دامنه و فاز به صورت زیر نشان داد

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)} \quad (1-2-5)$$

که در آن سیگنال ورودی، سینوسی با فرکانس ω رادیان بر ثانیه است. اگر از معادله (۲-۵-۱) لگاریتم در مبنای ۱۰ گرفته شود داریم:

$$\begin{aligned} \log G(j\omega) &= \log |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)} \\ &= \log |G(j\omega)| + \log e^{j\angle G(j\omega)} \\ &= \log |G(j\omega)| + \log_{10} e \log_{10} e^{j\angle G(j\omega)} \\ &= \log |G(j\omega)| + j \cdot 0.434 \angle G(j\omega) \end{aligned} \quad (2-2-5)$$

(در استنتاج معادله (۲-۲-۵) از معادله ما قبل خود از رابطه $\log_{10} x = \log_e x \cdot \log_{10} e$ استفاده شده است). بنابراین از معادله (۲-۲-۵) داریم که قسمت حقیقی لگاریتم تابع تبدیل، لگاریتم دامنه، $|\log|G(j\omega)|$ ، و قسمت موهومی آن متناسب با زاویه $\angle G(j\omega)$ است. در رسم نمودارهای بود از فاکتور $0.434/\omega$ صرفنظر و تنها زاویه $\angle G(j\omega)$ در نظر گرفته می‌شود. در تحلیل پاسخ فرکانسی، واحدی را که عموماً برای لگاریتم دامنه بکار می‌گیریم، دسی دبال^۱ است. توجه کنید که تابع تبدیل، نسبت خروجی به ورودی سیستم است و متغیرهای خروجی و ورودی لزوماً از یک واحد نمی‌باشند. برای مثال خروجی ممکن است بر حسب رادیان بر ثانیه و ورودی بر حسب ولت باشد. لگاریتم دامنه یک تابع تبدیل $G(j\omega)$ که بر حسب دسی دبال بیان شده، عبارتست از

$$20 \log |G(j\omega)| \text{ dB}$$

این کمیت لگاریتم دامنه^۲ نامیده شده و با Lm نشان داده می‌شود. بنابراین

$$\text{Lm}G(j\omega) = 20 \log |G(j\omega)| \text{ dB} \quad (2-2-6)$$

از آنجاییکه تابع تبدیل تابعی از فرکانس است، لگاریتم دامنه نیز تابعی از فرکانس است. دو واحدی که برای باندهای فرکانسی یا نسبتهای فرکانسی استفاده می‌شوند، اکتاو^۳ و دهکده^۴ هستند. اکتاو یک باند فرکانسی از $\sqrt{2}$ تا $\sqrt{2}$ است. که در آن $= 2^{\frac{1}{10}} = 1.059$. اکتاوین باند فرکانسی از ۱ تا ۲ هرتز یک اکتاو در طول است و همچنین باند فرکانسی از $2^{\frac{1}{10}} = 1.059$ تا 2 نیز یک اکتاو در طول است. تعداد اکتاوها در یک گستره فرکانسی از a تا b برابر است با

1- Decibel

2- Log magnitude

3- Octave

4- Decade

$$\frac{\log(f_2/f_1)}{\log 2} = \gamma / 22 \log \frac{f_2}{f_1} \quad (4-2-5)$$

اگر نسبت f_2/f_1 برابر با 10 باشد، یعنی $\log(f_2/f_1) = 10/\log 2$ ، آنگاه افزایشی برابر با 1 دهه از f_1 به f_2 خواهیم داشت. باند فرکانسی از 1 تا 10 یا $1/5$ تا 15 یک دهه طول دارد. تعداد دهه‌ها از f_1 به f_2 بدین صورت داده می‌شوند:

$$\log \frac{f_2}{f_1}$$

جدول ۴-۵ مقادیر دسی‌بل بعضی از اعداد را نشان می‌دهد. توجه کنید که برای یک عدد داده شده، مقدار دسی‌بل معکوس آن در یک منفی ضرب می‌شود. هم‌چنین اگر یک عدد دو برابر شود مقدار دسی‌بل آن 20 dB افزایش پیدا می‌کند و اگر یک عدد در فاکتور 10 ضرب شود مقدار دسی‌بل آن با -20 dB افزایش پیدا می‌کند.

جدول ۴-۵ مقدار دسی‌بل چند عدد

دسی‌بل	عدد
-40	0/01
-20	0/1
-6/02	0/5
0	1/0
6/02	2/0
20	10/0
40	100/0
46/02	200/0

تابع تبدیل پاسخ فرکانسی یک سیستم را در حالت کلی می‌توان به صورت زیر نوشت

$$G(j\omega) = \frac{k(j\omega+z_1)(j\omega+z_2)^r \dots}{(j\omega)^m (j\omega+p_1)[1 + (\xi/\omega_n)j\omega + (\nu/\omega_n^2)(j\omega)]^n} \quad (5-2-5)$$

که در آن k بهره ثابت، z_1 صفرها (r) تعدد صفر (z_r) و p_1 قطبها تابع تبدیل سیستم هستند. با گرفتن لگاریتم از طرفین معادله (۵-۲-۵)، داریم

$$\begin{aligned} \log G(j\omega) &= \log k + \log(j\omega + z_1) + r \log(j\omega + z_r) + \dots - m \log(j\omega) \\ &\quad - \log(j\omega + p_1) - \log \left[1 + (\frac{\gamma \xi}{\omega_n}) j\omega + (\frac{1}{\omega_n^2}) (j\omega)^2 \right] - \dots \end{aligned} \quad (6-2-5)$$

هر کدام از عبارات معادله (۶-۲-۵) را می‌توان به صورت یک عبارت مختلط نوشت که در آن یک قسمت حقیقی و یک قسمت موهومی وجود دارد. برای مثال

$$\begin{aligned} \log(j\omega + z_1) &= \log(\omega^2 + z_1^2)^{1/2} + j \angle(j\omega + z_1) \\ &= \log(\omega^2 + z_1^2)^{1/2} + j \tan^{-1} \frac{\omega}{z_1} \end{aligned} \quad (7-2-5)$$

همانند معادله (۵-۲-۵)، لگاریتم تابع تبدیل از معادله (۶-۲-۵) را می‌توان به صورت یک عبارت مختلط نوشت. در واقع دو دسته مختلف معادلات برای لگاریتم دامنه و فاز خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} LmG(j\omega) &= Lmk + Lm(j\omega + z_1) + rLm(j\omega + z_r) + \dots \\ &\quad - Lm(j\omega + p_1) - Lm \left[1 + (\frac{\gamma \xi}{\omega_n}) j\omega + (\frac{1}{\omega_n^2}) (j\omega)^2 \right] - \dots \end{aligned} \quad (8-2-5)$$

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega) &= \angle k + \angle(j\omega + z_1) + r \angle(j\omega + z_r) + \dots - m \angle(j\omega) \\ &\quad - \angle(j\omega + p_1) - \angle \left[1 + (\frac{\gamma \xi}{\omega_n}) j\omega + (\frac{1}{\omega_n^2}) (j\omega)^2 \right] + \dots \\ &= \angle k + \tan^{-1} \frac{\omega}{z_1} + r \tan^{-1} \frac{\omega}{z_r} + \dots - m 90^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega}{p_1} \\ &\quad - \tan^{-1} \frac{\gamma \xi \omega / \omega_n}{1 - \omega^2 / \omega_n^2} \dots \end{aligned} \quad (9-2-5)$$

که k یک عدد حقیقی است و لذا می‌تواند مشت و یا منفی باشد. گرچه مشت ممکن است زوایه 180° و در غیر این صورت 180° خواهد بود. برای رسم دیاگرام بود باید معادله‌های (۸-۲-۵) و (۹-۲-۵) را برای گستره فرکانسی مطلوب بدست نورد.

۱-۲-۵ ترسیم نمودارهای بود

با توجه به معادله (۵-۲-۵)، به طور کلی چهار عامل در مخرج و صورت یک تابع تبدیل حضور دارد که برای رسم کامل نمودار باید نمودار دامنه و فاز بر حسب لگاریتم فرکانس هر کدام از این عوامل را رسم کرد و سپس با جمع و یا تغیریق این عوامل، نمودار بود کامل تابع تبدیل سیستم را ترسیم نمود. این چهار عامل عبارتند از:

$$\frac{k}{(j\omega)^{\pm m} (1+j\omega T)^{\pm r}} \left[1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{1}{\omega_n^2} (j\omega)^2 \right]^{\pm p}$$

توجه کنید که عبارات شامل صفر و قطب به صورت $(j\omega + z_i)$ و $(j\omega + p_i)$ در معادله (۵-۲-۵) را می‌توان به صورت $(1+j\omega/z_i)$ و $(1+j\omega/p_i)$ یا در حالت کلی $(1+j\omega T)$ نوشت. در واقع این تغییر در نوشت عبارات صفرها و قطبها، رسم نمودار بود را ساده‌تر خواهد کرد ولی باید توجه داشت که بهره k نیز تغییر می‌کند و لذا تغییر بهره قبل از رسم نمودار بود الزامی است.

نمودار بود برای بهره ثابت

بهره ثابت k در تابع تبدیل $G(j\omega)$ بهره یا حاصلضرب بهره‌های یک یا چند بلوک توابع تبدیل سیستم است. در واقع بهره k یک عدد مختلط با قسمت موهومی صفر است.

مثال ۲-۵

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)=k$$

نمودار بود تابع تبدیل را برای (الف) $k=0$ ، (ب) $k=-10$ و (ج) $k=10$ رسم کنید.
نخست $s=j\omega$ را در تابع تبدیل داده شده جایگزین می‌کنیم و سپس معادله‌های دامنه و زاویه فاز را بدست می‌آوریم. داریم

$$G(j\omega)=k$$

و لذا

$$\text{Lm}G(j\omega) = 20 \log_{10} k$$

هم چنین

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega}{k}$$

(الف) برای $k = 10$ داریم

$$\text{Lm}G(j\omega) = 20 \text{dB} , \quad \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega}{10} = 0^\circ$$

بنابراین نمودار دامنه یک خط افقی 20dB و نمودار زاویه فاز یک خط افقی 0° است. دیاگرام بود این سیستم در شکل ۲-۵ نشان داده شده است. توجه کنید که محور لگاریتمی افقی برای فرکانس ω بر حسب رادیان بر ثانیه، و محور عمودی برای دامنه بر حسب دسیبل، در شکل ۲-۵ (الف) و برای زاویه فاز بر حسب درجه، در شکل ۲-۵ (ب) استفاده شده است. بنابراین نمودار بود در یک کاغذ نیمه لگاریتمی رسم شده است. مقیاس خطی عمودی برای به ترتیب دامنه و زاویه فاز در شکل‌های ۲-۵ (الف) و (ب) و مقیاس غیرخطی افقی برای فرکانس علامت‌گذاری شده‌اند.

(ب) برای $k = -10$ داریم

$$\text{Lm}G(j\omega) = 20 \text{dB} , \quad \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega}{-10} = -180^\circ$$

دیاگرام بود این سیستم نیز در شکل ۲-۵ نشان داده شده است.

(ج) برای $k = 1/10$ داریم

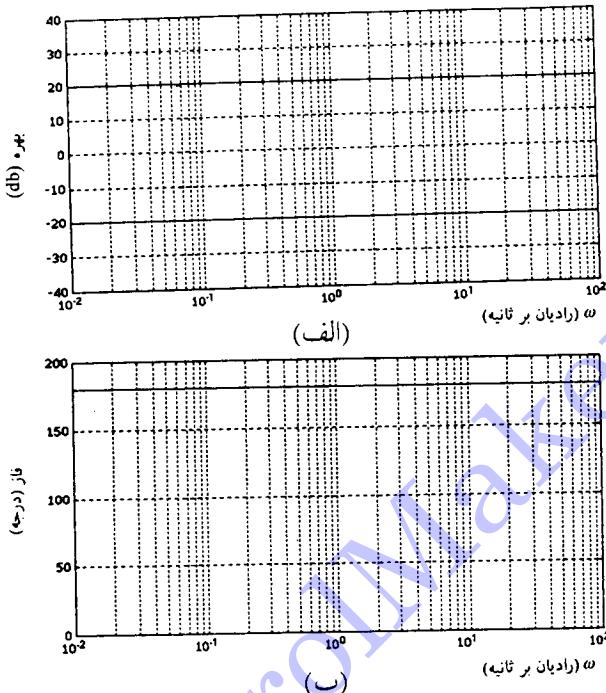
$$\text{Lm}G(j\omega) = 20 \log_{10} /1 = 20 \log_{10} \frac{1}{10} = -20 \text{dB} , \quad \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega}{1/10} = 0^\circ$$

دیاگرام بود این سیستم نیز در شکل ۲-۵ نشان داده شده است.

نمودارهای بود قطب - صفر در مبداء صفحه $s^{(\pm m)}$

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = (s)^{\pm 1}$$



شکل ۲-۵ دیاگرام بود سیستم مثال ۲-۵ (الف) نمودار دامنه (ب) نمودار فاز

مثالهای ۳-۵ و ۴-۵ مراحل رسم نمودارهای بود را به ترتیب برای تابع تبدیل با یک صفر و قطب در مبدأ صفحه ۵ نشان می‌دهند.

مثال ۳-۵

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = s$$

نمودار بود این تابع تبدیل را رسم کنید.

نخست $j\omega = s$ را در تابع تبدیل جایگزین کنید

$$G(j\omega) = j\omega$$

و لذا

$$\begin{aligned} \text{Lm } G(j\omega) &= 2 \cdot \log_{10} |G(j\omega)| \\ &= 2 \cdot \log_{10} |j\omega| \\ &= 2 \cdot \log_{10} \omega \end{aligned}$$

هم چنین

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega}{\zeta} = 90^\circ$$

با استفاده از رابطه های بدست آمده برای لگاریتم دامنه و زاویه فاز، می توان جدول ۳-۵ را برای مقادیر مختلفی از فرکانس های ω تشکیل داد. از جدول ۳-۵ به خوبی مشاهده می گردد که با افزایش ω از ۱ به ۲ یا ۴ یا ۸، ۶dB افزایش در لگاریتم دامنه داریم، بنابراین دامنه با نرخ ۶dB براکتاو افزایش دارد. به طور مشابهی، اگر ω یک دهه افزایش داشته باشد، لگاریتم دامنه مقدار ۲۰dB افزایش نشان می دهد. به عبارت دیگر، دامنه با نرخ ۲۰dB بر دهه افزایش دارد. شکل ۳-۵ دیاگرام بود این تابع تبدیل را نشان می دهد که با استفاده از جدول ۳-۵ رسم شده است.

مثال ۴-۵

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

نمودار بود این تابع تبدیل را رسم کنید.

جدول ۳-۵ داده های مثال ۴-۵

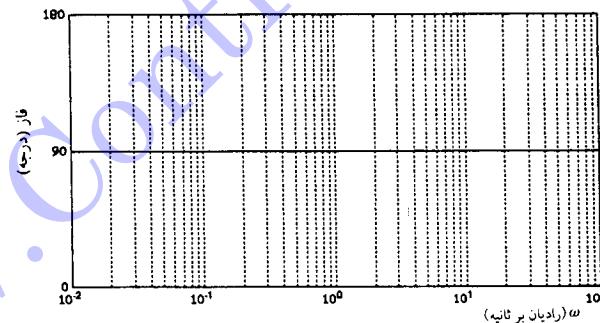
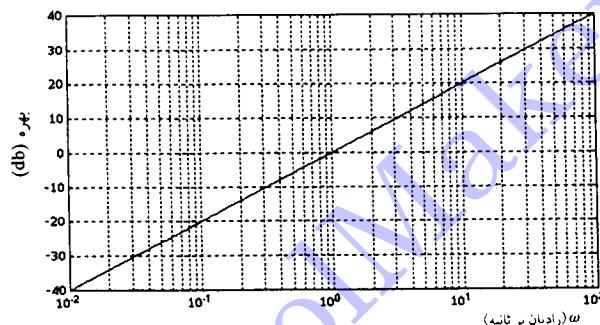
فرکانس (رادیان بر ثانیه)	دامنه (dB)	زاویه فاز (درجه)
۰/۰۱	-۴۰	۹۰
۰/۰۱	-۳۳/۹۸	۹۰
۰/۰۵	-۲۶/۰۲	۹۰
۰/۱	-۲۰	۹۰
۰/۲	-۱۳/۹۸	۹۰
۰/۵	-۶/۰۲	۹۰
۱/۰	۰/۰	۹۰
۲/۰	۶/۰۲	۹۰
۴/۰	۱۲/۰۴	۹۰
۱۰/۰	۲۰/۰	۹۰
۲۰/۰	۲۶/۰۲	۹۰
۴۰/۰	۳۲/۰۴	۹۰
۱۰۰/۰	۴۰	۹۰

نخست $\omega = s$ را در تابع تبدیل جایگزین کنید

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

و لذا

$$\begin{aligned} \text{Lm } G(j\omega) &= \pi \cdot \log_{10} |G(j\omega)| \\ &= \pi \cdot \log_{10} \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -\pi \cdot \log \omega \end{aligned}$$



شکل ۳-۵ دیاگرام بود تابع تبدیل مثال ۳-۵

هم چنین

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{1/\omega}{\circ}$$

$$= -90^\circ$$

جدول ۴-۵ با بکارگیری معادله‌های بدست آمده لگاریتم دامنه و فاز تابع تبدیل برای فرکانس‌های مختلف ω تشکیل شده است. شکل ۴-۵ دیاگرام بود این تابع تبدیل را نشان

می دهد که با استفاده از داده های جدول ۴-۵ رسم شده است.

شکل های ۳-۵ و ۴-۵ به وضوح نشان می دهند که دامنه تابع تبدیل با صفر در مبداء صفحه ۵ و قطب در مبداء صفحه ۵ به ترتیب با نرخ ۲۰ dB برابر ده افزایش و با نرخ ۲۰ dB برابر ده کاهش خواهد داشت. این افزایش و کاهش، مشخصه های صفر و قطب در مبداء می باشند.

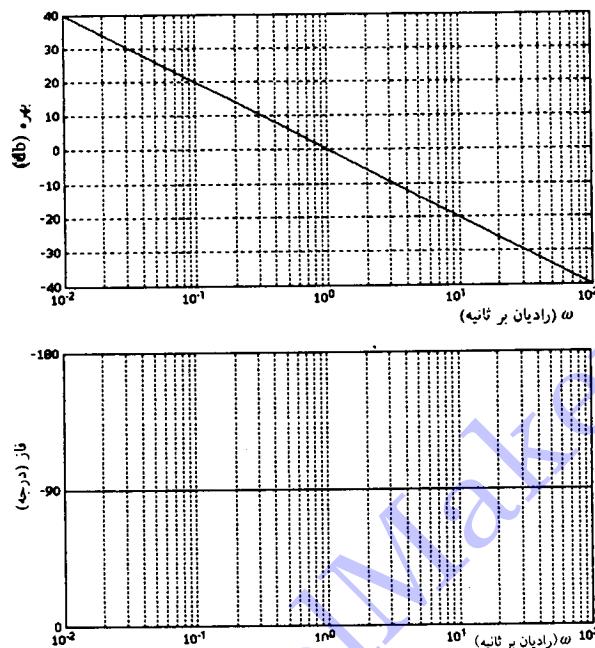
مفاهیم بالا را می توان به سادگی به حالتهای قطب و یا صفرهای مکرر در مبداء صفحه ۵ تعیین داد. برای مثال اگر N صفر در مبداء داشته باشیم، شبیب نمودار لگاریتم دامنه dB ۲۰ N می باشد. بر ده خواهد بود. به طور مشابهی، برای N قطب در مبداء صفحه ۵ شبیب نمودار دامنه dB -۲۰ N برابر ده خواهد بود. شکل ۵-۵ نمودارهای دامنه و فاز را برای توابع تبدیل $e^{j\omega t}$ نشان می دهد.

نمودارهای بود صفر یا قطب حقیقی: $(1+sT)^{\pm 1}$

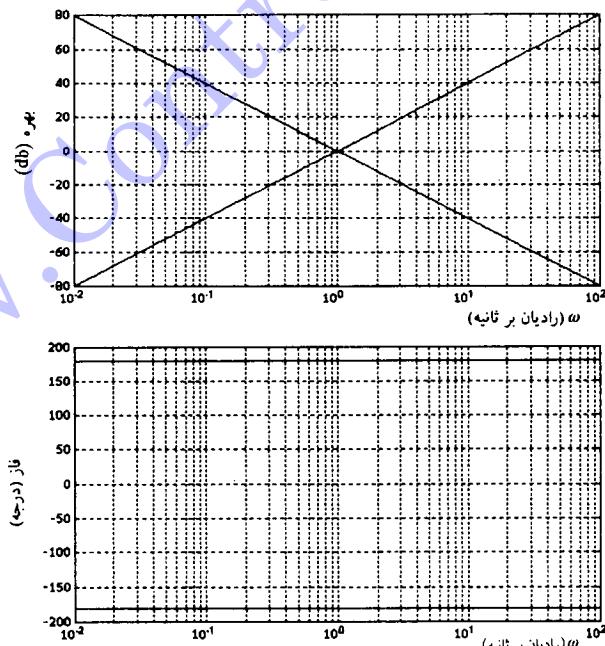
صفر یا قطب حقیقی به ترتیب به صورت $(1+sT)$ یا $(1+sT)^{-1}$ نوشته می شود. در مثالهای ۵-۵ و ۵-۶ نمودار بود یک صفر و قطب محدود را رسم خواهیم کرد.

جدول ۴-۵ داده های مثال ۵

فرکانس (رادیان بر ثانیه)	دامنه (dB)	زاویه فاز (درجه)
-۹۰	۴۰	۰/۰۱
-۹۰	۳۳/۹۸	۰/۰۲
-۹۰	۲۶/۰۲	۰/۰۵
-۹۰	۲۰	۰/۰۱
-۹۰	۱۳/۹۸	۰/۲
-۹۰	۶/۰۲	۰/۵
-۹۰	۰/۰	۱/۰
-۹۰	-۶/۰۲	۲
-۹۰	-۱۳/۹۸	۵
-۹۰	-۲۰	۱۰
-۹۰	-۲۶/۰۲	۲۰
-۹۰	-۳۳/۹۸	۵۰
-۹۰	-۴۰	۱۰۰



شکل ۴-۵ دیاگرام بود تابع تبدیل مثال



شکل ۵-۵ دیاگرام بود توابع تبدیل $2^{\pm 2}(s)$

مثال ۵-۵

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)H(s) = 1+sT$$

که در آن T ثابت زمانی سیستم است. نمودار بود این سیستم را برای $T=2$ ثانیه رسم کنید.
برای رسم نمودار لگاریتم دامنه و فاز، معادله‌های زیر را تشکیل می‌دهیم

$$\begin{aligned} \text{Lm} G(j\omega)H(j\omega) &= 20 \log |1+j\omega T| \\ &= 20 \log \sqrt{T^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

و همچنین

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega T}{1} = \tan^{-1} 2\omega$$

جدول ۵-۵ با جایگزینی مقادیر مختلف ω از معادله‌های بالا تشکیل شده است. توجه کنید که در فرکانس‌های پایین برای $\omega < T$ داریم

$$\text{Lm} G(j\omega)H(j\omega) \approx 0 \text{ dB}, \quad \angle G(j\omega)H(j\omega) \approx 0^\circ$$

جدول ۵-۵ داده‌های مثال ۵-۵

فرکانس (رادیان بر ثانیه)	دامنه (dB)	زاویه فاز (درجه)
۰/۱	۰	۰/۰۰۱
۰/۵۴	۰	۰/۰۰۵
۱/۱۴	۰	۰/۰۱
۷/۷۹	۰	۰/۰۷
۱۱/۳	۰/۱۷	۰/۱
۲۱/۸	۰/۶۴	۰/۲
۴۵	۳/۰۱	۰/۵
۶۳/۴	۶/۹۹	۱
۷۵/۹۶	۱۲/۳	۲
۸۴/۳	۲۰/۰۴	۵
۸۷/۱۴	۲۶/۰۳	۱۰
۸۸/۵۷	۳۲/۰۴	۵۰
۸۹/۴	۴۶	۱۰۰

برای مثال در $\omega = 0.025$ رادیان بر ثانیه داریم $\omega T = 0.025(2) = 0.05$ و لذا

$$\text{Lm}G(j\omega)H(j\omega) = 20 \log \sqrt{(0.05)^2 + 1} \approx 0.4 \text{dB}$$

و

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = \tan^{-1} 0.05 = 2.86^\circ$$

یک مقدار مهم فرکانس ω هنگامی رخ می‌دهد که $\omega T = 1$ باشد، دامنه در این فرکانس عبارتست از

$$\text{Lm}G(j\omega)H(j\omega) = 20 \log \sqrt{(1)^2 + 1} = 3.0 \text{dB}$$

و

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = \tan^{-1} 1 = 45^\circ$$

به فرکانس $\omega = 1/T$ ، فرکانس شکست^۱ یا فرکانس گوشه^۲ می‌گویند. فرکانس $\omega = 1/T$ را از آن جهت فرکانس شکست گویند که در این فرکانس شکستی در شب منحنی دامنه، همانطور که در شکل ۶-۵ نشان داده شده است، رخ می‌دهد. هم چنین فرکانس $\omega = 1/T$ را به علت اینکه نمودار مجانبی دامنه در فرکانس $\omega = 1/T$ در گوشه دو خط راست است (شکل ۶-۵)، فرکانس گوشه نیز نامیده‌اند.

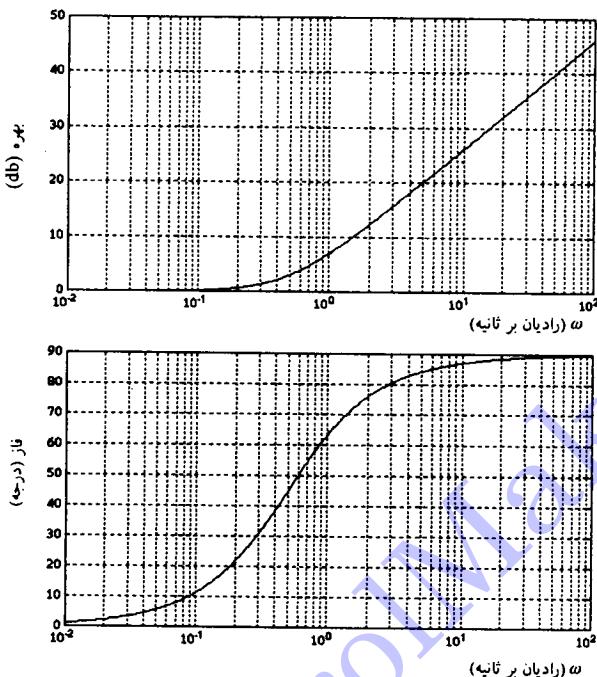
در فرکانس‌های بالا برای $\omega >> 1$ ، لگاریتم اندازه با مقدار ω داده خواهد شد. (به جدول ۵-۵ مراجعه کنید). همانطور که در شکل ۶-۵ نشان داده شده است بعد از فرکانس شکست $\omega = 1/T$ ، دامنه با افزایش ω با نرخ 20 dB بر دهه افزایش خواهد داشت. به طور خلاصه می‌توان گفت که برای $\omega > 1$ ، لگاریتم دامنه dB و برای $\omega > \infty$ لگاریتم دامنه دارای شبیه برابر با 20 dB بر دهه خواهد بود. به دو خط 0 dB و 20 dB بر دهه مجانبها نمودار بودگفته می‌شود و نقطه تلاقی آنها همان فرکانس شکست است.

مثال ۶-۵

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)H(s) = \frac{1}{sT+1}$$

که در آن ثابت زمانی T برابر با ۵ ثانیه است. دیاگرام بود این تابع تبدیل را رسم کنید.



شکل ۶-۵ دیاگرام بود تابع تبدیل مثال ۵-۵

در اینجا یک قطب محدود در $T = -1/s$ داریم. نخست تابع تبدیل فرکانسی را می‌نویسیم

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1}$$

و سپس معادله‌های متناظر با لگاریتم دامنه و زاویه را بدست می‌آوریم. بنابراین

$$\begin{aligned} \text{Lm}\left(\frac{1}{j\omega T + 1}\right) &= 2 \cdot \log \left| \frac{1}{j\omega T + 1} \right| \\ &= -2 \cdot \log \sqrt{(\omega T)^2 + 1} \\ &= -2 \cdot \log \sqrt{25\omega^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\angle\left(\frac{1}{j\omega T + 1}\right) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{5}$$

فرکانس شکست در $\omega = 1/5$ radian بر ثانیه است و لگاریتم دامنه در این فرکانس برابر با $-3/10$ dB است. جدول ۵-۶ با بکارگیری معادله‌های بالا و جایگزینی برای مقادیر مختلف

جدول ۶-۵ داده‌های مثال ۶-۵

فرکانس (رادیان بر ثانیه)	دامنه (dB)	زاویه فاز (درجه)
-۰/۰۱	-۰/۸۶	-۲/۸۶
۰/۰۲	-۰/۰۴	-۰/۷۱
۰/۰۵	-۰/۰۶	-۱۴/۰۴
۰/۱	-۰/۹۷	-۲۶/۰۸
۰/۲	-۳/۰۱	-۴۵
۰/۵	-۸/۶	-۶۸/۲
۱	-۱۴/۱۵	-۷۸/۶۹
۲	-۲۰/۰۴	-۸۴/۲۹
۴	-۲۶/۰۳	-۸۷/۱۳
۱۰	-۳۳/۹۸	-۸۸/۸۵
۲۰	-۴۰	-۸۹/۴۳
۴۰	-۴۶/۰۲	-۸۹/۷۱
۱۰۰	-۵۳/۹۸	-۸۹/۸۸

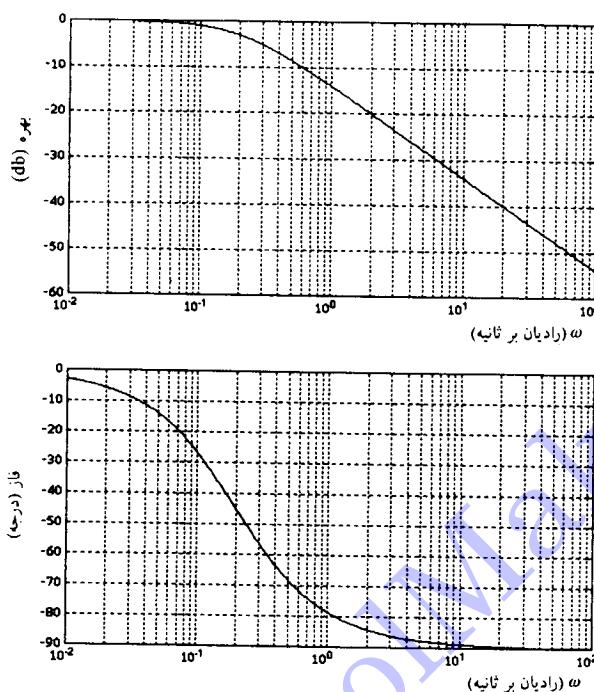
فرکانس بدست آمده است. توجه کنید که محدوده مهم پاسخ فرکانسی (در نمودارهای دامنه و زاویه فاز) معمولاً ± 2 دهه از فرکانس شکست است. بنابراین می‌توان برای رسم دیاگرام بود از مقادیر ω در گستره‌ای برابر با دو دهه بالا و پایین فرکانس شکست استفاده کرد. هم چنین برای رسم دقیق نمودارهای دامنه و زاویه فاز باید چندین مقدار ω را در یک دهه انتخاب کرد. داده‌های جدول ۶-۵ در شکل ۷-۵ رسم شده‌اند.

در اینجا تذکر دوباره این نکته مهم است که در فرکانس شکست، همانطور که در مثالهای ۶-۵ و ۶-۶ مشاهده شد، اندازه لگاریتم دامنه برای کلیه نمودارهای دامنه برابر با $3/0\text{dB}$ است. رسم مجانبها قبل از رسم دقیق دیاگرام بود می‌تواند برای توابع تبدیل پیچیده‌تر فوق العاده سودمند باشد، به این نکته در مثالهای بعد اشاره خواهیم کرد.

نمودار بود برای یک عبارت درجه دوم: $G(s)H(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

یک عامل مهم دیگر که در بسیاری از توابع تبدیل سیستم‌های صنعتی و عملی ظاهر می‌شود، عبارت درجه دوم است. عبارت درجه دوم معمولاً در مخرج تابع تبدیل ظاهر می‌شود و خواص آن در فصل دوم مفصلأً بررسی شدند. تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید:

$$G(s)H(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (10-2-5)$$



شکل ۷-۵ دیاگرام بود تابع تبدیل مثال ۶-۵

قطبهای این تابع تبدیل به مقدار نسبت میرایی $\frac{1}{\omega^2}$ بستگی دارند (فصل دوم). در واقع داریم

۱. اگر $1 < \frac{1}{\omega^2}$ ریشه‌های عبارت درجه دوم حقیقی و ساده‌اند و پاسخ متناظر به پله واحد میرای شدید است.
۲. اگر $1 = \frac{1}{\omega^2}$ ریشه‌های عبارت درجه دوم مکرر هستند و پاسخ متناظر به پله واحد میرای بحرانی است.
۳. اگر $1 > \frac{1}{\omega^2}$ ریشه‌های عبارت درجه دوم مختلط مزدوج هستند و پاسخ متناظر به پله واحد میرای ضعیف است.
۴. اگر $0 = \frac{1}{\omega^2}$ ریشه‌های عبارت درجه دوم موهومی محض هستند و پاسخ متناظر به پله واحد نوسانی است.

در مثالهای ۷-۵ تا ۱۰-۵ رسم نمودارهای بود را برای حالات بالا نشان می‌دهیم.

مثال ۷-۵

$$G(s)H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

در این حالت با مقایسه با فرم استاندارد $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$ ، بدست می‌آوریم

$$\omega_n = \sqrt{2} \quad \xi = 1/0.6$$

بنابراین قطبهای سیستم حقیقی و ساده می‌باشند. در واقع قطبهای سیستم در ۱-۱ و ۲-۲ قرار دارند. بنابراین

$$\begin{aligned} G(s)H(s) &= \frac{1}{(s+2)(s+1)} \\ &= \frac{0.5}{(0.5s+1)(s+1)} \end{aligned}$$

برای رسم دیاگرام بود داریم

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{0.5}{(0.5j\omega+1)(j\omega+1)}$$

لذا

$$\text{Lm}G(j\omega)H(j\omega) = 20\log 0.5 - 20\log \sqrt{(0.5\omega)^2 + 1} - 20\log \sqrt{\omega^2 + 1}$$

و

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{0.5\omega}{1} - \tan^{-1} \frac{\omega}{1}$$

وجه کنید که مقادیر فرکانس شکست برای دو عبارت بالا عبارتند از $\omega = 1$ رادیان بر ثانیه. از اینرو، یک گستره فرکانسی مناسب از $0/0$ تا 100 رادیان بر ثانیه می‌باشد، در این گستره فرکانسی دو دهه بالا و پایین فرکانس‌های شکست دربرگرفته خواهد شد. جدول ۷-۵ داده‌های بدست آمده از دو معادله بالا را در مقادیر مشخص شده فرکانسی نشان می‌دهد. نمودارهای دامنه و فاز و به عبارت دیگر دیاگرام بود این تابع تبدیل با بکارگیری مقادیر تعیین شده در جدول ۷-۵ در شکل ۸-۵ رسم شده است.

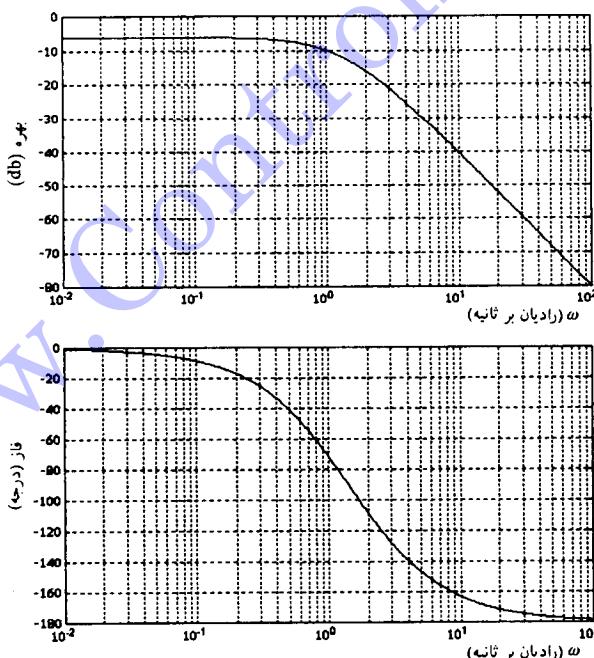
مثال ۸-۵

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)H(s) = \frac{1}{(s+0.1)^2}$$

جدول ۷-۵ داده‌های مثال ۷-۵

فرکانس (رادیان بر ثانیه)	دامنه (dB)	زاویه فاز (درجه)
-۰/۱۸۶	-۶/۰۲	۰/۰۱
-۱/۷۲	-۶/۰۲	۰/۰۲
-۴/۲۹	-۶/۰۳	۰/۰۵
-۸/۰۷	-۶/۰۷	۰/۱
-۱۷/۰۲	-۶/۲۳	۰/۲
-۴۰/۶	-۷/۲۵	۰/۵
-۷۱/۵۸	-۱۰	۱
-۱۰۸/۴۳	-۱۶/۰۲	۲
-۱۳۹/۳۹	-۲۵/۳۱	۴
-۱۶۹/۹۸	-۴۰/۲۱	۱۰
-۱۷۱/۴۳	-۵۲/۰۹	۲۰
-۱۷۰/۷	-۶۴/۰۹	۴۰
-۱۷۸/۲۸	-۸۰	۱۰۰



شکل ۸-۵ نمودار بود تابع تبدیل مثال ۷-۵

این تابع تبدیل یک قطب مکرر در $\omega = 1$ دارد و لذا $G(j\omega)H(j\omega)$ است. نخست تابع تبدیل را برای رسم دیاگرام بود، به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)^2}$$

بنابراین

$$\text{Lm} G(j\omega)H(j\omega) = 2 \log 1 - 4 \log \sqrt{(1\omega)^2 + 1}$$

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = -2 \tan^{-1} \frac{1\omega}{1}$$

داده‌های بدست آمده برای مقادیر مختلف فرکانس ω در جدول ۹-۵ آورده شده و دیاگرام بود. این تابع تبدیل در شکل ۹-۵ نشان داده شده است.

مثال ۹-۵

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

در این حالت $\omega_0 = 1$ و ریشه‌های عبارت درجه دوم مختلف مزدوج می‌باشند. داریم

$$G(s)H(s) = \frac{1}{(s+j+1)(s-j+1)}$$

بنابراین

$$\text{Lm} G(j\omega)H(j\omega) = -2 \log \sqrt{(\omega+1)^2 + 1} - 2 \log \sqrt{(\omega-1)^2 + 1}$$

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega+1}{1} - \tan^{-1} \frac{\omega-1}{1}$$

داده‌های بدست آمده برای مقادیر مختلف فرکانس ω در جدول ۹-۵ آورده شده و دیاگرام بود. این تابع تبدیل در شکل ۹-۵ نشان داده شده است.

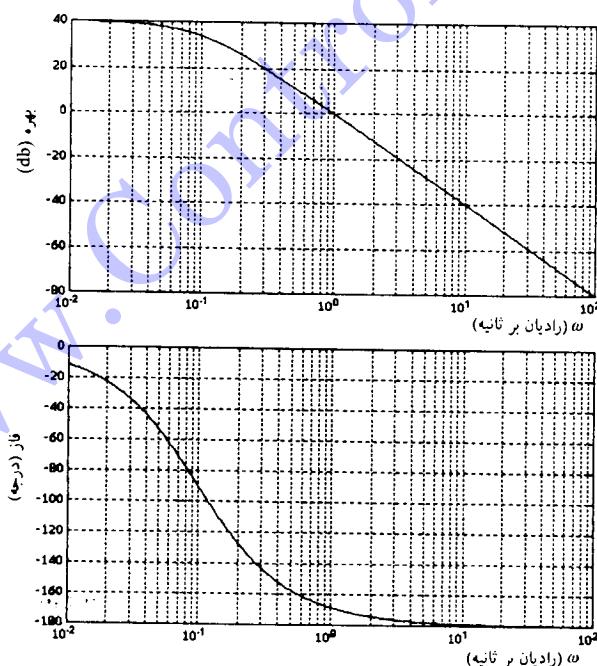
مثال ۱۰-۵

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)H(s) = \frac{1}{s^2 + 4}$$

جدول ۸-۵ داده‌های مثال ۵-۸

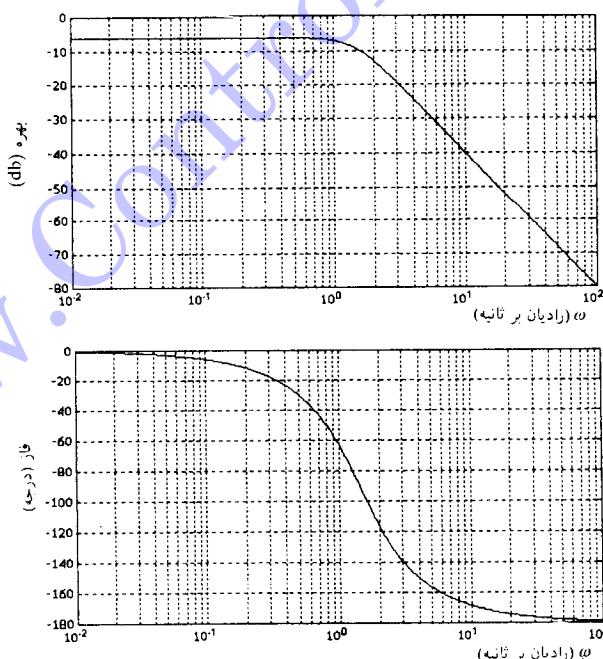
فرکانس (رادیان بر ثانیه)	دامنه (dB)	زاویه فاز (درجه)
-۱۱/۴۲	۳۹/۹۱	۰/۰۱
-۲۲/۶۲	۳۹/۶۶	۰/۰۲
-۵۳/۱۳	۳۸/۰۶	۰/۰۵
-۹۰	۳۳/۹۸	۰/۱
-۱۲۶/۸۷	۲۶/۰۲	۰/۲
-۱۵۷/۳۸	۱۱/۷	۰/۰
-۱۶۸/۵۸	-۰/۰۹	۱
-۱۷۴/۲۷	-۱۲/۰۶	۲
-۱۷۷/۱۴	-۲۴/۰۹	۴
-۱۷۸/۸۵	-۴۰	۱۰
-۱۷۹/۴۳	-۵۲/۰۴	۲۰
-۱۷۹/۷۱	-۶۴/۰۸	۴۰
-۱۷۹/۸۸	-۸۰	۱۰۰



شکل ۹-۵ دیاگرام بود تابع تبدیل مثال ۵-۸

جدول ۹-۵ داده‌های مثال ۹-۵

فرکانس (رادیان بر ثانیه)	دامنه (dB)	زاویه فاز (درجه)
-۰/۰۷	-۶/۰۲	۰/۰۱
-۱/۱۵	-۶/۰۲	۰/۰۲
-۲/۸۷	-۶/۰۲	۰/۰۵
-۵/۷۴	-۶/۰۲	۰/۱
-۱۱/۰۳	-۶/۰۲	۰/۲
-۲۹/۷۴	-۶/۰۸	۰/۵
-۶۲/۴۳	-۶/۹۸	۱
-۱۱۶/۵۶	-۱۳/۰۱	۲
-۱۵۰/۲۵	-۲۴/۱۵	۴
-۱۶۸/۴۶	-۴۰	۱۰
-۱۷۴/۲۶	-۵۲/۰۴	۲۰
-۱۷۷/۱۳	-۶۴/۰۸	۴۰
-۱۷۸/۸۵	-۸۰	۱۰۰



شکل ۱۰-۵ دیاگرام بود تابع تبدیل مثال ۹-۵

نخست همانند قبل تابع تبدیل را به صورتی دوباره نویسی می‌کنیم که عبارت ثابت در مخرج واحد باشد، این کار محاسبه دامنه و زاویه فاز را ساده‌تر می‌کند. داریم

$$G(s)H(s) = \frac{1/25}{(0.05s + 1)(0.05s - 1)}$$

بنابراین

$$\text{Lm } G(j\omega)H(j\omega) = 20 \log 1/25 - 20 \log (0.05\omega + 1) - 20 \log (0.05\omega - 1)$$

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = -180^\circ$$

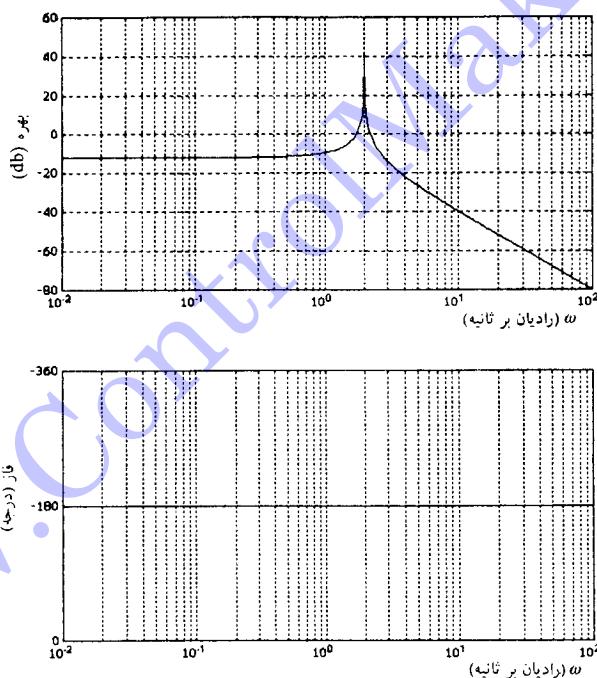
جدول ۵-۱۰ داده‌های مثال ۵-۱۰

فرکانس (رادیان بر ثانیه)	دامنه (dB)	زاویه فاز (درجه)
-180	-12/01	0/1
-180	-11/95	0/2
-180	-11/48	0/0
-180	-9/04	1/0
-180	-6/18	1/4
-180	-3/17	1/6
-180	2/38	1/8
-180	8/18	1/9
-180	∞	2/0
-180	7/74	2/1
-180	1/52	2/2
-180	-2/21	2/3
-180	-7/04	2/5
-180	-8/81	2/6
-180	-12/98	3/0
-180	-17/66	3/4
-180	-20/37	3/8
-180	-21/58	4
-180	-23/72	4/4
-180	-26/44	5
-180	-33/05	7
-180	-39/64	10
-180	-51/95	20
-180	-67/44	50

در این حالت فرکانس شکست در $\omega = 2$ رادیان بر ثانیه قرار دارد و دامنه تابع تبدیل در این فرکانس بی نهایت است. جدول ۱۰-۵ مقادیر لگاریتم دامنه و زاویه فاز تابع تبدیل را در یک گستره فرکانسی برای ω نشان می‌دهد. دیاگرام بود شکل ۱۱-۵ بر اساس داده‌های جدول ۱۰-۵ رسم شده است.

بعد از مثالهای ارایه شده برای رسم دیاگرام بود سیستم‌های درجه دوم، اکنون حالت کلی زیر را در نظر می‌گیریم

$$G(s)H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (11-2-5)$$



شکل ۱۱-۵ دیاگرام بود تابع تبدیل مثال ۱۰-۵

نخست تابع تبدیل داده شده با معادله (۱۱-۲-۵) را به صورت مناسب زیر بازنویسی می‌کنیم

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{[(j\omega/\omega_n)^2 + 2\xi(j\omega/\omega_n) + 1]} \quad (12-2-5)$$

همانطور که ملاحظه شد برای $\omega < \omega_n$ ، عبارت درجه دوم دو ریشه حقیقی دارد. برای $\omega > \omega_n$ ، ریشه‌های عبارت درجه دوم مختلط مزدوج می‌باشند. توجه کنید که تقریب‌های مجانبی، برای منحنی‌های پاسخ فرکانسی برای $\omega < \omega_n$ کوچک دقیق نخواهد بود، زیرا دامنه و فاز عبارت درجه دوم به مقادیر فرکانس شکست و نسبت میرایی بستگی خواهند داشت.

مجانب‌های نمودار بود را در حالت کلی به صورت زیر بدست می‌آوریم. از آنجاییکه

$$\text{LmG}(j\omega)H(j\omega) = -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (13-2-5)$$

برای فرکانس‌های پایین، یعنی $\omega < \omega_n$ ، از معادله (۱۳-۲-۵) داریم

$$-20 \log 1 = 0 \text{ dB} \quad (14-2-5)$$

بنابراین معادله (۱۴-۲-۵) نشان می‌دهد که مجانب فرکانس پایین یک خص افقی dB است.

برای فرکانس‌های بالا $\omega > \omega_n$ ، معادله (۱۳-۲-۵) می‌دهد

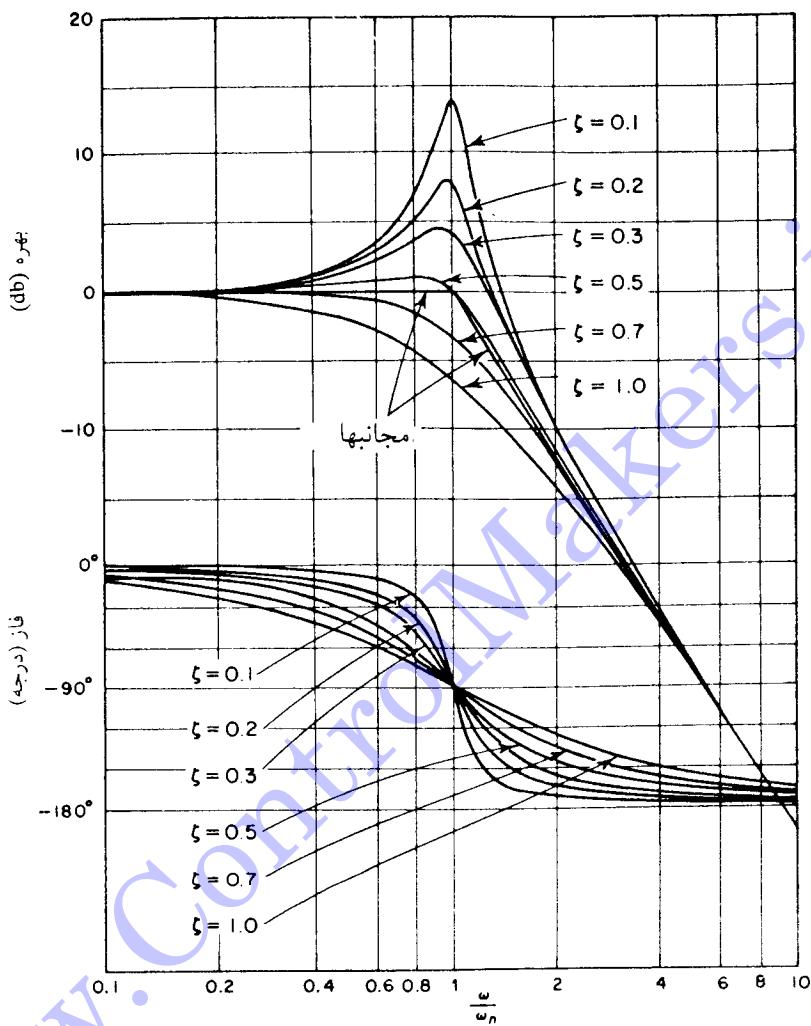
$$-20 \log \frac{\omega}{\omega_n} = -20 \log \frac{\omega}{\omega_n} \quad (15-2-5)$$

از معادله (۱۵-۲-۵) داریم که برای $\omega = \omega_n$ ، لگاریتم دامنه صفر dB خواهد شد و لذا این فرکانس، فرکانس شکست است و فرکانسی است که دو مجانب هم‌دیگر را قطع خواهند کرد. اگر ω را به میزان یک دهه افزایش دهیم داریم $\omega = 10\omega_n$ و لذ از معادله (۱۵-۲-۵) داریم

$$-20 \log \frac{10\omega_n}{\omega_n} = 40 \text{ dB}$$

و لذا مجانب فرکانس بالا، شبیه برآور با -40 dB بردهه دارد.

دو مجانب بدست آمده فرکانس بالا و پایین مستقل از ξ هستند. همانطور که از معادله (۱۲-۲-۵) ممکن است استنتاج شود، در نزدیکی فرکانس شکست $\omega = \omega_n$ یک سنتیغ تشدید ۱ رخ می‌دهد. اندیشه این سنتیغ توسط نسبت میریس تعیین می‌گردد. شکل ۱۲-۵ دیاگرام‌های دقیق بود و مجانب‌های فرکانس بالا و پایین را برای نمودارهای دامنه و فاز یک تابع تبدیلی داده شده با معادله (۱۱-۲-۵) را نشان می‌دهد. همانطور که از شکل ۱۲-۵ مشاهده



شکل ۱۲-۵ منحنیهای لگاریتم دامنه و منحنیهای زاویه فاز تابع تبدیل درجه دوم داده شده با معادله (۱۲-۲-۵)

می‌گردد. اگر چه مجانبهای توابع تبدیل داده شده برای مقادیر مختلف نسبت میرایی بخسان هستند، نیکن رفتار دیاگرام بود برای مقادیر مختلف نسبت میرایی کاملاً متفاوت است. زاویه فاز متناظر با تابع تبدیل داده شده با معادله (۱۲-۲-۵) عبارتست از

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{\omega_n/\omega}}{1 + (\omega/\omega_n)^2} \right] \quad (12-2-5)$$

زاویه فاز نیز تابعی از ω و θ است. در $\theta = \omega$ زاویه فاز صفر درجه است. در فرکانس شکست

از معادله (۱۶-۲-۵) داریم

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = -\tan^{-1} \left(\frac{2\zeta}{\omega_n} \right) = -\tan^{-1}\infty = -90^\circ$$

و برای فرکانس های بالا $\omega \rightarrow \infty$. از معادله (۱۶-۲-۵) داریم که زاویه فاز -180° خواهد شد.

توجه کنید که دیاگرام بود عبارت درجه دوم زیر

$$1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2$$

به سادگی با معکوس کردن علامت عبارتهای متناظر معادله (۱۶-۲-۵) بدست خواهد آمد.

۲-۲-۵ مراحل ترسیم دیاگرام های بود

در بخش ۱-۲-۵ ترسیم دیاگرام های بود چهار فاکتور سسی، بررسی شد. در عمل بسیاری از سیستم ها از یک یا چند فاکتور اشاره شده تشکیل می شوند. ترسیم دیاگرام های بود بدیل ماهیت جمع و تغییر شرندگی دیاگرام های بود بر روی مختصات لگاریتمی برای این سیستم ها بسیار ساده است. ترسیم دیاگرام های بود شامل مراحل زیر است:

- ۱- تابع تبدیل را به صورت حاصلضرب عوامل بخش ۱-۲-۵ بیان کنید.
- ۲- عوامل را به صورت مناسب پاسخ فرکانسی که در آن عبارات ثابت یک باشند، در آورید.

۳- در تابع تبدیل $\omega = j\omega$ را جایگزین کنید.

- ۴- فرکانس های شکست را در عوامل تعیین کنید.
- ۵- معادله های لگاریتم دامنه و زاویه فاز را برای تابع تبدیل داده شده بدست آورید.
- ۶- با بکارگیری معادله های لگاریتم دامنه و فاز بدست آمده از مرحله ۵، برای یک گستره فرکانسی مناسب، دامنه و زاویه فاز تابع تبدیل را محاسبه کنید. مقادیر انتخاب شده فرکانس به فرکانس های شکست تابع تبدیل بستگی خواهند داشت.
- گستره فرکانسی انتخاب شده معمولاً به ترتیب دو دهه بالا و دو دهه پایین بزرگترین و کوچکترین فرکانس های شکست را در بر می گیرد.

۷- با استفاده از جدول بدست آمده از مرحله ۶ دیاگرام بود رسم کنید.

همچنین می‌توان با استفاده از مجانبهای فرکانس بالا و پایین نمودارهای دامنه و فاز، یک شمای کلی و تقریبی از دیاگرام بود، قبل از رسم دقیق آن، ترسیم نمود. شایان ذکر است که امروزه با بکارگیری نرم افزارهای مناسب، ترسیم دیاگرام‌های بود توابع تبدیل بسیار پیچیده نیز به سرعت و با دقت بالا امکان پذیر است.

مثال ۱۱-۵

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{5(s+3)}{s(s+0.5)(s^2+s+2)}$$

این تابع تبدیل به صورت حاصلضرب عوامل بخش ۱-۲-۵ است، لیکن عوامل آن به صورت مناسب پاسخ فرکانسی نمی‌باشند. با بازنویسی تابع تبدیل به صورت مناسب داریم

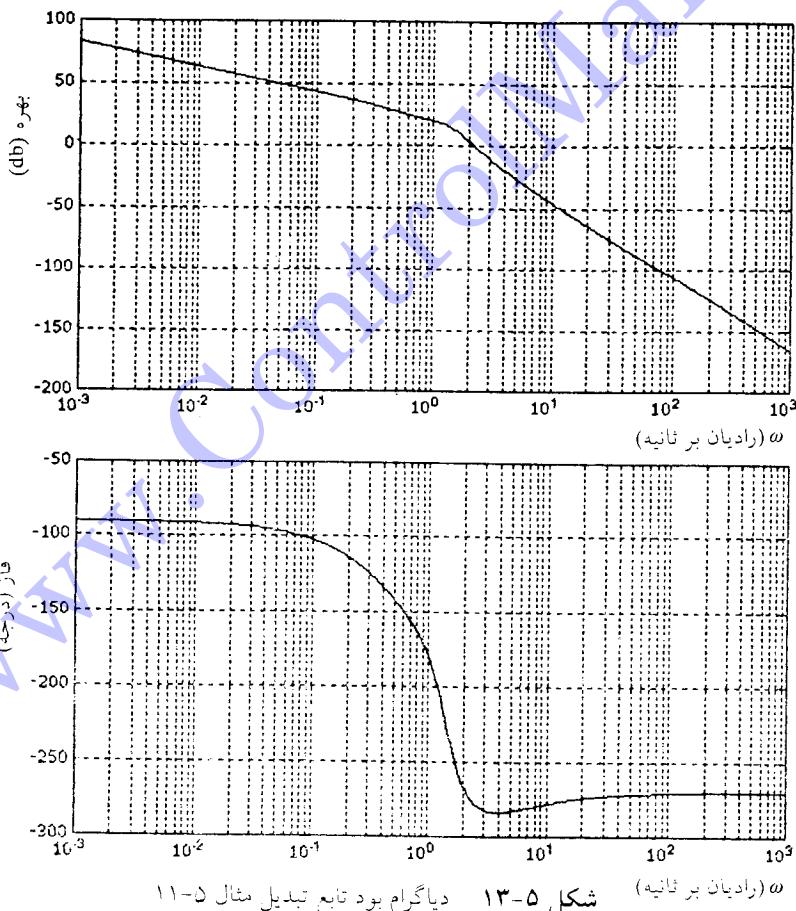
$$G(j\omega) = \frac{15((j\omega)/3 + 1)}{(j\omega)(j\omega + 1)(j\omega/2 + 1)}$$

جدول ۱۱-۵ مشخصه‌های مربوط به هر عامل را لیست کرده است. برای رسم دقیق دیاگرام بود، نخست مجانبهای نمودارهای لگاریتم دامنه و نمودار فاز هر کدام از عوامل تابع تبدیل را رسم می‌کنیم. برای بدست آوردن مجانبهای نمودارهای لگاریتم دامنه و نمودار فاز کل تابع تبدیل این مجانبهای نمودارها را با هم به طور جبری جمع می‌کنیم. برای رسم نمودار دقیق لگاریتم دامنه، می‌توان جدولی همانند جدولهای مثالهای قبل تنظیم نمود و مقدار دقیق لگاریتم دامنه تابع تبدیل را با جمع جبری مقادیر لگاریتم دامنه تابع تبدیل، می‌توان مقادیر مختلف بدست آورد. هم‌چنین برای رسم نسبتاً دقیق لگاریتم دامنه تابع تبدیل، می‌توان مقادیر فرکانس‌های مختلف را در یک اکتا و پایین و بالای فرکانس شکست هر فاکتور تعیین نمود. رسم دقیق لگاریتم دامنه تابع تبدیل در شکل ۱۳-۵ آورده شده است.

توجه کنید که در فرکانس‌های پایین $5/0$ ، اولین فرکانس شکست، تنها عوامل مؤثر $Lm(j\omega)^{-1}$ می‌باشد و تمامی عوامل دیگر مقدار صفر دارند. در فرکانس $5/0$ داریم $Lm(j\omega)^{-1} = 6/02$ و $Lm(j\omega)^{-1} = 23/5dB$ ولذا در این فرکانس نمودار دامنه تابع تبدیل مقدار

جدول ۱۱-۵ مشخصه‌های نمودارهای لگاریتم دامنه و زاویه فاز برای عوامل مختلف تابع تبدیل مثال ۱۱-۵.

مشخصه‌های زاویه	فرکانس شکست لگاریتم دامنه	عامل
ثابت $^{\circ}$	دامنه ثابت $+20/5\text{dB}$	نارде ۱۰
ثابت -90°	ثب ثابت -20dB بر دمه	نارде $(j\omega)^{-1}$
از $^{\circ}$ تا -90°	ثب صفر زیر فرکانس $\omega_1 = ۰/۵$	$(j\omega + \xi)^{-1}$
تغییر پیدا می‌کند	شکست و شب -20dB بر	
دهد بالایی فرکانس شکست		
از $^{\circ}$ تا $+90^{\circ}$ تغییر	ثب صفر زیر فرکانس $\omega_2 = ۳$	$((j\omega)/3 + 1)$
پیدا می‌کند	شکست و شب $+20\text{dB}$ بر	
بردهد بالایی فرکانس شکست		
از $^{\circ}$ تا -180° تغییر	ثب صفر زیر فرکانس $\omega_3 = \sqrt{2}$	$[(j\omega)^2/2 + (j\omega)/2 + 1]^{-1}$
پیدا می‌کند	شکست و شب -40dB بر	$\xi = ۰/۳۵۳۶$
دهد بالایی فرکانس شکست		



شکل ۱۳-۵ دیاگرام بود تابع تبدیل مثال ۱۱-۵

۲۹/۵۲dB دارد. زیر فرکانس $5/\omega$ نمودار دامنه تابع تبدیل دارای شبیه برابر -20 dB بر دهه می باشد که از عامل ${}^1(j\omega)$ ناشی شده است. برای فرکانس های بالاتر از $5/\omega$ عامل ${}^1(j2\omega+1)$ یک شبیب -20 dB بر دهه پیدا می کند که باید با شبیب قبلی جمع گردد. بعد از این فرکانس $(5/\omega)$ شبیب نمودار تا فرکانس شکست بعدی در $\sqrt{2}$ ، -40 dB بر دهه خواهد بود. در فرکانس های بالای $\sqrt{2}$ رادیان بر ثانیه عامل درجه دوم مؤثر می شود و شبیه برابر با -40 dB بر دهه خواهد داشت. لذا شبیب نمودار کلی دامنه از $\sqrt{2}$ تا 3 رادیان بر ثانیه برابر با -80 dB بر دهه می باشد. مقدار دامنه در $\sqrt{2}$ رادیان بر ثانیه برابر با $17/5$ dB است. در فرکانس بالای 3 رادیان بر ثانیه، آخرین فرکانس شکست، عامل $({}^1(j\omega)/3+1)$) مؤثر می شود و شبیب $+20$ dB بر دهه را با شبیب قبلی جمع می کند. بنابراین شبیب نمودار دامنه در فرکانس های بالای 3 رادیان بر ثانیه برابر با -6 dB بر دهه می شود و مقدار دامنه در فرکانس 8 رادیان بر ثانیه برابر با 10 dB است.

در رسم نمودار زاویه فاز از نکات زیر می توان استفاده کرد. عبارت ${}^1(j\omega)$ ، زاویه -90° خواهد داشت. (در واقع زاویه عبارت ${}^m(j\omega)$ برابر با ${}^0(-m)$ خواهد بود) برای عبارات ${}^{\pm 1}(j\omega T)$ ، در این حالت T برابر با 2 و $1/3$ است، زوایای دقیق فاز را یک اکتاو بالا و یک اکتاو پایین، یک دهه بالا و یک دهه پایین فرکانس های شکست بدست آورید و یک منحنی بین هر کدام از آنها رسم کنید. برای عبارت درجه دوم نیز، پس از تعیین θ و مراجعة به شکار ۱۲-۵ چند فرکانس را برای محاسبه دقیق زاویه فاز تعیین کنید و در این فرکانس ها زاویه فاز را به دست آورید. نمودار فاز کلی سیستم با جمع جبری کردن نمودارهای فاز عوامل به دست می آید. روابط زیر می توانند در رسم نمودار فاز بکار گرفته شوند:

$$\angle \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = (-m)90^\circ \quad (17-2-5)$$

که در آن m نوع سیستم است و

$$\angle \lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = -(n-m)90^\circ \quad (18-2-5)$$

که در آن n درجه مخرج تابع تبدیل و m درجه صورت تابع تبدیل است.

۳-۲-۵ سیستم‌های غیر می‌نیم فاز

توابع تبدیلی که صفرها و قطبها آنها پایدار است (کلیه صفرها و قطبها محدود آنها در سمت چپ محور موهومی قرار دارند)، توابع تبدیل می‌نیم فاز^۱ هستند. سیستم‌هایی که توابع تبدیل می‌نیم فاز دارند، سیستم‌های می‌نیم فاز نامیده می‌شوند. اگر تابع تبدیلی یک چند صفر یا قطب ناپایدار داشته باشد، آن تابع تبدیل غیر می‌نیم فاز است و سیستم‌های را که توابع تبدیل غیر می‌نیم فاز دارند سیستم‌های غیر می‌نیم فاز^۲ می‌نامند. سیستم‌های غیر می‌نیم فاز با صفر ناپایدار را معکوس ناپایدار^۳ نیز نامیده‌اند.

به سادگی می‌توان نشان داد که مشخصه‌های دامنه دو تابع تبدیل می‌نیم فاز و غیر می‌نیم فاز (حداقل یک صفر یا قطب قرینه یکدیگر نسبت به محور موهومی) یکسان هستند. لیکن مشخصه فاز آنها باهم متفاوت است. در واقع زاویه فاز سیستم می‌نیم فاز کمتر از زاویه فاز سیستم غیر می‌نیم فاز است. هم‌چنین توجه کنید که تابع تبدیل یک سیستم می‌نیم فاز به طور منحصر بفردی توسط مشخصه دامنه یا به عبارت دیگر نمودار دامنه آن، تعیین می‌گردد. حال آنکه برای تعیین تابع تبدیل یک سیستم غیر می‌نیم فاز، نمودار زاویه فاز آن نیز باید در دسترس باشد.

برای نمونه توابع تبدیل دو سیستم به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$G_1(j\omega) = \frac{1+j\omega T}{1+j\omega T_1}, \quad G_2(j\omega) = \frac{1-j\omega T}{1+j\omega T_1} \quad (0 < T < T_1)$$

تشکیلات قطب - صفر این سیستم‌ها در شکل ۱۴-۵ نشان داده شده‌اند. از آنجاییکه

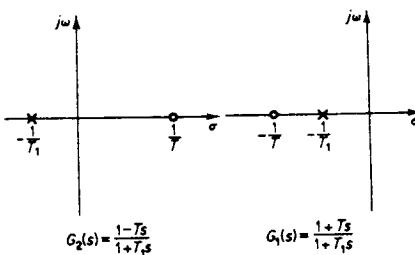
$$G_1(j\omega) = G_2(j\omega) \cdot \frac{1+j\omega T}{1-j\omega T}$$

و دامنه عامل $(1-j\omega T)/(1+j\omega T)$ همواره واحد است، لذا مشخصه‌های دامنه این دو تابع تبدیل یکسان هستند. لیکن همانطور که در شکل ۱۵-۵ نمودارهای زاویه فاز این دو تابع تبدیل نشان داده شده است، این نمودارها باهم مطابقتی ندارند. دلیل این عدم تطابق آن است که زاویه فاز عامل $(1-j\omega T)/(1+j\omega T)$ برابر با $\tan^{-1}\omega T$ است، که به ازاء تغییرات ω از

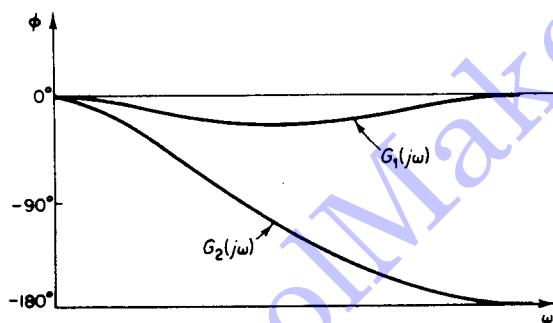
1- Minimum phase

2- Nonminimum phase

3- Inverse unstable



شکل ۱۴-۵ تشكيلات قطب و صفر



شکل ۱۵-۵ مشخصه های زاویه فاز

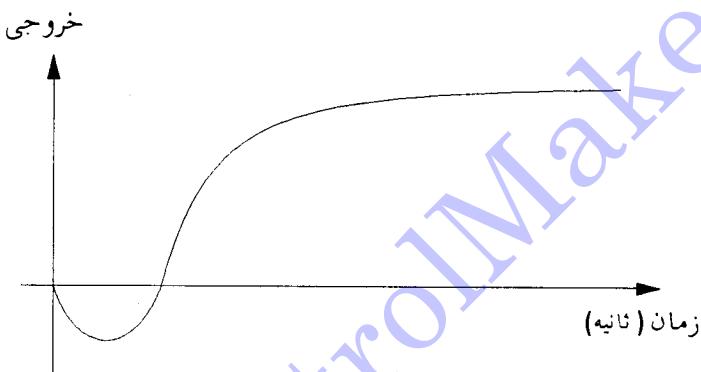
صفر تا بی نهايیت، از 0° تا 180° تغیير می کند.

بنابراین اگر نمودار دامنه یک سیستم می نیمم فاز، بر روی گسترده فرکانسی از صفر تا بینهايت داده شده باشد، نمودار فاز آن را می توان به طور منحصر بفردی تعیین کرد و بالعکس. توجه کنید که این مطلب برای سیستم های غیر می نیمم فاز درست نیست.

برای یک سیستم می نیمم فاز، زاویه فاز در $\omega = \infty$ برابر با $(n-m)\pi - 90^\circ$ است، که در آن m و n به ترتیب درجه های چند جمله ای صورت و مخرج تابع تبدیل هستند. برای یک سیستم غیر می نیمم فاز این مطلب درست نیست. لیکن در هر دو سیستم، شبیه منحنی لگاریتم دامنه در $\omega = \infty$ برابر با $(n-m)\pi - 20$ dB بر دهه است. بنابراین می توان برای یک سیستم، با بررسی شبیه مجانب فرکانسی بالای منحنی لگاریتم دامنه و زاویه فاز آن در $\omega = \infty$ به می نیمم یا غیر می نیمم فاز بودن آن پی برد. اگر شبیه منحنی لگاریتم دامنه به ازاء ω به سمت بینهايت برابر با $(n-m)\pi - 20$ dB بر دهه باشد و زاویه فاز در $\omega = \infty$ برابر با $(n-m)\pi - 90^\circ$ باشد، آنگاه سیستم

می‌نیم فاز است.

یکی دیگر از مشخصه‌های مهم سیستم‌های پایدار غیر می‌نیم فاز، کندتر بودن پاسخ آنها نسبت به سیستم می‌نیم فاز متناظر است. پاسخ پله این سیستم‌ها همانگونه که در شکل ۱۶-۵ نشان داده شده است، (برای یک صفر ناپایدار) نخست در جهت خلاف حرکت می‌کند و به همین دلیل اینگونه سیستم‌ها دارای عکس العمل اولیه‌ای در جهت خلاف حرکت پاسخ هستند. بنابراین در طراحی سیستم‌های کنترل، اگر سرعت پاسخ سیستم از پارامترهای مهم آن باشد، باید از بکارگیری عناصر غیر می‌نیم فاز خودداری نمود.



شکل ۱۶-۵ پاسخ پله واحد یک سیستم غیرمی‌نیم فاز پایدار (با یک صفر ناپایدار)

۴-۲-۵ سیستم‌های تأخیردار

همانطور که در فصلهای قبل نیز اشاره شد، بسیاری از سیستم‌های کنترل دارای تأخیر زمانی هستند و زمان تأخیر بنابر تعریف زمانی است که لازم است بگذرد تا خروجی سیستم به ورودی آن پاسخ دهد.تابع تبدیل یک عنصر تأخیر خالص عبارتست از

$$G(s) = e^{-sT} \quad (19-2-5)$$

که در آن T زمان تأخیر است. با جایگزینی $s=j\omega$ در معادله (۱۹-۲-۵) داریم

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= e^{-j\omega T} \\ &= \cos \omega T - j \sin \omega T \end{aligned} \quad (20-2-5)$$

برای ترسیم نمودار بود باید معادله‌های متناظر با لگاریتم دامنه و زاویه فاز را برای عنصر

تأخير بدست آوریم. از این‌رو

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\cos^2\omega T + \sin^2\omega T} \\ = 1$$

$$\tau \cdot \log |G(j\omega)| = \tau \cdot \log 1 = 0 \quad (21-2-5)$$

با

و

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{-\sin \omega T}{\cos \omega T} \right) \quad (22-2-5) \\ = -\omega T \quad (\text{رادیان}) \\ = -5\pi/3\omega T \quad (\text{درجه})$$

بنابراین از معادله (22-2-5) داریم که زاویه فاز به طور خطی با فرکانس ω تغییر می‌کند.
هم‌چنین معادله (21-2-5) نشان می‌دهد که تأخیر تغییری در لگاریتم دامنه سیستم ایجاد نمی‌کند.

۱۲-۵ مثال

سیستم کنترل نشان داده شده در شکل ۱۷-۵ را در نظر بگیرید. برای $T=2$ (ثانیه)، نمودار بود تابع تبدیل سیستم را رسم کنید.
تابع تبدیل حلقه - باز سیستم عبارتست از

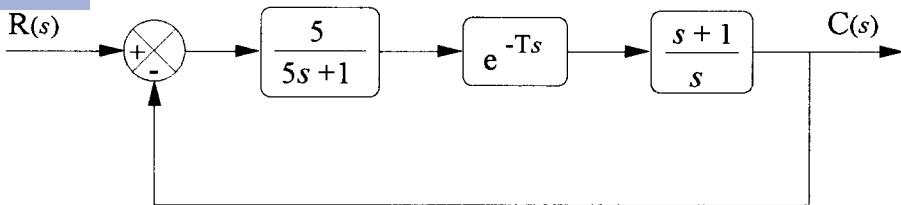
$$G(s)H(s) = \frac{5(s+1)e^{-2s}}{s(5s+1)}$$

با جایگزینی $s=j\omega$ داریم

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{5(j\omega+1)e^{-2j\omega}}{j\omega(5j\omega+1)}$$

بنابراین معادله‌های دامنه و زاویه فاز عبارتند از

$$\tau \cdot \log |G(j\omega)H(j\omega)| = \tau \cdot \log \left| \frac{5(j\omega+1)e^{-2j\omega}}{j\omega(5j\omega+1)} \right|$$



شکل ۱۷-۵ سیستم کنترل مثال ۱۲-۵

$$\text{Lm}G(j\omega)H(j\omega) = 2 \cdot \log \omega + 2 \cdot \log \sqrt{\omega^2 + 1} - 2 \cdot \log \omega - 2 \cdot \log \sqrt{(5\omega)^2 + 1}$$

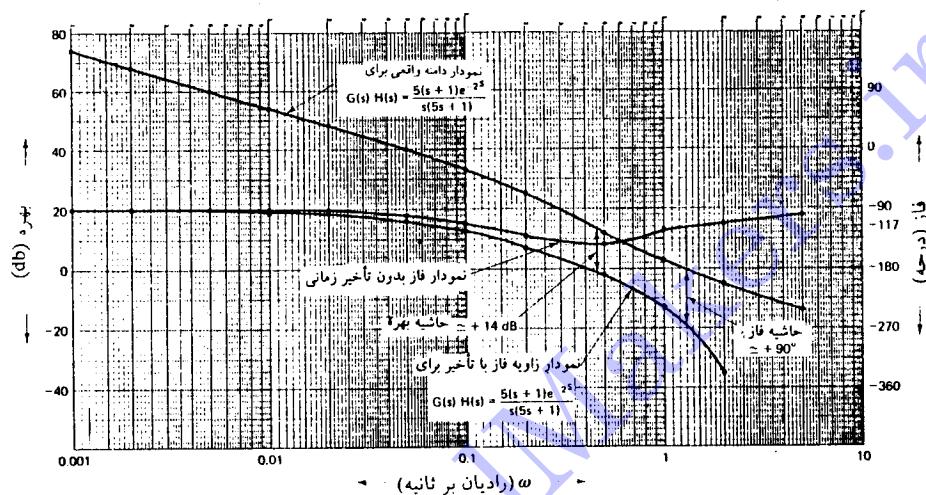
$$\begin{aligned}\angle G(j\omega)H(j\omega) &= \tan^{-1} \frac{\omega}{1} - 2\omega - \tan^{-1} \frac{\omega}{5} - \tan^{-1} \frac{5\omega}{1} \\ &= -90^\circ - 2\omega - \tan^{-1} \frac{5\omega}{1} + \tan^{-1} \frac{\omega}{1}\end{aligned}$$

با جایگزینی مقادیر ω از $0/001$ تا 5 رادیان بر ثانیه جدول ۱۲-۵ را از معادله‌های بالا تشکیل می‌دهیم

جدول ۱۲-۵ داده‌های مثال ۱۲-۵

فرکانس ω (رادیان بر ثانیه)	دامنه (dB)	زاویه فاز (درجه) بدون تأخیر زمانی با تأخیر زمانی
۰/۰۰۱	۷۳/۹۸	-۹۰/۲۳
۰/۰۰۲	۶۷/۹۶	-۹۰/۴۶
۰/۰۰۵	۶۰	-۹۱/۱۴
۰/۰۱	۵۳/۹۷	-۹۲/۲۹
۰/۰۲	۴۷/۹۷	-۹۴/۵۶
۰/۰۵	۳۹/۷۵	-۱۰۱/۲
۰/۱	۳۳/۱	-۱۱۰/۸۶
۰/۲	۲۵/۱۲	-۱۲۳/۶۹
۰/۵	۱۲/۳۷	-۱۳۱/۶۳
۱/۰	۲/۸۴	-۱۲۳/۶۹
۲/۰	-۵/۰۹	-۱۱۰/۸۶
۵/۰	-۱۳/۸۲	-۹۹/۰۲

داده‌های جدول ۱۲-۵ برای رسم نمودار بود بکار گرفته می‌شوند. نمودارهای لگاریتم دامنه و زاویه فاز این سیستم در شکل ۱۸-۵ نشان داده شده‌اند. در شکل ۱۸-۵ نمودار زاویه فاز بدون تأثیر نیز رسم شده است، این دو نمودار را با هم مقایسه کنید.



شکل ۱۸-۵ نمودار بود سیستم تأثیر دار داده شده در مثال ۱۲-۵

۱۲-۵-۵ شناسایی تابع تبدیل سیستم توسط دیاگرام بود

یکی از کاربردهای دیاگرام‌های بود، شناسایی تابع تبدیل سیستم‌های ناشناخته^۱ است. اگر به سیستم خطی (یا سیستم غیرخطی در محدوده نقطه کار که همانند یک سیستم خطی رفتار می‌کند) ورودی سینوسی وارد شود، خروجی سیستم نیز در حالت ماندگار، سینوسی با همان فرکانس ولی دامنه و فاز متفاوت خواهد بود. همانطور که در مقدمه این فصل اشاره شد و در شکل ۱-۵ نشان داده شده است، نسبت دامنه خروجی به دامنه ورودی در هر فرکانس در نظر گرفته شده، برابر است با دامنه تابع تبدیل سیستم ناشناخته $|G(j\omega)|$ در آن فرکانس و تفاوت بین زاویه فاز ورودی و زاویه فاز خروجی نیز زاویه فاز تابع تبدیل $\angle G(j\omega)$ در آن فرکانس می‌باشد. حال اگر این مقادیر را برای یک گسترۀ فرکانسی به اندازه کافی بزرگ انجام دهیم، می‌توان در هر فرکانس دامنه و فاز تابع تبدیل را تعیین نمود و دیاگرام بود (نمودارهای

لگاریتم دامنه و زاویه فاز) را رسم کرد. نحوه رسم دیاگرام بود بدین صورت است که پس از علامتگذاری نقاط بدست آمده در صفحه‌های نیمه لگاریتمی، خطهای مستقیم با شبیهای که مضربی از ± 20 dB بر دهه می‌باشند را رسم می‌کنیم. برای داده‌های زاویه فاز نیز بهترین منحنی را بین داده‌ها رسم می‌کنیم. با رسم این منحنیها نمودار تقریبی بود تابع تبدیل ناشناخته بدست می‌آید و سپس با بکارگیری خواص دیاگرام بود می‌توان تابع تبدیل سیستم را تعیین نمود.

پس از رسم دیاگرام بود با استفاده از قوانین ساده‌ای می‌توان تابع تبدیل را با شروع از فرکانس‌های پایین به بالا بازسازی نمود. قواعد زیر می‌توانند در این راستا سودمند واقع گردد:

- ۱- نوع سیستم را می‌توان از شیب نمودار لگاریتم دامنه در فرکانس‌های پایین تعیین نمود. در حقیقت شبیهای نمودار لگاریتم دامنه در فرکانس‌های پایین، متناظر با نوع سیستم عبارتند از

سیستم نوع صفر: 0 dB بر دهه

سیستم نوع یک: -20 dB بر دهه

سیستم نوع دو: -40 dB بر دهه

- ۲- با تغییر شیب در یک فرکانس مشخص (یا حوالی آن) می‌توان به وجود عامل جدیدی پی برد و فرکانس شکست متناظر با آن را تعیین نمود. اگر این تغییر ± 20 dB بر دهه باشد، عبارت درجه اولی به صورت $(1 + Ts)^{\pm}$ در تابع تبدیل وجود دارد و اگر تغییر ± 40 dB بر دهه باشد، نماینگر وجود یک عبارت درجه دوم در صورت یا مخرج است. برای تشخیص اینکه عبارت درجه دو به صورت $(1 + Ts)$ یا به صورت $[1 + 2\zeta/m_n s + s^2/m_n^2]$ می‌باشد، باید از تعداد بیشتری نقاط استفاده کرد. دیاگرام‌های بود میرای ضعیف (< 1) در نزدیکی m_n همچنین میرای شدید (> 1) و میرای بحرانی ($= 1$) در شکال ۱۲-۵ نشان داده شده است. با مطابقت با این شکل می‌توان پارامترهای یک سیستم درجه دوم را شناسایی کرد.

۳- در تعیین صفرها و قطب‌های ناپایدار در صورت وجود باید دقت خاصی را مبذول داشت. توجه کنید که توابع $T = 1 + j\omega$ و $T = 1 - j\omega$ دارای نمودار لگاریتم دامنه بکسانسی هستند. لیکن نمودار زاویه فاز آنها به ترتیب از 90° و -90° تغییر می‌کند. بنابراین اگر بدانیم که سیستم پایدار و می‌نیمم فاز است از نمودار لگاریتم دامنه به تنهایی می‌توان برای شناساییتابع تبدیل استفاده کرد و حال آنکه برای شناسایی تابع تبدیل ناپایدار و یا غیر می‌نیمم فاز، رسم نمودار فاز نیز الزامی است. توجه کنید که برای سیستم‌های می‌نیمم فاز به ازاء میل کردن ω به سمت بی‌نهایت، زاویه فاز برابر با (تفاضل درجه مخرج و صورت تابع تبدیل) $\times 90^\circ$ می‌باشد و حال آنکه برای سیستم‌های غیر می‌نیمم فاز این رابطه برقرار نیست. برای سیستم‌های بالا برابر با (تفاضل درجه مخرج و صورت تابع تبدیل) $\times 20 \text{ dB}$ بروز دهه است.

۴- تعیین بهره ثابت K_{II} . تابع تبدیل کلی سیستم از مراحل بالا به صورت زیر بدست می‌آید

$$G(j\omega) = \frac{K_n (1 + T_z j\omega) \dots [1 + 2(\xi_z / \omega_{nz}) j\omega + (j\omega)^2 / \omega_{nz}^2] \dots}{(j\omega)^n (1 + T_p j\omega) \dots [1 + 2(\xi_p / \omega_{np}) j\omega + (j\omega)^2 / \omega_{np}^2] \dots} \quad (23-2-5)$$

برای فرکانس‌های پایین از معادله (۲۳-۲-۵) داریم

$$G(j\omega) \approx \frac{K_n}{(j\omega)^n} \quad (\omega \rightarrow 0) \quad (24-2-5)$$

همانطور که از معادله (۲۴-۲-۵) مشاهده می‌گردد، بهره K_{II} را می‌توان از قسمت فرکانس پایین نمودار لگاریتم دامنه تعیین کرد. از آنجاییکه اکثریت سیستم‌های عملی و کاربردی نوع صفر، یک و یا دو هستند، به عبارت دیگر $n=0, 1, 2$ ، در اینجا روش‌های تعیین بهره را برای این سیستم‌ها ارایه می‌کنیم.

$n=0$: از معادله (۲۴-۲-۵)، بدست می‌آوریم

$$G(j\omega) = K_0 \quad (\omega \rightarrow 0) \quad (25-2-5)$$

بنابراین برای مقادیر کوچک فرکانس ω ، مجانب فرکانس پایین لگاریتم دامنه یک مقدار ثابت K_1 دارد.

$n=1$: از معادله (۲۶-۲-۵)، بدست می‌آوریم

$$G(j\omega) = \frac{K_1}{j\omega} \quad (\omega \rightarrow 0) \quad (26-2-5)$$

لذا از معادله (۲۶-۲-۵)، داریم

$$\log |G(j\omega)| = \log K_1 - \log \omega \quad (27-2-5)$$

توجه کنید که برای $\omega=0$ از معادله (۲۷-۲-۵)، داریم $\log |G(j)| = \log K_1$ و لذا با رسم یک خط مستقیم عمودی از $\omega=0$ و تقاطع آن با مجانب فرکانس پایین مقدار $\log K_1$ تعیین می‌گردد.

$n=2$: از معادله (۲۶-۲-۵)، بدست می‌آوریم

$$G(j\omega) = \frac{K_2}{(j\omega)^2} = -\frac{K_2}{\omega^2} \quad (28-2-5)$$

و لذا با لگاریتم گرفتن از طرفین معادله (۲۸-۲-۵)، داریم

$$\log |G(j\omega)| = \log K_2 - \log \omega^2$$

همانند حالت $n=1$ در $\omega=0$ داریم $\log |G(j\omega)| = \log K_2$ و لذا با رسم یک خط مستقیم عمودی از $\omega=0$ و تقاطع آن با مجانب فرکانس پایین مقدار $\log K_2$ تعیین می‌گردد.

مثال ۱۳-۵

نمودار لگاریتم دامنه یک سیستم می‌نیم فاز و پایدار در شکل ۱۹-۵ رسم شده است. تابع تبدیل آنرا بدست آورید.

از رفتار قسمت فرکانسی پایین نمودار لگاریتم دامنه، مشاهده می‌شود که سیستم نوع یک است. با توجه به تغییرات شبیب در فرکانس‌های ۵، ۱۰ و ۲۰، این فرکانس‌ها فرکانس‌های گوشه تابع تبدیل هستند. همچنین با توجه به شبیب $dB-20$ بردیه بین فرکانس‌های ۱/۰ تا ۵ رادیان بر ثانیه، dB بردیه بین فرکانس‌های ۵ تا ۱۰ رادیان بر ثانیه، $dB-20$ بردیه بین



- شکل ۱۹-۵ نمودار لگاریتم دامنه رسم شده از داده های ورودی خروجی یک سیستم نامعلوم می نیم فاز

فرکانس های ۱۰ تا ۲۰ رادیان بر ثانیه و سرتنجام ۴۰dB پردههای حرای فرکانس های بالاتر از ۲۰ رادیان بر ثانیه ، در می باییم که تابع تبدیل به ترتیب شامل عبارات زیر است:

$$(1+0/0.5s)^{-1}, (1+0/1s)^{-1}, (1+0/2s), s^{-1}$$

بنابراین

$$G(s) = \frac{K_1(1+0/2s)}{s(1+0/1s)(1+0/0.5s)}$$

برای تعیین بهره ثابت K_1 از معادله (۲۷-۲-۵)، و استفاده از نمودار شکل ۱۹-۵، داریم

$$\log |G(j\omega)| = 1/0.5 = \log K_1$$

و لذا $K_1 = 56$ بهره ثابت تابع تبدیل است.

۳-۵ نمودارهای نایکوئیست

نمودار نایکوئیست^۱ یک تابع تبدیل $G(j\omega)$ ، نمودار دامنه $G(j\omega)$ بر حسب زاویه فاز $\angle G(j\omega)$ به ازاء تغییرات ω از 0 تا ∞ است. نمودار نایکوئیست $G(j\omega)$ را نمودار قطبی^۲ و نمودار قصبه^۳ می‌نامند. نمودار نایکوئیست، مکان هندسی بردارهای $|G(j\omega)|$ و $\angle G(j\omega)$ به ازاء تغییرات ω از 0 تا ∞ است. توجه کنید که در نمودارهای نایکوئیست، زاویه فاز از محور حقیقی مثبت اندازه گیری می‌شود. اگر افزایش زاویه در جهت خلاف عقربه ساعت (جهت عقربه ساعت) باشد، زاویه مثبت (منفی) است.

مثال ۱۴-۵

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{20(s+5)}{s(s+3)(s+1)}$$

برای بررسی پاسخ فرکانسی سیستم، $\omega = j\omega$ را در تابع تبدیل جایگزین می‌کنیم. از این‌رو

$$G(j\omega) = \frac{20(j\omega+5)}{j\omega(j\omega+3)(j\omega+1)}$$

بنابراین

$$|G(j\omega)| = \frac{20(\omega^2 + 25)^{1/2}}{\omega(\omega^2 + 9)^{1/2}(\omega^2 + 1)^{1/2}}$$

و

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left[\frac{\omega}{5} \right] - 90^\circ - \tan^{-1} \left[\frac{\omega}{3} \right] - \tan^{-1} \left[\frac{\omega}{1} \right]$$

تابع تبدیل $G(j\omega)$ را می‌توان به طور مشابهی، بر حسب قسمتهای حقیقی و موهومی آن نوشت. داریم

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{-20j(j\omega+5)(3-j\omega)(1-j\omega)}{\omega(\omega^2+9)(\omega^2+1)} \\ &= \frac{-20 \left[\omega(\omega^2 + 1) + j(-\omega^2 + 15) \right]}{\omega(\omega^2 + 9)(\omega^2 + 1)} \end{aligned}$$

و لذا

$$[G(j\omega)] = \frac{-20(\omega^2 + 17)}{(\omega^2 + 9)(\omega^2 + 1)} \quad \text{قسمت حقیقی}$$

$$[G(j\omega)] = \frac{20(\omega^2 - 15)}{\omega(\omega^2 + 9)(\omega^2 + 1)} \quad \text{قسمت موهومی}$$

اکنون می‌توان نمودار نایکوئیست تابع تبدیل را با استفاده از چهار نقطه مهم زیر رسم کرد:

۱- در $\omega = 0$ داریم

$$|G(j\omega)| = \infty \quad ; \quad \angle G(j\omega) = -90^\circ$$

$$\infty = \text{قسمت موهومی } [G(j\omega)] ; \quad -\frac{340}{9} = \text{قسمت حقیقی } [G(j\omega)]$$

بنابراین نمودار نایکوئیست با اندازه بینهاست از زاویه فاز -90° - آغاز می‌شود.

مجانب نمودار نایکوئیست بر روی محور حقیقی منفی در $-\frac{340}{9}$ قرار دارد.

۲- در $\omega = \infty$ داریم

$$|G(j\omega)| = 0 \quad ; \quad \angle G(j\omega) = -180^\circ$$

$$0 = \text{قسمت موهومی } [G(j\omega)] \quad ; \quad 0 = \text{قسمت حقیقی } [G(j\omega)]$$

بنابراین نمودار نایکوئیست به مبدأ مختصات قطبی با زاویه -180° وارد می‌شود.

۳- برای تعیین نقطه احتمالی قطع محور حقیقی، زاویه فاز را برابر 0° یا 180° و

قسمت موهومی را برابر صفر قرار می‌دهیم. داریم

$$\frac{20(\omega^2 - 15)}{\omega(\omega^2 + 9)(\omega^2 + 1)} = 0$$

و لذا برای فرکانس $\omega = \sqrt{15}$ بدست می‌آوریم

$$[G(j\omega)] = \frac{-20(15 + 17)}{(15 + 9)(15 + 1)} = -\frac{5}{3}$$

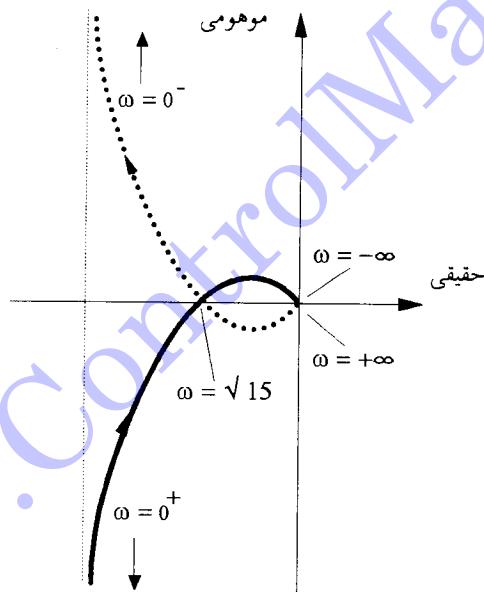
۴- برای تعیین نقطه احتمالی قطع محور موهومی زاویه فاز را برابر $90^\circ \pm$ و قسمت

حقیقی را برابر صفر قرار می‌دهیم، داریم

$$\frac{-20(\omega^2 + 17)}{(\omega^2 + 9)(\omega^2 + 1)} = 0$$

که به ازاء هیچ فرکانس حقیقی برآورده نمی‌گردد، لذا نقطه قطع با محور موهومی وجود ندارد.

با استفاده از نکات بدست آمده، نمودار نایکوئیست این تابع تبدیل در شکل ۲۰-۵ رسم شده است. هر نقطه بر روی نمودار نایکوئیست $G(j\omega)$ نشان دهنده دامنه و فاز تابع تبدیل در یک فرکانس است. تصاویر $G(j\omega)$ بر روی محورهای حقیقی و موهومی به ترتیب مؤلفه‌های حقیقی و موهومی $G(j\omega)$ می‌باشند. در واقع برای رسم نمودار نایکوئیست، دامنه $|G(j\omega)|$ و زاویه فاز $\angle G(j\omega)$ باید مستقیماً در هر فرکانس بدست آورده شوند. یک مزیت نمودار نایکوئیست آن است که مشخصه‌های پاسخ فرکانسی سیستم را بر روی گسترهٔ کامل فرکانسی، در یک نمودار نشان می‌دهد.



شکل ۲۰-۵ نمودار نایکوئیست تابع تبدیل مثال ۱۴-۵

۱-۳-۵ نمودارهای نایکوئیست سیستم‌های نوع صفر، یک و دو نمودار نایکوئیست سیستم‌های نوع صفر، تابع تبدیل نوع صفر زیر را در نظر بگیرید

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} e^{-j \tan^{-1} \omega T} \quad (1-3-5)$$

مقادیر $G(j\omega)$ در $\omega = 0$ و $\omega = 1/T$ به ترتیب عبارتند از $170^\circ = G(j0)$ و $\frac{1}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ = G(j\frac{1}{T})$. دامنه $G(j\omega)$ به سمت صفر میل کرده و زاویه آن به سمت -90° میل می‌کند. نمودار نایکوئیست اینتابع تبدیل یک نیم دایره است، که در شکل ۲۱-۵ (الف) نشان داده شده است.

اگر به تابع تبدیل ساده معادله (۲-۳-۵) یک قطب دیگر اضافه کنیم و بهره K را نیز برای

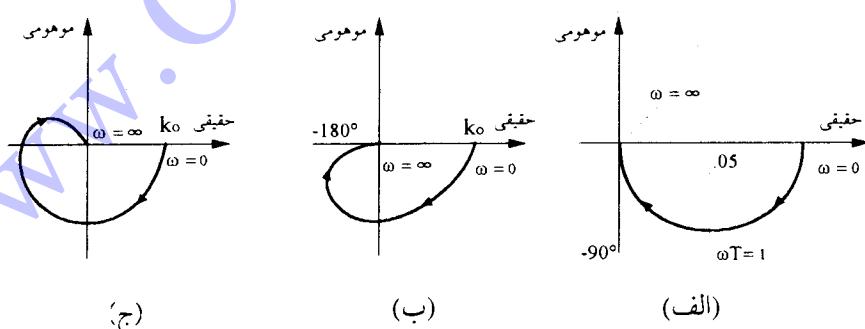
آن در نظر بگیریم، داریم

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)} \quad (2-3-5)$$

از معادله (۲-۳-۵)، بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} G(j\omega) &\rightarrow K \angle 0^\circ & \omega \rightarrow 0 \\ G(j\omega) &\rightarrow \angle -180^\circ & \omega \rightarrow \infty \end{aligned}$$

توجه کنید که برای هر عبارت در مخرج تابع تبدیل داده شده با معادله (۲-۳-۵)، زاویه فاز از 0 تا 90° به ازاء تغییرات ω از 0 تا ∞ تغییر می‌کند. لذا نمودار نایکوئیست اینتابع تبدیل از $0^\circ \angle K$ شروع و با کاهش درجه از 0 به -90° و سپس با 0° به مبدأ صفحه قطبی وارد می‌شود. رسم دقیق نمودار نایکوئیست به مقادیر T_1 و T_2 بستگی دارد. رسم تقریبی نمودار نایکوئیست تابع تبدیل داده شده با معادله (۲-۳-۵) در شکل ۲۱-۵ (ب) نشان داده شده است.



شکل ۲۱-۵ (الف) نمودار نایکوئیست $(1/(1+j\omega T))$ (ب) نمودار نایکوئیست تابع تبدیل معادله (۲-۳-۵) (ج) نمودار نایکوئیست تابع تبدیل معادله (۳-۳-۵)

اگر به تابع تبدیل داده شده با معادله (۳-۳-۵) یک قطب دیگر اضافه کنیم، داریم

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)(1+j\omega T_3)} \quad (3-3-5)$$

دقت کنید که افزودن قطب سوم، موجب آن می‌شود که $G(j\omega)$ در فرکانس‌های بالا $\omega \rightarrow \infty$ به اندازه 90° در جهت عقربه ساعت بچرخد. به عبارت دیگر

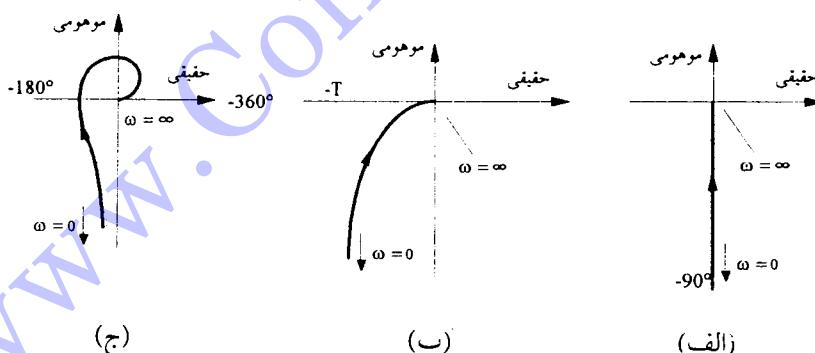
$$G(j\omega) \rightarrow 0 \angle -270^\circ \quad \omega \rightarrow \infty$$

در این حالت با محور حقیقی و موهومی نقاط قطع خواهیم داشت. رسم دقیق این تابع تبدیل نیز به مقادیر T_1 , T_2 و T_3 بستگی دارد ولی نمودار تقریبی نایکوئیست آن در شکل ۲۱-۵ (ج) نشان داده شده است.

نمودار نایکوئیست سیستم‌های نوع یک، تابع تبدیل نوع یک زیر را در نظر بگیرید

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega} \angle -90^\circ \quad (4-3-5)$$

نمودار نایکوئیست این تابع تبدیل، محور موهومی منفی است و در شکل ۲۲-۵ (الف) نشان داده شده است.



شکل ۲۲-۵ (الف) نمودار نایکوئیست $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$ (ب) نمودار نایکوئیست $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1+j\omega T)}$ (ج) نمودار نایکوئیست تابع تبدیل داده شده با معادله (۴-۳-۵)

اگر به تابع تبدیل داده شده با معادله (۴-۳-۵)، یک قطب اضافه کنیم، داریم

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1+j\omega T)} \quad (5-3-5)$$

قسمت فرکانس پایین نمودار نایکوئیست، $\omega \rightarrow 0$ ، عبارتست از

$$G(j\omega) \rightarrow \infty \angle -90^\circ \quad \omega \rightarrow 0$$

و قسمت فرکانس بالای آن عبارتست از

$$G(j\omega) \rightarrow 0 \angle -180^\circ \quad \omega \rightarrow \infty$$

نمودار تقریبی نایکوئیست این تابع تبدیل، در شکل ۲۲-۵ (ب) رسم شده است. خط عمودی موازی با محور موهومی، در نقطه T -، مجانب نمودار نایکوئیست است.

اگر به تابع تبدیل داده شده با معادله (۵-۳-۵)، دو قطب دیگر اضافه کنیم داریم

$$G(j\omega) = \frac{K_1}{j\omega(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)(1+j\omega T_3)} \quad (6-3-5)$$

بنابراین در این حالت بدست می‌آوریم

$$G(j\omega) \rightarrow \infty \angle -90^\circ \quad \omega \rightarrow 0$$

$$G(j\omega) \rightarrow 0 \angle -360^\circ \quad \omega \rightarrow \infty$$

توجه کنید که هر کدام از عبارت مخرج تابع تبدیل $\omega \rightarrow 0$ به مجموع زوایا در فرکانس‌های بالا اضافه خواهد کرد. دقت کنید که دامنه $G(j\omega)$ به ازاء $\omega \rightarrow 0$ به سمت پی‌نهایت می‌کند. در واقع خطی موازی با محور موهومی منتهی، به صورت مجانبی خواهد بود که $G(j\omega)$ به سمت آن میل می‌کند. برای تعیین این مجانب باید مقدار قسمت حقیقی تابع تبدیل را در حد $\omega \rightarrow 0$ پیدا کنیم. بنابراین

$$\text{قسمت حقیقی } [G(j\omega)] = \text{مجانب } \lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) \quad (7-3-5)$$

و برای تابع تبدیل داده شده با معادله (۶-۳-۵)، بسادگی از معادله (۷-۳-۵) نشان داده می‌شود که مجانب تابع تبدیل در $K_1(T_1 + T_2 + T_3)$ - قرار دارد. نمودار تقریبی نایکوئیست تابع تبدیل داده شده با معادله (۶-۳-۵) در شکل ۲۲-۵ (ج) نشان داده شده است.

نمودار نایکوئیست سیستم‌های نوع دو، تابع تبدیل نوع دو زیر را در نظر بگیرید

$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2} = \frac{1}{\omega^2} \angle -180^\circ \quad (8-3-5)$$

نمودار نایکوئیست این تابع تبدیل، محور حقیقی منفی است و در شکل ۲۳-۵ (الف)، نشان داده شده است.

اگر به تابع تبدیل داده شده با معادله (۸-۳-۵) دو قطب اضافه کنیم، داریم

$$G(j\omega) = \frac{K_2}{(j\omega)(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)} \quad (9-3-5)$$

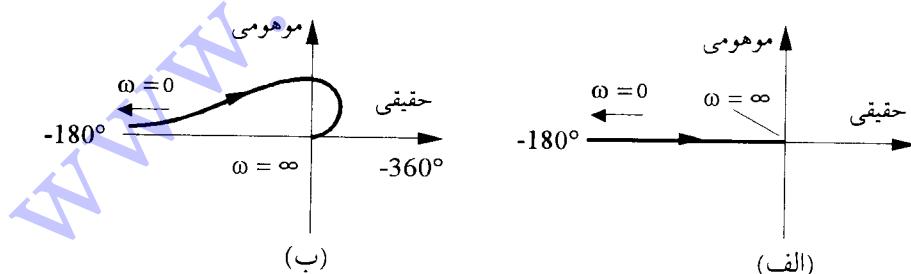
برای تابع تبدیل داده شده با معادله (۹-۳-۵)، داریم

$$G(j\omega) \rightarrow \infty \angle 180^\circ \quad \omega \rightarrow 0$$

$$G(j\omega) \rightarrow 0 \angle -360^\circ \quad \omega \rightarrow \infty$$

دقت کنید که عبارت $(j\omega)$ در مخرج، -180° - به زاویه فاز $G(j\omega)$ در کلیه فرکانس‌ها اضافه می‌کند. هر کدام از عبارات دیگر در مخرج -90° - به مجموع زوایا در فرکانس‌های بالا اضافه می‌کنند. شکل ۲۳-۵ (ب) نمودار تقریبی نایکوئیست این تابع تبدیل را نشان می‌دهد. به تابع تبدیل داده شده با معادله (۹-۳-۵)، یک قطب و صفر اضافه می‌کنیم. لذا

$$G(j\omega) = \frac{K_2(1+j\omega T_0)}{(j\omega)(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)(1+j\omega T_3)} \quad (10-3-5)$$

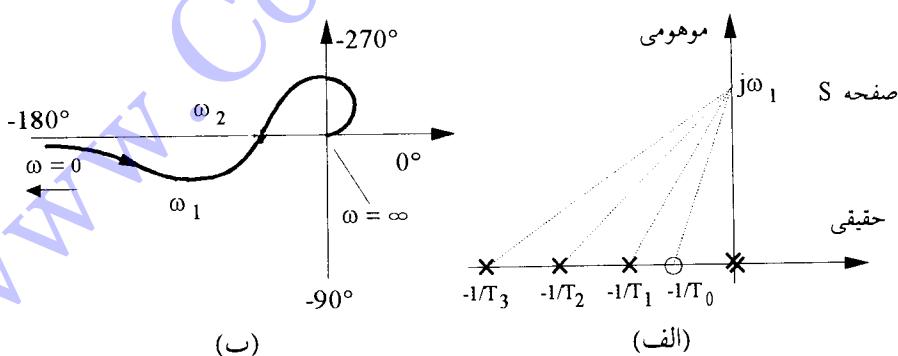


شکل ۲۳-۵ (الف) نمودار نایکوئیست تابع تبدیل $\frac{1}{(j\omega)^2}$ (ب) نمودار نایکوئیست تابع تبدیل داده شده با معادله (۹-۳-۵)

که در آن $T_3 > T_2 > T_1$ (توجه کنید که رسم دقیق نمودار نایکوئیست تنها با اطلاع از مقادیر T_1 , T_2 , T_3 و K_2 امکان‌پذیر است). نمودار نایکوئیست تابع تبدیل را با استفاده از دیاگرام قطب - صفر نوعی نشان داده شده در شکل ۲۴-۵ (الف) رسم می‌کنیم.

در فرکانس $\omega = 0$ زاویه هر کدام از عوامل تابع تبدیل، بجز قطب مضاعف در مبدأ صفر محی باشد. بنابراین زاویه فاز تابع تبدیل در $\omega = 0$ $= -180^\circ$ است. با افزایش ω از صفر، زاویه $\angle G(j\omega)$ از سایر عوامل سریعتر افزایش پیدا می‌کند و در حقیقت در فرکانس‌های یا بین زاویه ناشی از صفر بزرگتر از مجموع زوایای قطبها تابع تبدیل در سمت چپ صفر است (به شکل ۲۴-۵ (الف) مراجعه کنید). همانطور که در شکل ۲۴-۵ (ب) نشان داده شده است، در فرکانسی مانند ω مجموع زوایای $G(j\omega)$ برابر با -180° خواهد شد و در این فرکانس نمودار نایکوئیست محور حقیقی راقطع می‌کند. با افزایش ω و در فرکانس‌های بالا $\omega \rightarrow \infty$. زاویه $\angle G(j\omega)$ تنها اندکی تغییر خواهد کرد و حال آنکه سایر قطبها سمت چپ آن به سرعت افزایش زاویه خواهند داشت و در حد $\omega \rightarrow \infty$ ، زاویه فاز $G(j\omega)$ به سمت 0° می‌کند (دقیق کنید که از دو قطب در مبدأ -180° ، از سه قطب دیگر -270° و از صفر $+90^\circ$ خواهیم داشت). نمودار تقریبی نایکوئیست تابع تبدیل داده شده با معادله (۱۰-۳-۵) در شکل ۲۴-۵ (ب) نشان داده شده است.

توجه کنید که نحوه و ترتیب قرار گرفتن قطبها و صفرها بر روی محور حقیقی، شکل



شکل ۲۴-۵ (الف) دیاگرام قطب - صفر تابع تبدیل داده شده با معادله (۱۰-۳-۵) (ب) نمودار نایکوئیست تابع تبدیل داده شده با معادله (۱۰-۳-۵).

نهایی نمودار نایکوئیست را در محدوده فرکانسی $0 \rightarrow \infty$ تعیین می‌کند. بدون ذکر اثبات، در اینجا اشاره می‌کنیم که نمودار نایکوئیست یک سیستم نوع دو برای $\omega \rightarrow 0$ زیر محور حقیقی است اگر رابطه زیر برقرار باشد

$$(11-3-5) \quad > 0 \text{ (مجموعه } T \text{ های مخرج) - (مجموعه } T \text{ های صورت)}$$

برای تابع تبدیل داده شده با معادله (10-3-5)، شرط لازم آن است که $T_r > T_s + T_p + T_f$. باشد. اگر عبارت داده شده در (11-3-5) منفی باشد، نمودار نایکوئیست از بالای محور حقیقی شروع می‌شود. برای تابع تبدیل داده شده با معادله (9-3-5)، داریم $< (T_r + T_p) - \omega$ لذا از بالای محور حقیقی شروع شده است.

۲-۳-۵ نمودار نایکوئیست سیستم‌های تأخیردار تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

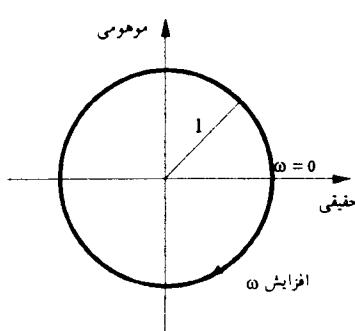
$$G(j\omega) = e^{-j\omega T} \quad (12-3-5)$$

عنصر تأخیر معادله (12-3-5)، را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$G(j\omega) = 1 \angle (\cos \omega T - j \sin \omega T) \quad (13-3-5)$$

از آنجاییکه دامنه $G(j\omega)$ هموار یک است و زاویه فاز به طور خطی با ω تغییر پیدا می‌کند، نمودار نایکوئیست عنصر تأخیر همانطور که در شکل ۲۵-۵ نشان داده شده است، یک دایره واحد است.

دقت کنید که در فرکانس‌های پایین، $\omega \rightarrow 0$ ، عنصر تأخیر $e^{-j\omega T}$ و سیستم نوع یک



شکل ۲۵-۵ نمودار نایکوئیست عنصر تأخیر.

۱) همانند هم رفتار می‌کنند. نمودارهای نایکوئیست عنصر تأخیر و تابع تبدیل مرتبه اول نوع یک در شکل ۲۶-۵ نشان داده شده‌اند. دقیق کنید که برای $\omega < \frac{1}{T}$ داریم

$$e^{-j\omega T} \approx 1 - j\omega T, \quad \frac{1}{1 + j\omega T} \approx 1 - j\omega T$$

مثال ۱۵-۵

تابع تبدیل سیستم تأخیردار زیر را در نظر بگیرید

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega T}}{1 + j\omega T},$$

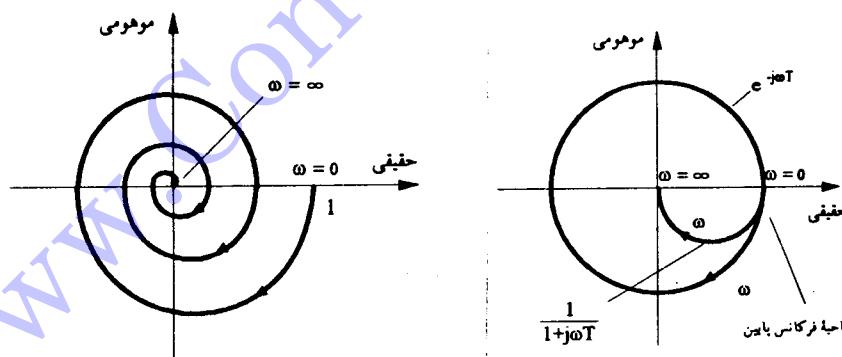
داریم

$$|G(j\omega)| = |e^{-j\omega T}| \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle e^{-j\omega T} + \angle \frac{1}{1 + j\omega T} \\ = -\omega T - \tan^{-1} \omega T$$

و

از آنجاییکه دامنه به طور یکنواخت به سمت صفر و زاویه فاز نیز به طور یکنواخت و تا بینهاست کاهش پیدا می‌کند، نمودار نایکوئیست تابع تبدیل داده شده به صورت حلزونی است. نمودار نایکوئیست این تابع تبدیل در شکل ۲۷-۵، نشان داده شده است.



شکل ۲۷-۵ نمودارهای نایکوئیست عنصر

تأخیر و تابع تبدیل مرتبه اول

۳-۳-۵ خلاصه‌ای از قواعد کلی رسم نمودارهای نایکوئیست

برای رسم نمودارهای نایکوئیست یک تابع تبدیل، از قواعد زیر می‌توان برای رسم قسمتهای اصلی آن استفاده کرد.

قاعده ۱- تابع تبدیل کلی به صورت زیر است

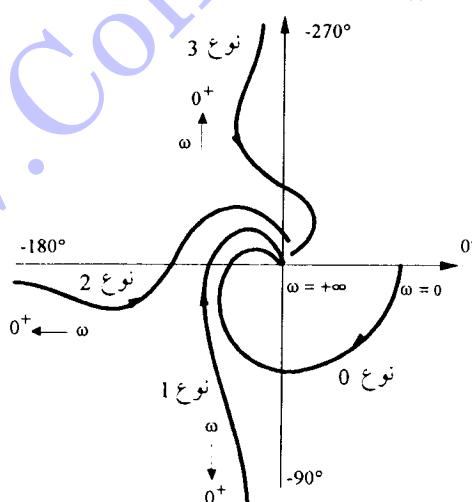
$$G(j\omega) = \frac{K_m(1+j\omega T_{z_1})(1+j\omega T_{z_2}) \dots (1+j\omega T_{z_m})}{(j\omega)^m (1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2) \dots (1+j\omega T_u)} \quad (14-3-5)$$

تابع تبدیل داده شده از نوع m است و نوع تابع تبدیل، قسمت فرکانس پایین $G(j\omega)$ را تعیین می‌کند. مشخصه‌های فرکانس پایین نمودارهای نایکوئیست برای سیستم‌های نوع یک، دو و سه، در شکل ۲۸-۵ نشان داده شده‌اند.

قاعده ۲- قسمت فرکانس بالای نمودار نایکوئیست، $\omega \rightarrow \infty$ ، را می‌توان بدین صورت تعیین کرد

$$G(j\omega) \rightarrow 0 \angle -90^\circ \quad (15-3-5)$$

توجه کنید که درجه مخرج تابع تبدیل داده شده با معادله (۱۴-۳-۵) همواره بزرگتر از درجه صورت آن است، و لذا نقطه فرکانس بالا ($\omega = \infty$) در جهت عقربه ساعت به سمت صفر میل خواهد کرد. نمودار ممکن است که از هر طرف محور وارد مبداء گردد. (شکل (۲۹-۵)).



شکل ۲۸-۵ نمودارهای نایکوئیست توابع تبدیل نوع صفر، یک، دو و سه.

قاعده ۳- مجاذب قسمت فرکانس پایین نمودار نایکوئیست یک سیستم درجه اول، با گرفتن حد $\omega \rightarrow 0$ از قسمت حقیقی تابع تبدیل بدست می آید.

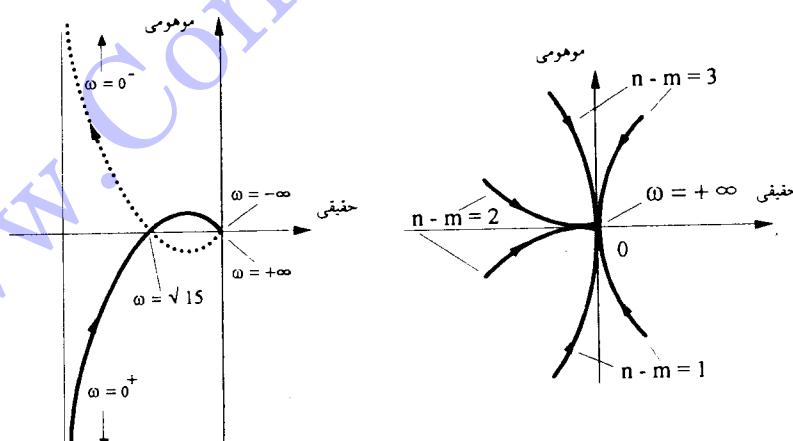
قاعده ۴- فرکانس هایی که در آنها نمودار نایکوئیست با محور حقیقی منفی و محور موهومی تلاقی دارند، به ترتیب از روابط زیر تعیین می گردند

$$\text{قسمت موهومی } [G(j\omega)] = 0 \quad (16-3-5)$$

$$\text{قسمت حقیقی } [G(j\omega)] = 0 \quad (17-3-5)$$

قاعده ۵- اگر کلیه $T_{z1}, T_{z2}, \dots, T_{z\omega}$ صفر باشند و یا به عبارت دیگر تابع تبدیل صفر محدود نداشته باشد، زاویه $G(j\omega)$ به طور پیوسته به ازاء ω از 0 تا ∞ ، کاهش پیدا می کند. اگر تابع تبدیل صفر محدود داشته باشد، شمای نمودار نایکوئیست به محل صفرها و قطبها بستگی خواهد داشت و زاویه ممکن است به طور پیوسته در یک جهت تغییر پیدا نکده و لذا نوعی «تورفتگی» ایجاد کند.

قاعده ۶- نمودار نایکوئیست تابع تبدیل $G(j\omega)$ یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان برای $0 < \omega < \infty$ ، حول محور حقیقی با محور نایکوئیست تابع تبدیل $G(j\omega)$ برای $\omega > 0$ ، متقارن است. بسادگی می توان از معادله (۱۴-۳-۵) نشان داد که $G(-j\omega) = G^*(j\omega)$ ، که در آن $*$ علامت مزدوج مختلط است. بنابراین اگر برای یک فرکانس مشخص مانند ω ، $G(j\omega) = \alpha + j\beta$ باشد، $G(-j\omega) = \alpha - j\beta$. لذا نمودار پاسخ

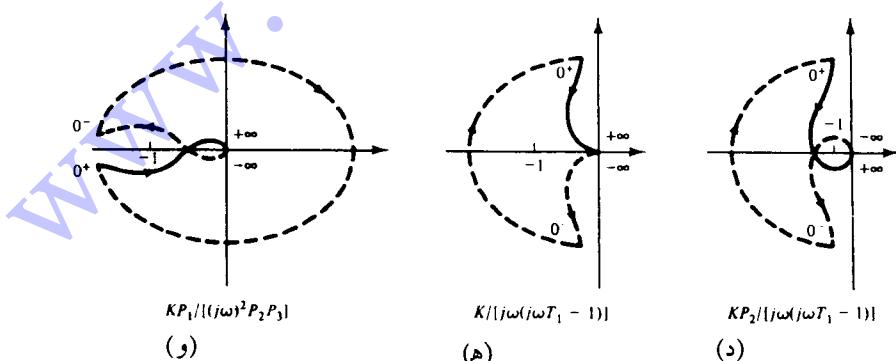
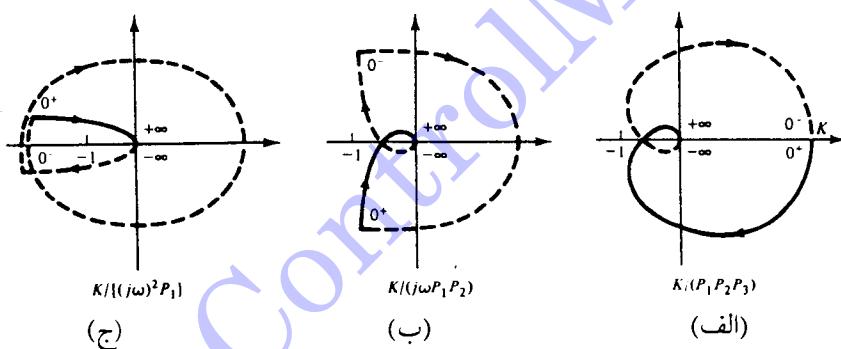


شکل ۲۹-۵ نمودار نایکوئیست در گسترره ۳۰-۵ نمودار نایکوئیست با فرکانس های مثبت و منفی. فرکانس بالا برای $G(j\omega)$ با صفر محدود و n قطب.

فرکانسی منفی حول محور حقیقی با نمودار پاسخ فرکانسی مثبت متقابن خواهد بود.
شکل ۳۰-۵ نمودار نایکوئیست تابع تبدیل مثال ۱۴-۵ را که در شکل ۲۰-۵ رسم شده بود، برای فرکانس‌های منفی تکمیل کرده است.

قاعده ۷- نمودار کامل نایکوئیست (قطبی) با وصل کردن قسمتهای وصل نشده منحنی نایکوئیست در بین نهایت بدست می‌آید. دو قسمت نمودار نایکوئیست در بین نهایت را توسط یک مسیر به هم وصل می‌کنیم، مسیر ارتباط دهنده در بین نهایت همواره باید در جهت عقربه ساعت حرکت کند و همچنین باید به گونه‌ای باشد که مسیر در جهت افزایش فرکانس باشد. نمودارهای کامل نایکوئیست چندین سیستم در شکلهای نشان داده شده در شکل ۳۱-۵ آورده شده‌اند. (برای تمرین می‌توانید کلیه این شکلها را با بکارگیری قواعد داده شده رسم کنید).

$$P_i \equiv j\omega T_i + 1$$



شکل ۳۱-۵ نمودارهای کامل نایکوئیست چند سیستم نمونه

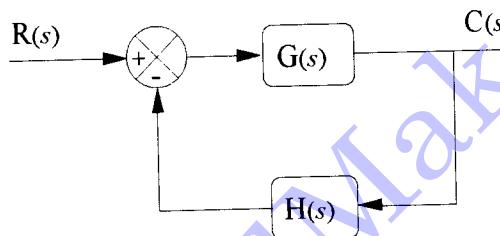
۴-۵ معیار پایداری نایکوئیست

سیستم نشان داده شده در شکل ۳۲-۵ را در نظر بگیرید.تابع تبدیل سیستم حلقه - بسته بدین صورت داده می شود

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \quad (1-4-5)$$

و معادله مشخصه آن عبارت است از

$$1+G(s)H(s)=0 \quad (2-4-5)$$



شکل ۳۲-۵ یک سیستم حلقه - بسته

با جایگزینی $H(s) = \frac{N_r(s)}{D_r(s)}$ و $G(s) = \frac{N_i(s)}{D_i(s)}$ در معادله (۲-۴-۵)، که در آن $N_r(s)$ و $N_i(s)$ معلوم باشند، با بررسی موقعیت ریشه های معادله $1+G(s)H(s)=0$ می توانیم بتوانیم بقیه قطب های سیستم حلقه - بسته را تعیین کرد.

$$1 + \frac{N_i(s)N_r(s)}{D_i(s)D_r(s)} = \frac{D_i(s)D_r(s) + N_i(s)N_r(s)}{D_i(s)D_r(s)}$$

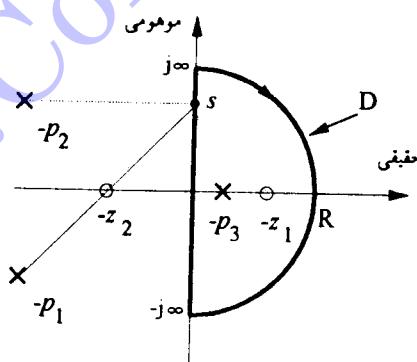
$$= \frac{K(s+z_1)(s+z_r)\dots}{(s+p_1)(s+p_r)\dots} \quad (3-4-5)$$

دقت کنید که قطب های سیستم حلقه - بسته (ریشه های معادله - مشخصه)، صفر های چند جمله ای $1+G(s)H(s)=0$ هستند. اگر z_1, z_2, \dots, z_r معلوم باشند، با بررسی موقعیت آنها در صفحه s پایداری سیستم حلقه - بسته بسادگی تعیین می شود. در حالت کلی موقعیت قطب های $1+G(s)H(s)=0$ که همان قطب های سیستم حلقه - بسته (p_1, p_2, \dots, p_r) هستند معلوم بوده ولی موقعیت صفر های $1+G(s)H(s)=0$ ، که قطب های سیستم حلقه - بسته (z_1, z_2, \dots, z_r) هستند، معلوم نمی باشد.

فرض کنید که تشکیلات قطب - صفر سیستم حلقه - بسته به صورت نشان داده شده در شکل ۳۳-۵ باشد، که در آن موقعیت z ها در حالت کلی معلوم نیست. شرط لازم و کافی پایداری سیستم حلقه - بسته آن است که هیچگدام از صفرهای معادله (۳-۴-۵) در ناحیه داخل مسیر نایکوئیست^۱ قرار نگیرند، به عبارت دیگر هیچگدام از قطبهای حلقه - بسته در محدوده نایکوئیست (سمت راست محور موهومی) نباشند. مسیر نایکوئیست D همانطور که در شکل ۳۳-۵ نشان داده شده است، مسیری است که کلیه نیمه راست صفحه s را در بر می گیرد و شامل محور موهومی از ∞j تا $\infty -j$ و یک نیمداire با شعاع $\rightarrow \infty$ در سمت راست صفحه است.

اساس تحلیل پایداری به روش نایکوئیست بر بررسی نمودار نایکوئیست $(s+G(s)H(s))$ در صفحه مختلف به ازاء تغییرات دهنگامی که یک بار در جهت عقربه ساعت دور مسیر D می چرخد، بنا نهاده شده است.

رسم نمودار نایکوئیست $G(j\omega)H(j\omega)$ به ازاء تغییرات ω از 0° تا 180° را در بخش ۳-۵ مفصلأً بررسی کردیم. در واقع نمودار نایکوئیست $(s+G(j\omega)H(j\omega))$ همان نمودار نایکوئیست $(s+G(j\omega)H(j\omega))$ است، در حالیکه مبدأ صفحه s به نقطه ۱- بر روی محور حقیقی منفی انتقال داده شده باشد. همچنین نمودار نایکوئیست $(s+G(j\omega)H(j\omega))$ ، به ازاء تغییرات ω از -180° تا 0° دقیقاً تصویر نمودار $(s+G(j\omega)H(j\omega))$ به ازاء تغییرات ω از 0° تا 180° حول

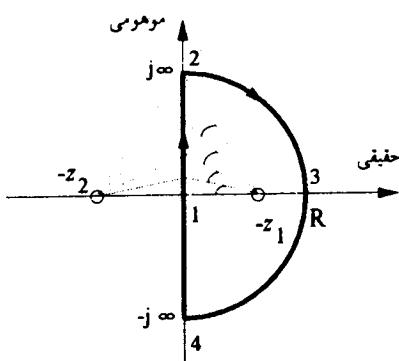


شکل ۳۳-۵ مسیر نایکوئیست

محور حقیقی است (خاصیت تقارن نمودارهای نایکوئیست، قاعده ۶ بخش ۳-۵).

برای آن قسمت از مسیر نایکوئیست که در طول نیم‌دایره با شعاع $\infty \rightarrow R$ قرار دارد، مقدار $(1+G(j\omega)H(j\omega))$ ثابت و معمولاً برابر یک است، زیرا از نظر تحقق پذیری فیزیکی، در اکثر سیستم‌ها تعداد قطبها بیشتر از تعداد صفرها است. از این‌رو مقدار $G(s)H(s)$ به ازاء $\infty \rightarrow s$ ، به سمت صفر میل خواهد کرد.

با مراجعه به شکل ۳۴-۵، اگر ω در جهت عقربه ساعت مسیر نایکوئیست D را یک بار دور بزند، بردارهای $s + z_1$ و $s + p_1$ برای z_i ‌ها و p_i ‌هایی که در داخل محدوده محصور شده توسط D هستند، 360° در جهت عقربه ساعت خواهد چرخید. برای توضیح بیشتر این مطلب، توجه کنید که اگر نقطه شروع حرکت، نقطه ω بر روی مسیر D ، همانطور که در شکل ۳۴-۵ نشان داده شده است، مبداء صفحه ω در نظر گرفته شود (این نقطه با ۱ نشان داده شده است) و ω در جهت حرکت عقربه ساعت به حرکت درمی‌آید، پس از رسیدن به نقطه ۲ در $j\infty$ بر روی نیم‌دایره با شعاع $\infty \rightarrow R$ به سمت نقطه ۳ حرکت خواهد کرد. در حرکت از نقطه ۱ تا ۳ مجموع زوایایی که بردار $s + z_1$ چرخیده است برابر با 180° خواهد بود. اگر ω در جهت عقربه ساعت به سمت نقطه ۴ در $\infty - j\infty$ حرکت کند و از $\infty - j\infty$ به 0° در نقطه ۱ برسد، مجموع زوایایی چرخیده شده از ۳ تا ۱ توسط بردار $s + z_1$ 180° خواهد بود. بنابراین بردار $s + z_1$ از نقطه شروع ۱ در 0° تا نقطه پایانی ۱ در 0° مجموعاً 360° در جهت عقربه ساعت چرخیده است. حال اگر نقطه ω را در نظر بگیریم، بردار $s + z_1$ از حرکت از ۱ و رسیدن به ۲ و با



شکل ۳۴-۵ زوایای چرخش

حرکت از ۲ و رسیدن به ۳ به ترتیب α^0 و α^0 - چرخش دارد. از این‌رو مجموعه چرخش‌های بردار $z+2z$ برابر صفر درجه خواهد بود. به طور مشابه، مجموع چرخشها از ۳ به ۴ و ۴ به ۱ نیز صفر درجه است و لذا مجموع چرخشها از نقطه شروع ۱ در $+90^\circ$ تا نقطه پایانی ۱ در -90° مجموعاً صفر درجه است. بنابراین قطب‌هایی که در خارج از ناحیه محصور شده توسط مسیر نایکوئیست D قرار گیرند (به عبارت دیگر قطب‌هایی که در سمت چپ محور موهومی قرار دارند) مجموع چرخشی برابر 0° خواهند داشت.

از معادله (۴-۴-۵) (با توجه به اینکه z ‌ها در صورت قرار دارند) اگر بردار $z+2z$ در 360° درجه عقربه ساعت بچرخد، 360° چرخش در جهت عقربه ساعت برای بردار $(1+G(s)H(s))$ در صفحه مختلف که در آن رسم شده است، ایجاد می‌کند. اگر بردار $z+p_z$ (با توجه به اینکه p_z ‌ها در مخرج قرار دارند) 360° در جهت عقربه ساعت بچرخد، 360° چرخش در جهت عقربه ساعت برای بردار $(1+G(s)H(s))$ در صفحه مختلف که در آن رسم شده است، ایجاد می‌کند. قطبها و صفرهای خارج از ناحیه داخل مسیر D نیز در چرخش کنی بردار $1+G(s)H(s)$ اثری ندارند. نتایج بدست آمده را به صورت زیر جمع‌بندی می‌کنیم:

۱- مجموع کلیه چرخش‌های در جهت عقربه ساعت نمودار $(1+G(s)H(s))$ ناشی از صفرهای آن (قطبهای حلقه - بسته) برابر با مجموع صفرها در سمت راست صفحه

$(Z_R)_s$ می‌باشد.

۲- مجموع کلیه چرخش‌های در جهت خلاف عقربه ساعت نمودار $(1+G(s)H(s))$ ناشی از قطب‌های آن (قطبهای حلقه - باز) برابر با مجموع چرخشها در سمت راست صفحه $(P_R)_s$ می‌باشد.

۳- مجموع کلیه چرخش‌های $(1+G(s)H(s))$ حول مبدأ صفحه s (برابر با مجموع کلیه قطبها P_R منتهای مجموع کلیه صفرها Z_R در نیمه راست صفحه) داشت. به عبارت دیگر

$$N = \frac{\text{اختلاف فاز}}{2\pi} = P_R - Z_R \quad (4-4-5)$$

که در آن چرخش در خلاف عقربه ساعت و در جهت عقربه ساعت به ترتیب مثبت و منفی در نظر گرفته شده است.

معادله (۵-۴-۴) اساس معیار پایداری نایکوئیست است. توجه کنید که برای پایداری

سیستم حلقه - بسته Z_R باید برابر صفر باشد و لذا

$$N = P_R \quad (5-4-5)$$

یعنی آنکه شرط لازم و کافی برای پایداری سیستم حلقه - بسته آن است که نمودار نایکوئیست $1 + G(j\omega)H(j\omega)$ ۱ بار (به تعداد قطب‌های ناپایدار حلقه - باز) در جهت خلاف عقربه ساعت حول مبدأ صفحه ۳ دور بزند. برای آنکه بتوان این نتیجه مهم را به صورت قابل استفاده‌تری بیان کرد، همانطور که قبل اشاره شد نمودار نایکوئیست $(1 + G(j\omega)H(j\omega))$ ۱ همان نمودار نایکوئیست $G(j\omega)H(j\omega)$ است، که به مقدار ۱ - بر روی محور حقیقی منفی انتقال داده شده است. بنابراین تعداد دورانهای نمودار نایکوئیست $(1 + G(j\omega)H(j\omega))$ حول مبدأ برابر با تعداد دورانهای نمودار نایکوئیست $G(j\omega)H(j\omega)$ حول نقطه ۱ - بر روی محور حقیقی منفی می‌باشد.

معیار پایداری نایکوئیست: یک سیستم حلقه - بسته پایدار است اگر و فقط اگر، تعداد

دورانهای نمودار نایکوئیست $G(j\omega)H(j\omega)$ در جهت خلاف عقربه ساعت حول نقطه

۱ - برابر با تعداد قطب‌های ناپایدار $G(j\omega)H(j\omega)$ باشد.

بسیاری از سیستم‌های عملی حلقه - باز پایدار هستند، یعنی آنکه $P_R = 0$ معیار پایداری

نایکوئیست برای این دسته از سیستم‌ها به صورت زیر بیان می‌گردد:

یک سیستم حلقه - بسته با سیستم حلقه - باز پایدار، پایدار خواهد بود اگر و فقط اگر

نمودار نایکوئیست سیستم حلقه - باز دورانی حول نقطه ۱ - نداشته باشد.

در حالت کلی، برای آنکه بتوان دورانهای نمودار نایکوئیست $G(j\omega)H(j\omega)$ را حول نقطه

۱ - تعیین کرد، رسم کامل نمودار نایکوئیست الزامی است. اگر $G(j\omega)H(j\omega)$ پایدار باشد،

می‌توان نشان داد که رسم کامل نمودار نایکوئیست الزامی نبوده و نمودار نایکوئیست برای

از $+\infty$ تا $+\infty$ کافی خواهد بود.

معیار ساده شده نایکوئیست: اگر $G(j\omega)H(j\omega)$ پایدار باشد. سیستم حلقه - بسته

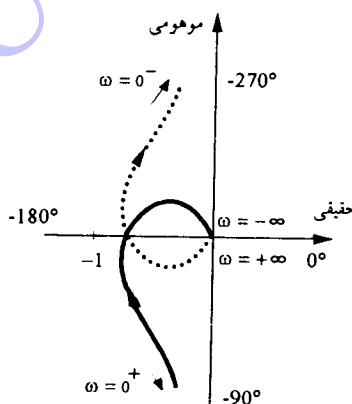
پایدار است اگر و فقط اگر هنگامی که در جهت افزایش ω بر روی نمودار نایکوئیست

$G(j\omega)H(j\omega)$ حرکت کنیم، نقطه ۱ در سمت چپ نمودار قرار گیرد.

سیستم‌های نوع یک و بالاتر در استنتاج ارایه شده برای معیار پایداری نایکوئیست، فرض شده است که هیچکدام از قطبهای حلقه - باز سیستم بر روی محور موهومی (مسیر نایکوئیست) قرار نگرفته باشند (سیستم نوع صفر). در صورتیکه $(G(s)H(s))$ قطبایی در مبداء داشته باشد، مسیر نایکوئیست شکل ۳۵-۵ باید به صورت مناسبی تغییر داده شود. برای مثال تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)H(s) = \frac{K_1}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)} \quad (6-4-5)$$

نمودار نایکوئیست این تابع تبدیل برای تغییرات ω از $-\infty$ تا $+\infty$ در شکل ۳۵-۵ رسم شده است. در این حالت تابع تبدیل حلقه - باز یک قطب در مبداء دارد و لذا مسیر نایکوئیست شکل ۳۵-۵ به صورت نشان داده شده در شکل ۳۶-۵ (الف)، تغییر داده شده است تا ω بر روی مسیر نایکوئیست از نقطه $\omega = 0$ که یک نقطه ناویژه $(s=0)$ است عبور نکند. همانطور که از شکل ۳۶-۵ (الف) مشاهده می‌شود برای بررسی پایداری، $\omega = 0$ به سمت نقطه $4j\omega$ ($\rightarrow 0^+$) انتقال پیدا می‌کند. از نقطه $4j\omega$ دنیز همانند قبل به سمت $j\omega = +\infty$ می‌خواهد کرد. وقت کنید که برای $\omega = +\infty$ نیمداخیه حول مبداء موج می‌شود که مسیر نایکوئیست از مبداء عبور نکند و همزمان ناحیه محصور شده توسط مسیر نایکوئیست کلیه



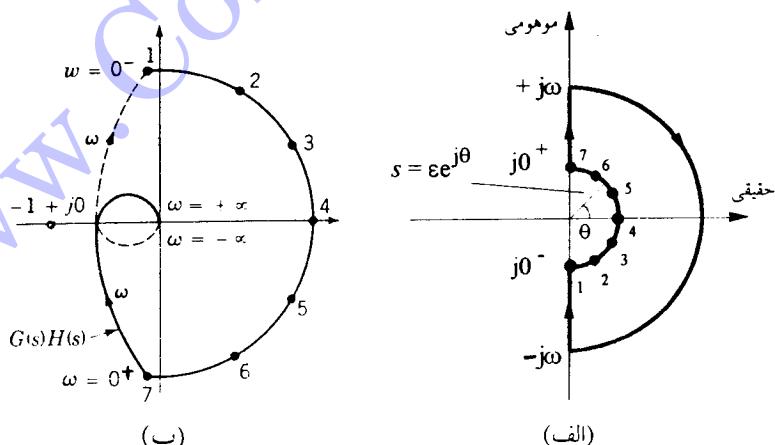
شکل ۳۵-۵ نمودار نایکوئیست تابع تبدیل داده شده با معادله (۶-۴-۵)

قطبهای و صفرهای ناپایدار را دربرگیرد. برای آنکه بتوان نمودار نایکوئیست را برای این مسیر تکمیل کرد باید اثر حرکت نقطه s بر روی این نیمداایره حول مبداء را در نظر گرفت.
برای نیمداایره حول مبداء داریم $s = \epsilon e^{j\theta}$, که در آن $0 \leq \theta \leq \pi/2$. لذا با جایگزینی برای s و $\omega \rightarrow \epsilon e^{j\theta}$ در معادله (۴-۵)، داریم

$$G(s)H(s) = \frac{K_1}{s} = \frac{K_1}{\epsilon e^{j\theta}} = \frac{K_1}{\epsilon} e^{-j\theta} = \frac{K_1}{\epsilon} e^{j\phi}$$

که در آن $K_1/\epsilon \rightarrow \omega$ و ϕ از 0 به $\frac{\pi}{2}$ - برای حرکت s در جهت خلاف عقربه ساعت از نقطه $(-\epsilon, 0)$ به $(\epsilon, 0)$ تغییر پیدا می‌کند. بنابراین همانطور که در شکل ۳۶-۵ (ب) مشاهده می‌شود، نقاط پایانی $\omega = 0^+$ و $\omega = +\infty$ توسط یک نیمداایره به شعاع بی‌نهایت از $\pi/2$ تا 0 - در جهت عقربه ساعت به هم وصل می‌شوند. نقاط مشخص شده ۱ الی ۷ مراحل مختلف انتقال از $\omega = 0^+$ به $\omega = +\infty$ را مشخص می‌کنند.

نمودار $G(j\omega)H(j\omega)$ در شکل ۳۶-۵ (ب) نقطه ۱- را دور نمی‌زند و لذا تعداد دورانها حول این نقطه $N = 0$ خواهد بود. برای $\omega = T_1, T_2 > 0$ ،تابع تبدیل داده شده با معادله (۴-۵) پایدار است و لذا $P_R = 0$ ، از معادله (۴-۵) داریم که $Z_R = 0$ و لذا سیستم حلقه - بسته پایدار است.



شکل ۳۶-۵ (الف) مسیر اصلاح شده نایکوئیست (ب) نمودار کامل نایکوئیست (۴-۵)

در حالت کلی، توابع تبدیلی که عبارت m^d را در مخرج دارند، برای $\omega \rightarrow \theta$ به صورت زیر می‌باشد

$$G(s)H(s) = \frac{K_m}{s^m} = \frac{K_m}{(\epsilon^m)e^{jm\theta}} = \frac{K_m}{\epsilon^m} e^{-jm\theta} \quad (7-4-5)$$

که در آن $m=1, 2, 3, \dots$ است. از معادله (7-4-5)، بسادگی مشاهده می‌شود که به ازاء تغییرات θ از 0° تا 180° نمودار $G(s)H(s)$ نیمداireها بینی در جهت عقربه ساعت با شعاع بینی نهایت را حول مبدأ دنبال می‌کند. اگر $m=2$ باشد، آنگاه به ازاء تغییرات θ از $-\pi/2$ به $\pi/2$ در صفحه ۳D شعاع ϵ ، $(G(s)H(s))$ به اندازه $360^\circ = 2(180^\circ)$ خواهد چرخید.

عبور از نقطه $z=1$. نقطه مهم در تحلیل پایداری با معیار نایکوئیست، نقطه ۱-بر روی محور حقیقی منفی است. اگر نمودار $G(j\omega)H(j\omega)$ از نقطه ۱-عبور کند، تعداد چرخش‌های N نامعین است. این حالت متناظر با شرایطی است که در آن $(s+G(s)H(s))$ صفرهایی بر روی محور موهومی داشته باشد و در صورتی که این صفرها ساده باشند، پاسخ در حالت -ماندگار مؤلفه‌های سینوسی غیرمیرا دارد. لیکن در حالت کلی اگر نمودار $G(j\omega)H(j\omega)$ از نقطه ۱-عبور کند، پایداری نایکوئیست را نمی‌توان اعمال نمود.

۱۶-۵ مثال

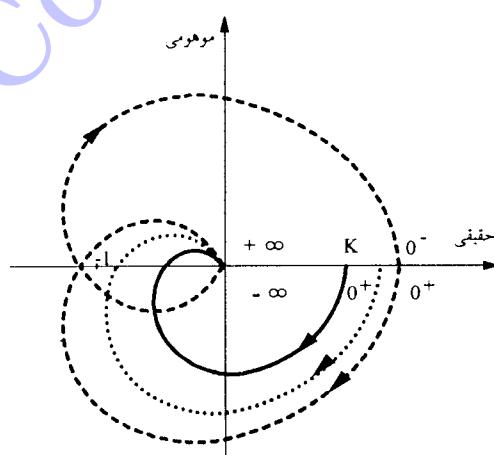
پایداری سیستم‌های (الف) تا (و) را با استفاده از معیار پایداری نایکوئیست، از نمودارهای کامل نایکوئیست نشان داده شده در شکل ۳۱-۵ بررسی کنید.

(الف): برای T_1 ، T_2 و T_3 مثبت، سیستم حلقه - باز پایدار است ولذا $P_R = 0$. اگر مقادیر عددی به گونه‌ای باشند که نمودار نایکوئیست به صورت نشان داده شده در شکل ۳۱-۵ (الف) باشد، نمودار نایکوئیست نقطه ۱-را در برنمی‌گیرد و لذا دورانی حول آن خواهد داشت. با توجه به معادله (4-۴-۵) تعداد قطبهای حلقه - بسته ناپایدار Z_R صفر و لذا سیستم حلقه - بسته پایدار است. اگر بهره سیستم حلقه - باز را افزایش دهیم، زاویه فاز $G(j\omega)$ تغییر خواهد کرد لیکن دامنه آن متناسب با افزایش خواهد یافت. از این‌رو افزایش در بهره K موجب آن می‌گردد که هر نقطه بر روی نمودار نایکوئیست، به طور شعاعی به طرف خارج حرکت خواهد کرد. اثر

افزایش بهره K بر روی نمودار نایکوئیست در شکل ۳۷-۵ نشان داده شده است. توجه کنید که بعد از یک بهره مشخص، نقطه ۱- در داخل نمودار نایکوئیست قرار می‌گیرد و اگر به طور کامل آنرا رسم کنیم، تعداد دورانهای حول نقطه ۱- توسط نمودار نایکوئیست برای ω از $-\infty$ تا $+\infty$ و از 0^+ تا 0^- در جهت عقربه ساعت دوبار می‌باشد و سیستم با دو قطب حلقه - بسته در سمت راست محور موهومی ناپایدار است.

(ب): همانطور که از شکل ۳۱-۵ (ب) مشاهده می‌شود، با توجه به نوع یک بودن سیستم، برای تکمیل نمودار نایکوئیست نقاط پایانی 0^+ و 0^- توسط یک دوران 180° در جهت عقربه ساعت با شاعع $R \rightarrow \infty$ به هم وصل می‌شوند. برای T_1 و T_2 مثبت، سیستم حلقه - باز پایدار می‌باشد و از آنجاییکه نقطه ۱- توسط نمودار نایکوئیست دربرگرفته نشده است، لذا سیستم حلقه - بسته پایدار است. در این حالت نیز با افزایش بهره K نمودار نایکوئیست نقطه ۱- را در برگرفته، تعداد دورانها حول نقطه ۱- برابر با دو می‌باشند و سیستم حلقه - بسته ناپایدار خواهد شد.

(ج): در این حالت سیستم نوع دو است و در تکمیل نمودار نایکوئیست باید 360° چرخش در جهت عقربه ساعت با شاعع $R \rightarrow \infty$ برای اتصال 0^+ و 0^- داشته باشیم. با توجه به دوبار چرخش نمودار نایکوئیست حول نقطه ۱- سیستم به ازاء کلیه بهره K ناپایدار است.



شکل ۳۷-۵ افزایش بهره K بر روی نمودار نایکوئیست شکل ۳۱-۵ (الف)

(د): با توجه به $(T, > 0)$ تابع تبدیل یک قطب ناپایدار دارد. تعداد دورانهای حول نقطه ۱- توسط نمودار نایکوئیست یک دور در جهت خلاف عقربه ساعت است. با توجه به معیار پایداری نایکوئیست، از آنجاییکه تعداد دورانهای نمودار نایکوئیست حول نقطه ۱- در جهت خلاف عقربه ساعت و برابر با تعداد قطبهای ناپایدار حلقه- باز است، لذا سیستم حلقه- بسته پایدار است. دقت کنید که اگر بهره K را کاهش دهیم نقاطه تقاطع نمودار نایکوئیست با محور حقیقی منفی به سمت نقطه ۱- حرکت می کند. اگر کاهش بهره به میزانی باشد که نقاطه تقاطع نمودار نایکوئیست با محور حقیقی سمت راست نقطه ۱- باشد، سیستم حلقه- بسته ناپایدار خواهد شد و دوران حول نقطه ۱- یک بار در جهت عقربه ساعت خواهد بود $N = -1$. از اینرو $Z_R = 1 - Z_R = 1$.

(ه): تابع تبدیل شکل ۳۱-۵ (ه) نیز ناپایدار است. برای $\omega \rightarrow 0^+$ تابع تبدیل به سمت $-K/\omega$ میل خواهد کرد. با توجه به علامت منفی و فاکتور $j\omega$ در مخرج، لذا نقاطه شروع نمودار نایکوئیست برای $\omega \rightarrow 0^+$ از $\infty + j\infty$ خواهد بود. برای $\omega \rightarrow \infty$ تابع تبدیل به سمت یک ثابت تقسیم بر ω (ج) میل می کند و لذا از سمت چپ به مبداء صفحه موهومی وارد خواهد شد. از آنجاییکه سیستم نوع یک است، برای اتصال ω به 0^+ چرخشی معادل 180° در جهت عقربه ساعت با شعاع ∞R خواهیم داشت. همانطور که از شکل ۳۱-۵ (ه) مشاهده می شود، تعداد دورانها حول نقطه ۱- یک بار در جهت عقربه ساعت می باشد و از اینرو سیستم حلقه- بسته به ازاء کلیه بهره K ناپایدار خواهد بود. دقت کنید که در این حالت کاهش و یا افزایش بهره هیچ تأثیری در پایداری سیستم و تعداد دورانها حول نقطه ۱- ندارد.

(و): برای آنکه تعداد دورانهای حول نقطه ۱- سیستم پایدار نوع دو شکل ۳۱-۵ (و) را بشماریم، نخی را در نظر بگیرید که یک سر آن بر روی نقطه ۱- ثابت شده باشد و سر دیگر آن را بر روی نمودار نایکوئیست از ∞^- تا 0^+ و از 0^- تا $+\infty$ داشته باشد. حرکت دهیم. برخلاف آنچه که ممکن است در اولین برشورده نظر آید، در این حالت تعداد دورانها حول نقطه ۱- صفر خواهد بود. دقت کنید که کلیه دورانها با یک دوران در جهت عکس و به همان اندازه صفر خواهند شد. بنابراین سیستم حلقه- بسته پایدار

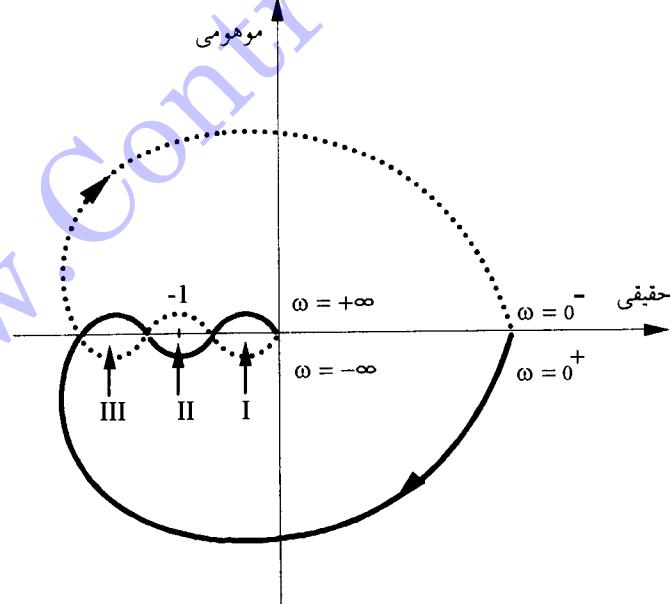
خواهد بود. سیستم شکل ۳۱-۵ (و) در واقع همان سیستم همواره ناپایدار شکل ۳۱-۵ (ج) است که به آن یک صفر و قطب مناسب اضافه شده است. این مثال اثر پایدار کننده اضافه کردن صفر و قطب به تابع تبدیل ناپایدار را بخوبی نشان می دهد.

مثال ۱۷-۵

تابع تبدیل سیستمی عبارتست از

$$G(s) = \frac{K_0 (1+T_1 s)^2}{(1+T_2 s)(1+T_3 s)(1+T_4 s)(1+T_5 s)}$$

که در آن $T_1 < T_2 < T_3 < T_4 < T_5$. نمودار کامل نایکوئیست این تابع تبدیل در شکل ۳۸-۵ برای یک بهره خاص نشان داده شده است. همانند قسمت (و) مثال ۱۶-۵ اگر یک سرخ را نیز در این مثال بر روی نقطه ۱- ثابت کنید و انتهای دیگر آنرا به روی نمودار از $\omega = -\infty$ تا $\omega = +\infty$ حرکت درآورید، تعداد دورانهای حول نقطه ۱- صفر خواهد بود. در این مثال اگر



شکل ۳۸-۵ نمودار کامل نایکوئیست تابع تبدیل مثال ۱۷-۵

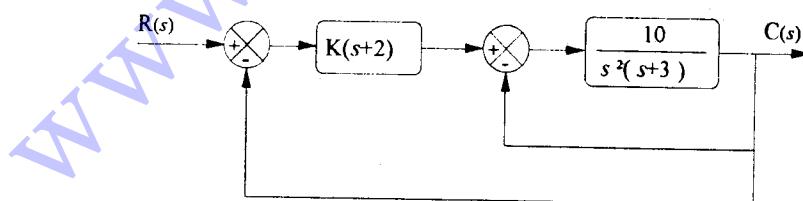
بهره را به اندازه کافی افزایش و یا کاهش دهیم در هر دو صورت، سیستم حلقه - بسته ناپایدار خواهد شد. در واقع اگر بهره را به اندازه کافی افزایش دهیم نقطه ۱- در محدوده I قرار خواهد گرفت و تعداد دورانها حول نقطه ۱- برابر با دو دور جهت عقربه ساعت خواهد بود. بنابراین $Z_R = 2$ و سیستم ناپایدار است. از طرف دیگر، اگر بهره را به اندازه کافی کاهش دهیم نقطه ۱- در محدوده III قرار خواهد گرفت و تعداد دورانها حول نقطه ۱- برابر با دو چرخش در جهت عقربه ساعت می‌باشد و سیستم ناپایدار است. اگر بهره را باز هم کاهش دهیم، نقطه ۱- در سمت چپ نمودار نایکوئیست قرار می‌گیرد و تعداد دورانها حول نقطه ۱- صفر می‌شوند و سیستم باز هم پایدار است. این چنین سیستمی را پایدار شرطی^۱ گویند. سیستم پایدار شرطی، سیستمی است که برای یک گستره از بهره‌ها پایدار است و افزایش یا کاهش به مقدار مناسب، موجب ناپایدار شدن آن می‌گردد. در کار با سیستم‌های عملی با پایداری شرطی باید دقیق کافی را در رابطه با پایداری آنها مبذول داشت.

مثال ۱۸-۵

با بکارگیری معیار نایکوئیست، گستره بهره K را برای پایداری سیستم نشان داده شده در شکل ۳۹-۵ تعیین کنید.

نخست دیاگرام بلوكی شکل ۳۹-۵ را به صورت یک سیستم فیدبک واحد تبدیل می‌کنیم. تابع تبدیل معادل حلقه - باز در یک سیستم حلقه - بسته با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{10K(s+2)}{s^3 + 3s^2 + 10}$$



شکل ۳۹-۵ دیاگرام بلوكی سیستم مثال ۱۸-۵

برای رسم نمودار کامل نایکوئیست $G(j\omega)$ ، داریم

$$G(j\omega) = \frac{10K(2+j\omega)}{(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 10}$$

سیستم، نوع صفر، مرتبه سوم و یک صفر محدود پایدار دارد. محل قطب‌های این سیستم معلوم نمی‌باشدند، از این‌رو از معیار روث برای تعیین پایداری سیستم حلقه - باز استفاده می‌کنیم. آرایه روث عبارتست از:

s^3	1	0
s^2	3	10
s^1	-10	0
s^0	1	

توجه کنید که در اولین ستون دو تغییر علامت وجود دارد و لذا سیستم حلقه - باز با دو قطب سمت راست ناپایدار است، $P_R = 2$. داریم

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{10K(j\omega+2)}{10-3\omega^2-j\omega^3} \\ &= \frac{10K[2(10-3\omega^2)-\omega^4+j\omega(10-3\omega^2)+j2\omega^3]}{(10-3\omega^2)^2+\omega^6} \end{aligned}$$

از $\text{Im}[G(j\omega)] = 0$ بدست می‌آوریم و $\omega = \sqrt{10}$ ، که فرکانس‌های نقاط قطع محور حقیقی با نمودار نایکوئیست $G(j\omega)$ هستند. برای تعیین نقاط قطع محور موهومی، قرار می‌دهیم و لذا

$$\omega^4 + 6\omega^2 - 20 = 0$$

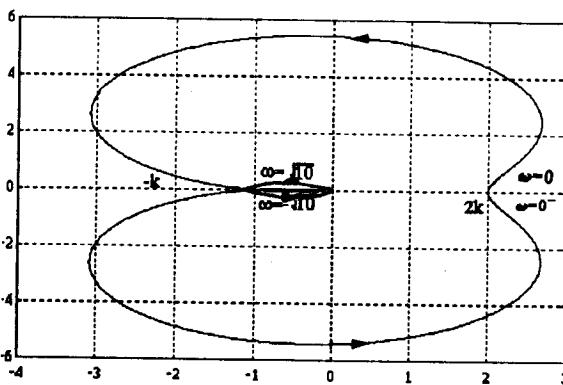
که می‌دهد $\omega \approx 1/544$. بنابراین نقاط قطع با محور حقیقی عبارتند از

$$G(j\omega) = 2K, \quad G(j\sqrt{10}) = -K$$

و نقاط قطع با محور موهومی عبارتند از

$$G(j\omega) = j5/482K$$

با داده‌های بدست آمده، نمودار نایکوئیست این تابع تبدیل در شکل ۴۰-۵ رسم شده است. از آنجاییکه سیستم حلقه - باز دو قطب ناپایدار دارد، از معیار پایداری نایکوئیست داریم که



شکل ۴۰-۵ نمودار کامل نایکوئیست تابع تبدیل مثال ۱۸-۵

سیستم حلقه - بسته پایدار است اگر تعداد دورانهای در جهت خلاف عقربه ساعت حول نقطه ۱- توسط نمودار کامل نایکوئیست برابر دو باشد. بنابراین برای پایداری، باید نقطه ۱- در داخل نمودار نایکوئیست قرار گیرد. از این‌رو شرط پایداری سیستم حلقه - بسته عبارتست از

$$K > 1$$

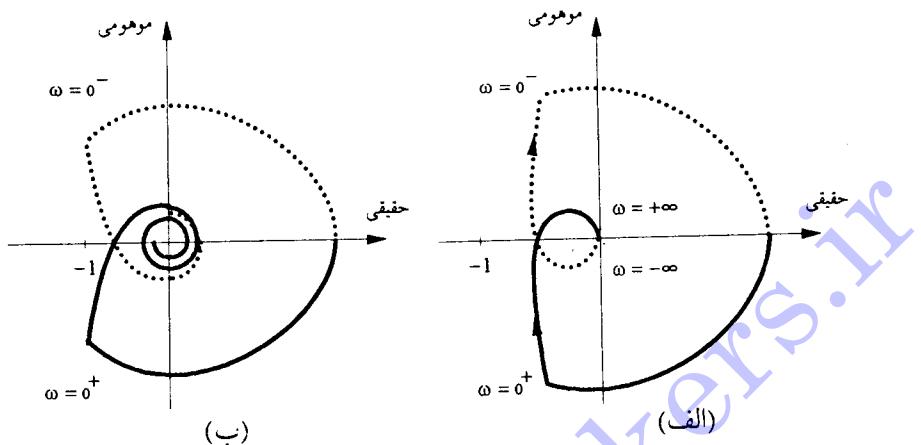
مثال ۱۹-۵

پایداری سیستم داده شده با تابع تبدیل

$$G(s) = \frac{K_1 e^{-\tau s}}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

را که در آن τ زمان تأخیر است، برای $K_1 = 1$ و $T_1 = T_2 = 1$ با بکارگیری معیار پایداری نایکوئیست بررسی کنید.

نمودارهای نایکوئیست تابع تبدیل بالا برای $K_1 = 1$ و $T_1 = T_2 = 1$ به ترتیب در شکل‌های ۴۱-۵ (الف) و (ب) رسم شده‌اند. همانطور که از شکل‌های ۴۱-۵ (الف) و (ب) مشاهده می‌شود، نمودار نایکوئیست $G(j\omega)$ به طرف ۱- در جهت عقربه ساعت انتقال داده شده است. بنابراین اگر زمان تأخیر بزرگتر گردد، می‌تواند با عبور دادن نمودار نایکوئیست از نقطه بحرانی ۱-، سیستم حلقه - بسته را ناپایدار کند. بنابراین زمان تأخیر باعث کاهش پایداری سیستم حلقه - بسته می‌شود.



شکل ۴-۵ (الف) نمودار نایکوئیست بدون تغییر (ب) نمودار نایکوئیست با تغییر

۵-۵ نمودارهای نایکوئیست معکوس

در بسیاری از موارد رسم نمودارهای نایکوئیست (مستقیم) برای سیستم‌هایی که عناصری در مسیر فیدبک دارند، مشکل می‌شود. در این موارد رسم نمودارهای معکوس نایکوئیست^۱ ساده‌تر خواهد بود. نمودار نایکوئیست معکوس تابع تبدیل $G(j\omega)$ با رسم نمودار

$$G^{-1}(j\omega) = \frac{1}{G(j\omega)} = \frac{R(j\omega)}{C(j\omega)} \quad (1-5-5)$$

برحسب فرکانس ω بدست می‌آید. برای نشان دادن رسم نمودارهای نایکوئیست معکوس، نمودارهای نایکوئیست معکوس سه سیستم نمونه نوع صفر، نوع یک و نوع دو را رسم می‌کنیم.

سیستم نوع صفر، سیستم نوع صفر داده شده با معادله (۲-۳-۵) را در نظر بگیرید. تابع تبدیل معکوس آن عبارتست از

$$G^{-1}(j\omega) = \frac{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)}{K} \quad (2-5-5)$$

از معادله (۲-۵-۵) داریم

$$G^{-1}(j\omega) \rightarrow \frac{1}{K} \angle 0^\circ \quad \omega \rightarrow 0^+$$

$$G^{-1}(j\omega) \rightarrow \infty \angle 180^\circ \quad \omega \rightarrow \infty$$

۱- Inverse Nyquist plots

توجه کنید که زوایای هر کدام از عبارات صورت $G^{-1}(j\omega)$ به ازاء تغییرات ω از $+\infty$ تا 0° تغییر پیدا می‌کند. از آنجاییکه هیچ عبارت وابسته به فرکانسی در مخرج عبارت معادله (۲-۵-۵) نمی‌باشد، زاویه فاز $G^{-1}(j\omega)$ به طور پیوسته‌ای برای تغییرات ω از $+\infty$ تا 0° 180° تغییر پیدا می‌کند. نمودار نایکوئیست معکوس سیستم نوع صفر داده شده با معادله (۲-۵-۵)، در شکل ۴۲-۵ نشان داده شده است. دقت کنید که اگر در صورت $G^{-1}(j\omega)$ تنها یک عبارت $1+j\omega T_1$ وجود داشت، زاویه $G^{-1}(j\omega)$ از 0° تا 90° دوران پیدا می‌کرد. با اضافه کردن عبارت $1+j\omega T$ در صورت $G^{-1}(j\omega)$ ، این عبارت باعث می‌شود که 90° دوران در جهت خلاف عقریه ساعت در زاویه $G^{-1}(j\omega)$ ، برای قسمت فرکانس بالای نمودار ایجاد شود. سیستم نوع یک.تابع تبدیل سیستم نوع یک داده شده با معادله (۶-۳-۵) را در نظر بگیرید. معکوس تابع تبدیل عبارتست از

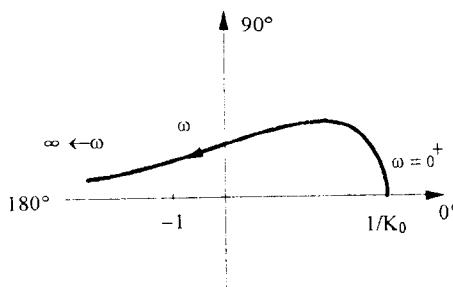
$$G^{-1}(j\omega) = \frac{j\omega(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)(1+j\omega T_3)}{K_1} \quad (3-5-5)$$

در این حالت داریم

$$G^{-1}(j\omega) \rightarrow 0 \angle 90^\circ \quad \omega \rightarrow +\infty$$

$$G^{-1}(j\omega) \rightarrow \infty \angle 270^\circ \quad \omega \rightarrow +\infty$$

در اینجا هر عبارت صورت باعث دوران 90° در جهت خلاف عقریه ساعت به ازاء تغییرات ω از $+\infty$ تا 0° ، در زاویه $G^{-1}(j\omega)$ خواهد شد. نمودار نایکوئیست تابع تبدیل معکوس (۳-۵-۵) در شکل ۴۳-۵ نشان داده شده است. نقاط قطع با محور حقیقی و موهومی،



شکل ۴۲-۵ نمودار معکوس نایکوئیست تابع تبدیل داده شده با معادله (۲-۵-۵)

همانند قبل از روابط $\text{Re}[G^{-1}(j\omega)] = 0$ و $\text{Im}[G^{-1}(j\omega)] = 0$ تعیین می‌گردد.
سیستم نوع دو معکوس تابع تبدیل یک سیستم نوع دو داده شده با معادله (۴-۵-۳) عبارتست از

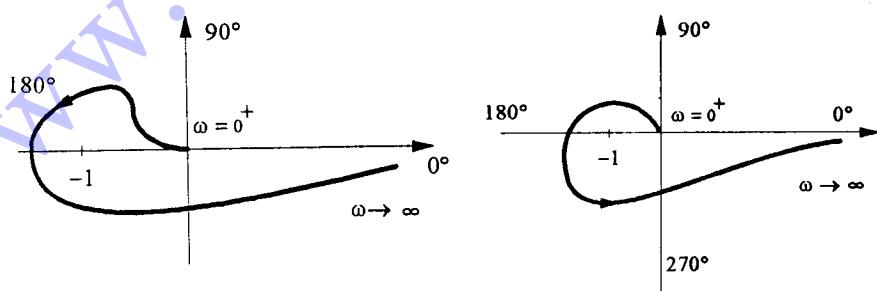
$$G^{-1}(j\omega) = \frac{(j\omega)^r (1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)(1+j\omega T_3)}{K_r(1+j\omega T_4)} \quad (4-5-5)$$

برای این تابع تبدیل معکوس داریم

$$G^{-1}(j\omega) \rightarrow 0 \angle 90^\circ \quad \omega \rightarrow 0^+$$

$$G^{-1}(j\omega) \rightarrow \infty \angle 36^\circ \quad \omega \rightarrow +\infty$$

توجه کنید که برای فرکانس‌های بالا در تابع تبدیل معکوس داده شده با معادله (۴-۵-۵)، زاویه فاز $+90^\circ$ ایجاد شده توسط یکی از عبارات در صورت، با زاویه فاز -90° ایجاد شده توسط عبارت مخرج، همدیگر را حذف خواهند کرد. نمودار نایکوئیست معکوس تابع تبدیل داده شده با معادله (۴-۵-۵)، در شکل ۴۴-۵ رسم شده است. دقت کنید که با توجه به مقادیر عددی ضرایب ثابت T_i ها و K_r ، یک ناپیوستگی در روند افزایش زاویه $(j\omega)^r$ بوجود خواهد آمد که در شکل ۴۴-۵ نشان داده شده است.
در اینجا قواعدی برای رسم نقاط کلیدی نمودارهای نایکوئیست معکوس ارایه می‌گردد، که رسم این نمودارها را ساده‌تر و سریعتر می‌سازد:



شکل ۴۴-۵ نمودار معکوس نایکوئیست تابع تبدیل داده شده با معادله (۴-۵-۵) -

قاعده ۱: با تعیین نوع سیستم تابع تبدیل حلقه - باز، قسمت فرکانس پایین ($\omega \rightarrow 0^+$) نمودار نایکوئیست معکوس تعیین می‌گردد.

قاعده ۲: تابع تبدیل کلی معکوس یک سیستم عبارتست از

$$G^{-1}(s) = \frac{s^m p(s)}{K_m q(s)} \quad (45-5)$$

که در آن، درجه‌های $p(s)$ و $q(s)$ به ترتیب m و n می‌باشند. قسمت فرکانس بالای نمودار نایکوئیست معکوس بدین صورت تعیین می‌گردد:

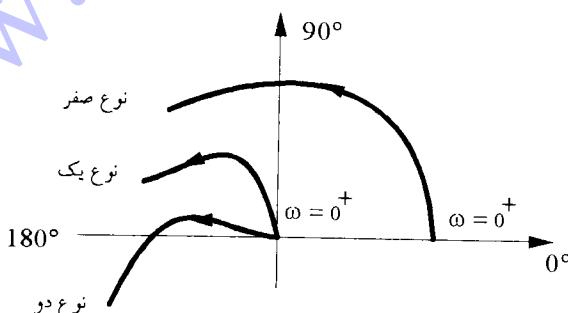
$$G^{-1}(j\omega) \rightarrow \infty \angle (m+n-w)90^\circ \quad \omega \rightarrow \infty$$

قاعده ۳: فرکانس‌هایی که در آنها نمودار نایکوئیست معکوس محور حقیقی و محور موهومی را قطع می‌کنند، به ترتیب از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\text{نوع صفر} = G^{-1}(j\omega) \quad \text{و} \quad \text{نوع یک} = G^{-1}(j\omega) \quad \text{و} \quad \text{نوع دو} = G^{-1}(j\omega) \quad \text{قسمت حقیقی}$$

قاعده ۴: شکل دقیق نمودار نایکوئیست معکوس در نزدیکی محور حقیقی منفی بسیار مهم است و رسم $G^{-1}(j\omega)$ در این ناحیه باید با استفاده از قاعده ۳ یا با بکارگیری نرم‌افزارهای کامپیوتری بدقت انجام پذیرد.

خلاصه‌ای از نمودارهای نایکوئیست معکوس انواع مختلف سیستم‌ها در شکل ۴۵-۵ نشان داده شده‌اند. همانند نمودارهای نایکوئیست مستقیم، مشخصه فرکانس پایین نمودارها نوع سیستم را مشخص می‌کنند.



- شکل ۴۵-۵ خلاصه‌ای از نمودارهای نایکوئیست معکوس برای انواع مختلف سیستم‌ها

۶-۵ اعمال معیار پایداری نایکوئیست به نمودارهای نایکوئیست معکوس

معیار نایکوئیست اعمال شده به نمودارهای معکوس، همانند معیاری است که به نمودارهای مستقیم اعمال می‌گردد. فقط یک تفاوت جزئی وجود دارد، که در اینجا به توضیح آن خواهیم پرداخت. معادله مشخصه سیستم حلقه - بسته عبارتست از $\frac{1}{G(s)H(s)} + G(s)H(s) = 0$ و برای پایداری سیستم حلقه - بسته، کلیه ریشه‌های این معادله باید در محدوده پایداری (نیمه چپ صفحه ۵) قرار گیرند. اگر طرفین این معادله را بر $G(s)H(s)$ تقسیم کنیم، داریم

$$\frac{1}{G(s)H(s)} + 1 = 0 \quad (1-6-5)$$

با جایگزینی $G(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$ و $H(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$ ، (همانند بخش ۴-۵)، در معادله (۱-۶-۵) داریم

$$\frac{\frac{1}{N_1(s) N_2(s)} + 1}{\frac{D_1(s) D_2(s)}{N_1(s) N_2(s)}} = 0 \quad (2-6-5)$$

بنابراین ریشه‌های معادله مشخصه، ریشه‌های معادله زیر می‌باشند

$$N_1(s)N_2(s) + D_1(s)D_2(s) = 0 \quad (3-6-5)$$

از مقایسه معادله‌های (۳-۴-۵) و (۳-۶-۵) در می‌باییم که صفرهای دو معادله یکسان می‌باشند. لیکن از مقایسه معادله‌های (۳-۴-۵) و (۲-۶-۵) در می‌باییم که قطبهای دو معادله $\frac{1}{G(s)H(s)} + 1 + G(s)H(s) = 0$ و $\frac{1}{G(s)H(s)} + 1 + \frac{1}{G(s)H(s)} = 0$ به ترتیب قطبهای $G(s)H(s)$ و صفرهای $G(s)H(s)$ می‌باشند.

اگر دقیقاً همان مراحل بررسی پایداری را همانند بخش ۴-۵ به سیستم‌های معکوس اعمال کنیم، هنگامیکه $\frac{1}{G(s)H(s)} + 1$ مقادیر ۵ بر روی مسیر نایکوئیست را اختیار کند، معادله حاصله عبارتست از

$$Z_R = P'_R - N' \quad (4-6-5)$$

که در آن

$$N' = \text{تعداد دورانهای } \frac{1}{G(s)H(s)} + 1 \text{ حول مبدأ}$$

$$P'_R = \text{تعداد صفرهای ناپایدار } G(s)H(s)$$

$$Z_R = \text{تعداد ریشه‌های ناپایدار معادله مشخصه حلقه - بسته}$$

در عمل بجای رسم نمودار $\frac{1}{G(s)H(s)} + 1$ ، نمودار $\frac{1}{G(s)H(s)}$ را رسم می‌کنیم و مبدأ را به نقطه ۱- بر روی محور حقیقی منفی انتقال می‌دهیم، N در این حالت تعداد دورانهای $\frac{1}{G(s)H(s)}$ حول نقطه ۱- خواهد بود.

با جایگزینی s توسط $j\omega$ در $[G(s)H(s)]^{-1}$ و تغییر ω از $-\infty$ تا $+\infty$ ، محدوده محور موهومی را بر روی مسیر نایکوئیست D در شکل ۲۳-۵ خواهیم داشت. مقدار $[G(j\omega)H(j\omega)]^{-1}$ برای $\omega = 0$ ثابت است. بنابراین با حرکت نقطه s بر روی مسیر بسته نایکوئیست از مبدأ یا حوالی آن، قسمت متناظر در $\frac{1}{G(s)H(s)} + 1$ از محور حقیقی عبور خواهد کرد. وقت کنید که تابع $1 + \frac{1}{G(s)H(s)}$ یا $(1 + G(s)H(s))^{-1}$ یک نگاشت از صفحه s به صفحه‌ای دیگر است که در آن مسیر نایکوئیست به نمودار نایکوئیست متناظر نگاشت می‌شود.

همانند حالت نمودار نایکوئیست مستقیم، برای تکمیل نمودار $[G(s)H(s)]^{-1}$ اثر حرکت نقطه s را بر روی نیمداایره با شعاع بی‌نهایت بر روی مسیر نایکوئیست، بررسی می‌کنیم. این مسیر تمامی قطبها و صفرهای احتمالی نایکوئیست را دربرخواهد گرفت. برای نیمداایره مسیر نایکوئیست داریم

$$s=re^{j\theta}$$

(۵-۶-۵)

که در آن $\infty \rightarrow r$ و $\frac{\pi}{2} \geq \theta \geq -\frac{\pi}{2}$. تابع تبدیل کلی حلقه - باز عبارتست از

$$G(s)H(s) = \frac{K_m(s-z_1)\dots(s-z_w)}{s^m(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_u)} \quad (6-6-5)$$

برای نیمداایره مسیر نایکوئیست، تابع $[G(s)H(s)]^{-1}$ بدین صورت داده می‌شود

$$[G(s)H(s)]^{-1} \rightarrow \frac{s^m s^u}{K_m s^w} = \frac{r^{(m+u-w)}}{K_m} e^{j(m+u-w)\theta} \quad (7-6-5)$$

به ازاء $\infty \rightarrow r$ و $\frac{\pi}{2} \geq \theta \geq -\frac{\pi}{2}$ در $r=re^{j\theta}$. بنابراین از معادله (۷-۶-۵) مشاهده می‌شود که با حرکت s بر روی مسیر نایکوئیست از ∞ در $\pi/2$ تا ∞ - در $-\pi/2$ (در جهت عقربه ساعت) نمودار $[G(s)H(s)]^{-1}$ ، $m+u-w$ بار در جهت عقربه ساعت نیمداایره‌هایی را با شعاع بی‌نهایت حول مبدأ دنبال خواهد کرد.

مثال ۴۶-۵

نمودار نایکوئیست معکوس متناظر را رسم کرده و پایداری سیستم حلقه - بسته را با استفاده از معیار پایداری نایکوئیست معکوس بررسی کنید.

$$[G(s)H(s)]^{-1} = \frac{(1+T_1s)(1+T_2s)}{K}$$

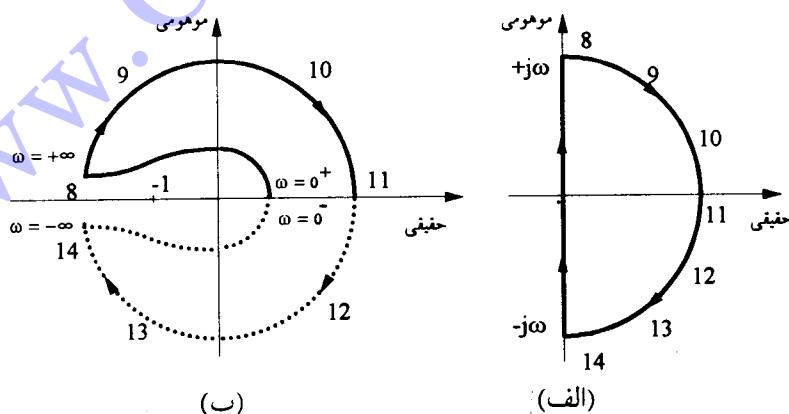
$$[G(s)H(s)]^{-1} \rightarrow \frac{1}{K} \angle 0^\circ \quad \omega \rightarrow 0^+$$

$$[G(s)H(s)]^{-1} \rightarrow \infty \angle 180^\circ \quad \omega \rightarrow +\infty$$

بر روی نیمداایره مسیر نایکوئیست، نشان داده شده در شکل ۴۶-۵ (الف)، داریم

$$[G(s)H(s)]^{-1} \rightarrow \frac{T_1 T_2 e^{j2\theta}}{K} \rightarrow \infty$$

نقاط ۸ تا ۱۴ برای مرحله به مرحله نشان دادن نحوه نگاشت مسیر نایکوئیست در صفحه s توسط $[G(s)H(s)]^{-1}$ در هر دو شکل ۴۶-۵ (الف) و (ب) مشخص شده‌اند. نقطه از $\omega = \infty$ شروع شده است، که متناظر با $\theta = 90^\circ$ و اندازه بی نهایت است. در نقاط ۹، ۱۰ و ۱۱، زاویه از 90° به 0° درجه (در جهت عقربه ساعت) می‌رسد و نقطه متناظر 11° با اندازه بی نهایت است. از نقطه ۱۱ تا ۱۴ زاویه از 0° تا 90° - تغییر پیدا می‌کند که نقاط متناظر در شکل ۴۶-۵ (ب) نشان داده شده‌اند. برای اعمال معیار پایداری نایکوئیست معکوس باید



شکل ۴۶-۵ (الف) مسیر نایکوئیست (ب) نمودار نایکوئیست معکوس مثال ۴۶-۵

تعداد دورانهای نمودار $[G(s)H(s)]^{-1}$ حول نقطه ۱- را بشماریم. همانطور که از نمودار نایکوئیست معکوس مشخص است $N' = 0$ می‌باشد. با توجه به اینکه صفرهای تابع تبدیل حلقه - باز پایدار می‌باشند، لذا $P'_R = 0$ خواهد بود. از این‌رو $Z_R = 0$ و سیستم به ازاء کلیه بهره‌ها پایدار است.

مثال ۲۱-۵

معکوس تابع تبدیل سیستمی عبارتست از

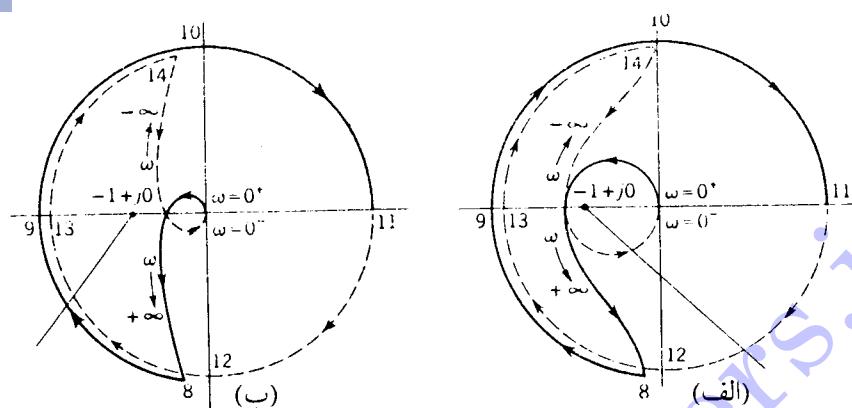
$$[G(s)H(s)]^{-1} = \frac{s(1+T_1s)(1+T_2s)}{K_1}$$

در گستره فرکانس‌های پایین و بالا به ترتیب داریم

$$[G(s)H(s)]^{-1} \xrightarrow[\omega \rightarrow 0^+]{} 90^\circ$$

$$[G(s)H(s)]^{-1} \xrightarrow[\omega \rightarrow +\infty]{} 270^\circ$$

همانند حالت قبل نقاط متناظر با نقاط ۸ تا ۱۴ نشان داده شده بر روی مسیر نایکوئیست شکل ۴۶-۵ (الف) در شکل ۴۷-۵ (الف)، نمودار نایکوئیست معکوس این تابع تبدیل نیز نشان داده شده‌اند. با جایگزینی $s = re^{j\theta}$ در تابع تبدیل معکوس بالا و برای $\theta \rightarrow \infty$ ، تناظر این نقاط را بسادگی می‌توان نشان داد (این کار را برای تمرین انجام دهید). برای شمردن تعداد دورانهای حول نقطه ۱- توسط نمودار نایکوئیست معکوس، همانند قبل انتهای تکه نخی را بر روی نقطه ۱- ثابت فرض کرده و سر آن را با شروع از نقطه ۱۴ (نقطه متناظر با ∞) به طرف حرکت دهید. از نقطه ۱- به نقطه ۹+ و از آنجا به طرف پایان نمودار از طریق نقطه ۸+ تا ۱۴ حرکت کنید و در ضمن حرکت تکه نخ تعداد دورانهای حول نقطه ۱- را بشمارید. توجه کنید که از نقطه شروع ۱۴ تا پایان آن در نقطه ۱۴، یک بار در جهت عقربه ساعت و یک بار در خلاف آن دور نقطه ۱- خواهیم چرخید. لذا مجموع دورانها برابر صفر خواهد بود، $N' = 0$. با توجه به پایدار بودن قطبهای $[G(s)H(s)]^{-1}$ ، $P'_R = 0$ و داریم $Z_R = 0$. از این‌رو سیستم با نمودار نایکوئیست نشان داده شده در شکل ۴۷-۵ (الف) پایدار است. با افزایش بهره K_1 ، نمودار نایکوئیست معکوس تابع تبدیل، به صورت نشان داده شده در شکل ۴۷-۵ (ب)

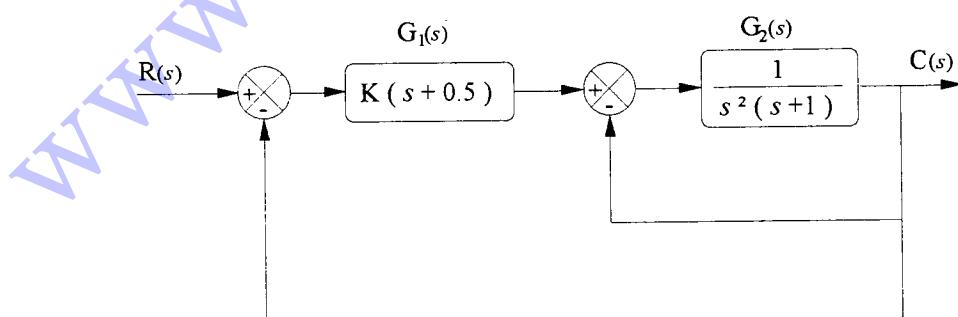


شکل ۴۷-۵ نمودارهای نایکوئیست معکوس مثال ۲۱-۵

خواهد شد. اگر همانند قبل تعداد دورانهای نمودار معکوس نایکوئیست را حول نقطه ۱- بشماریم، در این حالت دوبار حول نقطه ۱- در جهت عقربه ساعت چرخش خواهیم داشت و لذا $N' = 2$. بنابراین، با توجه به پایدار بودن صفرهای تابع تبدیل معکوس $Z_R = 2$ ، سیستم حلقه - بسته با افزایش بهره K ، دو قطب ناپایدار پیدا می کند.

مثال ۲۲-۵

سیستم حلقه - بسته نشان داده شده در شکل ۴۸-۵ را در نظر بگیرید. با اعمال معیار پایداری نایکوئیست به نمودار نایکوئیست معکوس تابع تبدیل مناسب حلقه - باز، پایداری سیستم حلقه - بسته را بررسی کنید.



شکل ۴۸-۵ سیستم حلقه - بسته مثال ۲۲-۵

با حذف حلقه فیدبک داخلی و ضرب دوتابع تبدیل سری $G_1(s)$ و $G_2(s)$ ، تابع تبدیل حلقه - باز سیستم کنترل حلقه - بسته با فیدبک واحد بدست خواهد آمد. داریم

$$G_2(s) = \frac{1}{s^2 + s^2 + 1}$$

ولذا

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{K(s+0/0)}{s^2 + s^2 + 1}$$

از اینرو

$$\frac{1}{G(s)} = \frac{s^2 + s^2 + 1}{K(s+0/0)}$$

با توجه به اینکه قطب $[G(s)]^1$ یا صفر تابع تبدیل حلقه - باز پایدار است، لذا $P'_R = 0$ و تعداد دورانهای نمودار نایکوئیست حول نقطه ۱، برابر با تعداد قطبها ناپایدار حلقه - بسته خواهد بود. داریم

$$\begin{aligned} \frac{1}{G(j\omega)} &= \frac{1}{K} \left[\frac{(j\omega)^2 + (j\omega)^2 + 1}{j\omega + 0/0} \right] \left[\frac{-j\omega + 0/0}{-j\omega + 0/0} \right] \\ &= \frac{0/0 - 0/0\omega^2 - \omega^2 + j\omega(-1 + 0/0\omega^2)}{K(0/25 + \omega^2)} \end{aligned}$$

با صفر قرار دادن قسمت موهومی $[G(j\omega)]^1$ بدست می آوریم که نمودار نایکوئیست، محور حقیقی را در فرکانس $\omega = \sqrt{\frac{K}{2}}$ رادیان بر ثانیه قطع می کند و نقطه قطع بر روی محور حقیقی منفی در $\frac{K}{2}$ است. همچنین از مساوی صفر قرار دادن قسمت حقیقی می توان فرکانس و نقطه قطع با محور موهومی را تعیین کرد. برای این تابع تبدیل داریم

$$\begin{aligned} \frac{1}{G(j\omega)} &\rightarrow \frac{1}{K} \quad \omega \rightarrow 0^+ \\ \frac{1}{G(j\omega)} &\rightarrow \infty \angle 180^\circ \quad \omega \rightarrow 0^+ \end{aligned}$$

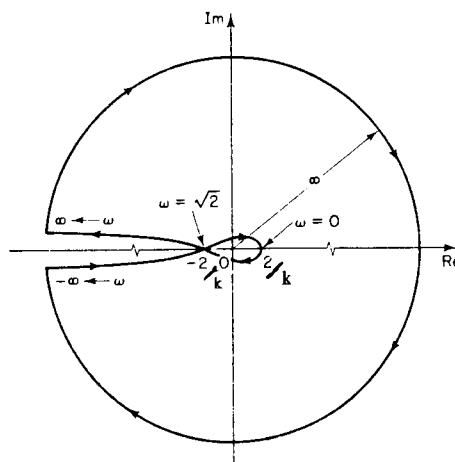
نمودار نایکوئیست معکوس $(j\omega)/G(j\omega)$ در شکل ۴۹-۵ رسم شده است. همانطور که مشاهده می شود اگر نقطه ۱- بین نقاط $-2/K$ و $-\infty$ قرار گیرد، نقطه ۱- دور زده نخواهد شد و در آن

صورت $N = 0$ ، بنابراین برای پایداری باید شرط زیر برآورده گردد

$$-\frac{2}{K} < -1$$

ولذا

$$K > 2$$



شکل ۴۹-۵ نمودار نایکوئیست معکوس مثال ۵-۲۲

۷-۵ مفاهیم حاشیه‌های بهره و فاز

پایداری و میزان آن را در یک سیستم، می‌توان از نمودارهای بود و نایکوئیست آن به سادگی تعیین کرد. تبیین پایداری سیستم در حوزه فرکانس، با معرفی مفاهیم حاشیه بهره^۱ و حاشیه فاز^۲، صورت می‌پذیرد. همانطور که در بخش ۵-۶ مشاهده گردید، دور زدن یا نزدن نقطه ۱- توسط نمودار نایکوئیست، تعیین کننده پایداری یا ناپایداری یک سیستم است. این حاشیه‌ها میزان نزدیکی نمودار نایکوئیست به نقطه ۱- و در نتیجه میزان پایداری سیستم را اندازه‌گیری می‌کنند. در اینجا این مفاهیم را برای نمودارهای نایکوئیست ارایه می‌کنیم.

حاشیه بهره: حاشیه بهره مقدار ثابتی است مانند a که بهره باید افزایش یابد تا سیستم ناپایدار گردد. اگر فرکانسی را که در آن زاویه فاز تابع تبدیل سیستم 180° - است با ω نشان دهیم، آنگاه حاشیه بهره سیستم از رابطه زیر تعیین می‌گردد

$$|G(j\omega_1)| = a \quad (1-7-5)$$

و بر روی نمودار نایکوئیست دامنه $|G(j\omega)|$ در ω_1 عبارتست از

$$|G(j\omega_1)| = \frac{1}{a} \quad (2-7-5)$$

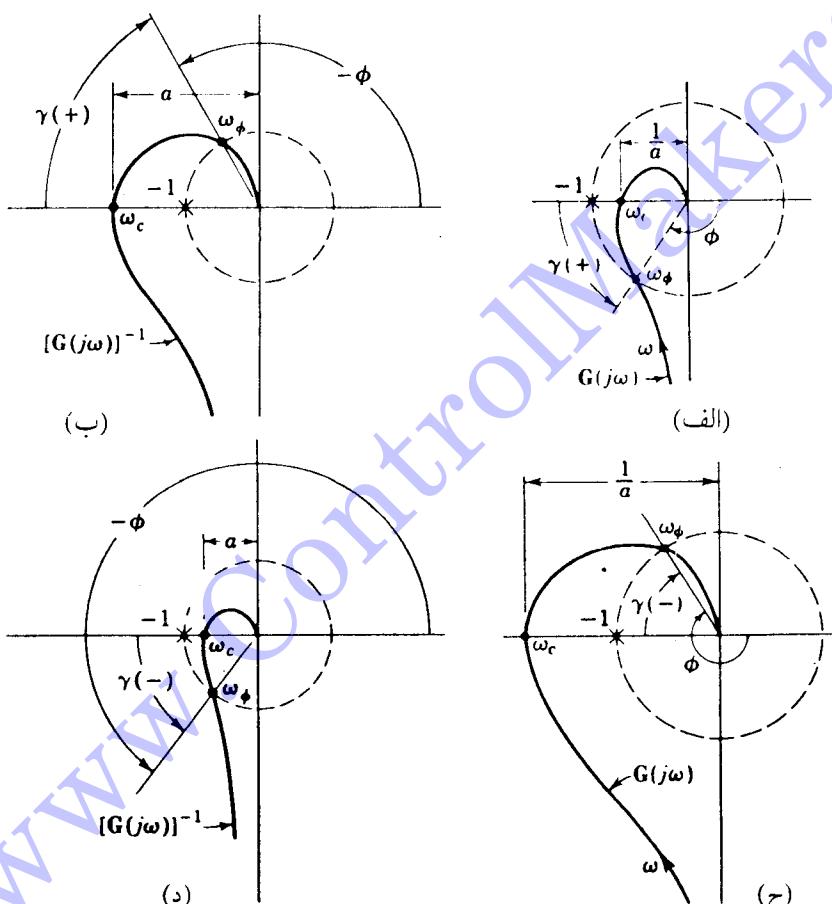
فرکانس ω_1 را فرکانس تقاطع فاز^۳ می‌نامند.

1- Gain margin

2- Phase margin

3- Phase crossover frequency

حاشیه فاز: اگر فرکانسی را که در آن دامنه $G(j\omega)$ واحد است، با ω_c نشان دهیم (یعنی آنکه $|G(j\omega_c)| = 1$)، آنگاه حاشیه فاز مقدار انتقال فازی است که در فرکانس ω_c باعث ناپایداری سیستم می‌شود. همچنین می‌توان گفت که حاشیه فاز برابر است با 180° علاوه زویه فاز $G(j\omega_c)$ ، که در آن زویه فاز $G(j\omega_c)$ منفی است. فرکانس ω_c را فرکانس تناطع بهره^۱ می‌نامند. مفاهیم حاشیه بهره و فاز، به طور ترسیمی در شکل‌های ۵۰-۵ (الف) تا (د) نشان داده شده‌اند.



شکل ۵۰-۵ نمودارهای نایکوئیست نشان دهنده حاشیه بهره و حاشیه فاز: (الف) و (ب) پایدار (ج) و (د) ناپایدار

۱- Gain crossover frequency

مثال ۲۳-۵

تابع تبدیل حلقه باز سیستمی عبارتست از

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)}$$

حاشیه‌های بهره و فاز را برای $K=20$ و $K=80$ محاسبه کرده و پایداری آن را تعیین کنید.

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{(\omega^2+1)^{1/2}(\omega^2+4)^{1/2}(\omega^2+9)^{1/2}}$$

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}\left[\frac{\omega}{1}\right] - \tan^{-1}\left[\frac{\omega}{2}\right] - \tan^{-1}\left[\frac{\omega}{3}\right]$$

برای تعیین حاشیه بهره نخست باید فرکانسی را پیدا کنیم که در آن $\angle G(j\omega) = \pm 180^\circ$. به عبارت دیگر فرکانسی که در آن نمودار نایکوئیست $G(j\omega)$ محور حقیقی منفی راقطع می‌کند. برای تعیین این فرکانس از رابطه زیر استفاده می‌کنیم

$$[G(j\omega)]_{قسمت\ موهمی} = \frac{K\omega(\omega^2-1)}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)(\omega^2+9)} = 0$$

و لذا $\omega_1 = \sqrt{11}$. با قراردادن $\omega_1 = \sqrt{11}$ در $|G(j\omega)| = K/6$ داریم و برای $|G(j\omega_1)| = 1/3$ ، $K = 20$. بنابراین بهره را می‌توان توسط فاکتور ۳ افزایش داد، به عبارت دیگر بهره را می‌توان توسط $|G(j\omega_1)|/1$ افزایش داده تا به نقطه ۱-رسید. حاشیه بهره بدین ترتیب عبارتست از

$$20 \log_{10}(3) = 20 \log_{10}(1/\left|G(j\omega_1)\right|) = 9.54 \text{dB}$$

هم چنین برای تعیین حاشیه فاز نخست ω_2 را تعیین می‌کنیم، که در آن $|G(j\omega_2)| = 1$. برای $K=20$ داریم

$$\frac{20}{(\omega^2+1)^{1/2}(\omega^2+4)^{1/2}(\omega^2+9)^{1/2}} = 1$$

بنابراین $\omega = 1/828$ در این فرکانس $\angle G(j\omega) = -135/54^\circ$ و حاشیه فاز عبارتست از $44/46^\circ$ با توجه به مقادیر حاشیه بهره و حاشیه فاز سیستم پایدار است.

به طور مشابهی حاشیه های بهره و فاز را برای $K=80$ تعیین می کنیم. برای $\angle G(j\omega) = \pm 180^\circ$ می توان نشان داد که $|G(j\omega)| = 4/3$ و لذا برای رسیدن به نقطه ۱- باید بهره را به اندازه $3/4$ افزایش داد. حاشیه بهره در این حالت برابر است با $-2/5dB = -20 \log_{10}(3/4)$. توجه کنید که برای سیستم ناپایدار حاشیه بهره منفی است. این بدان معنی است که برای پایدار کردن سیستم باید بهره را کاهش داد. حاشیه فاز را نخست با حل $|G(j\omega)|$ بدست می آوریم. می توان نشان داد که برای

$$\frac{80}{(\omega^2 + 1)^{1/2} (\omega^2 + 4)^{1/2} (\omega^2 + 9)^{1/2}} = 1$$

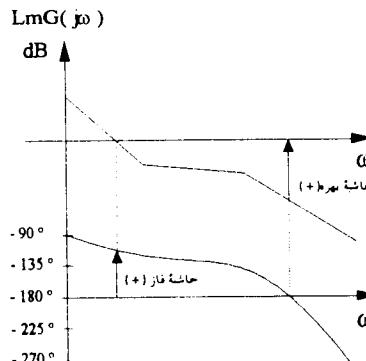
ω برابر با $3/766$ است. در این فرکانس $\angle G(j\omega) = -188/62^\circ$ و لذا حاشیه فاز $-8/62^\circ$ می باشد. بدینهی است که با توجه به مقادیر منفی حاشیه بهره و حاشیه فاز، سیستم با این بهره ناپایدار است.

HASHIYE HAI BEHREH VA FAZ RA MI TOAN BA CHOURAT MASHABEH MAMODAR HAI BOD TARIIF NAMOD. SHAKHLA 5-1-5, AIN HASHIYE HA RA BIRROU NMODAR BOD NESHAN MI DED. HMANTEHOR KE AZ AIN SHAKHLA MASHADEH MI SHOD, SISTEM DR CHOURTI PAYDAR AST KE HASHIYE BEHREH AN BURHESB DSEY BAL MEBET, VA HASHIYE FAZ AN NIYER YEK ZAWIE MEBET BASHD. HEMCHENIN SISTEMMI RANA PAYDAR KOYIND KE HASHIYE BEHREH AN BURHESB DSEY BAL MEFNI, VA HASHIYE FAZ AN NIYER YEK ZAWIE MEFNI BASHD. SISTEMMI NIYER PAYDAR BURHANI AST KE HASHIYE HAI FAZ BEHREH AN HER DO SCFR BASHND.

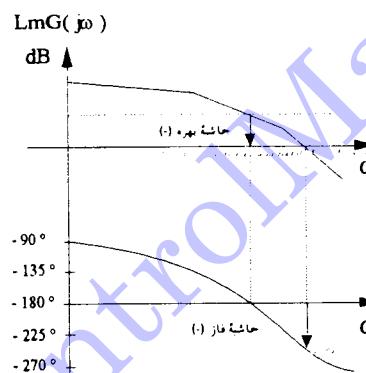
۸-۵ چارت نیکولز

تحلیل پاسخ فرکانسی یک سیستم، بکارگیری و بررسی اطلاعات بهره و فاز آن بر روی گستره وسیع از فرکانس ها است. نمودار های بود و نایکوئیست، دو روش اصلی تحلیل پاسخ فرکانسی، با یک نوع از داده ها سر و کار دارند، لیکن آنها را به دو نوع کاملاً متفاوت نمایش می دهند. روش دیگر تحلیل پاسخ فرکانسی، چارت نیکولز^۱ است که از همان داده ها استفاده

1- Nichols chart



(الف)



(ب)

شکل ۵۱-۵ (الف) دیاگرام بود یک سیستم پایدار (ب) دیاگرام بود یک سیستم ناپایدار

می‌کند ولی آنها را به گونه دیگری نمایش می‌دهد.

بسیاری از روش‌های بکارگرفته شده در چارت نیکولز مشابه روش‌های بود و نایکوئیست هستند. هم‌چنان بکارگیری و استفاده از نمودارهای بود و نایکوئیست ساده‌تر از چارت نیکولز است و لذا در این کتاب چارت نیکولز را به اندازه دو روش دیگر توضیح نمی‌دهیم و صرفاً به بررسی اجمالی آن خواهیم پرداخت. یک مزیت مشترک این سه روش آن است که با رسمه پاسخ فرکانسی حلقه - باز، نتایج مهمی از رفتار سیستم حلقه - بسته (مانند پایداری نسبی آن)، استنتاج می‌شود. در هر سه روش برای سیستم حلقه - بسته فیدبک واحد با تابع تبدیل حلقه -

باز $G(j\omega)$ نمودارهای متناظر $(j\omega)$ را رسم می‌کنیم. اگر سیستم حلقه - بسته غیر واحد با تابع تبدیل $H(j\omega)$ در مسیر فیدبک باشد، می‌توان نخست با استفاده از جبر بلوک دیاگرامی آن را به یک سیستم حلقه - بسته با فیدبک واحد معادل تبدیل کرد، نمودارهای متناظر تابع تبدیل حلقه - باز معادل را رسم کرد و یا اینکه نمودارهای متناظر $G(j\omega)H(j\omega)$ را رسم نمود. نخست، تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم $\dot{G}(j\omega)$ را در نظر بگیرید. بهره این سیستم بر حسب dB را بر حسب مقادیر زوایای فاز متناظر بر حسب درجه، بر روی گستره از فرکانس‌ها، $\omega = \omega_n$ تا $\omega = \omega_r$ رسم کنید. این روند در مثال زیر نشان داده شده است.

مثال ۲۴-۵

تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی عبارتست از

$$G(j\omega) = \frac{20}{j\omega(j\omega + 1)}$$

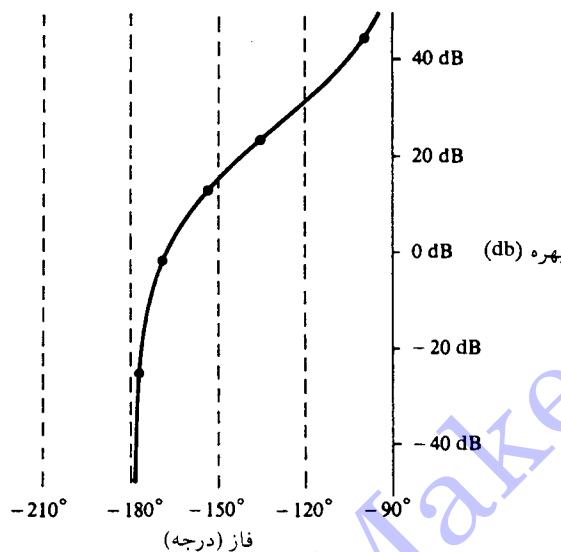
بهره و زاویه فاز این سیستم به صورت زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{Lm}G(j\omega) &= 20 \log_{10} \frac{20}{\omega(\omega^2 + 1)^{1/2}} \\ &= 20 \log_{10}(20) - 20 \log_{10}(\omega) - 10 \log_{10}(\omega^2 + 1) \\ \angle G(j\omega) &= -90^\circ - \tan^{-1}(\omega) \end{aligned}$$

دو مقدار بهره و زاویه فاز تابع تبدیل را برای یک گستره فرکانسی تعیین می‌کنیم. جدول ۱۳-۵ مقادیر بهره و زاویه فاز تابع تبدیل را برای ω از $1/\sqrt{2}$ تا 20 رادیان بر ثانیه نشان می‌دهد. این مقادیر در شکل ۵۲-۵ به صورت نمودار بهره و زاویه فاز رسم شده‌اند.

جدول ۱۳-۵ جدول مقادیر بهره و زاویه فاز مثال ۲۴-۵

فرکانس ω	$\angle G(j\omega)$ (درجه)	$\text{Lm}G(j\omega), \text{dB}$
-95/71	45/98	0/1
-135°	23/01	1
-153/43°	13/01	2
-168/69°	-2/11	5
-177/13°	-26/03	20



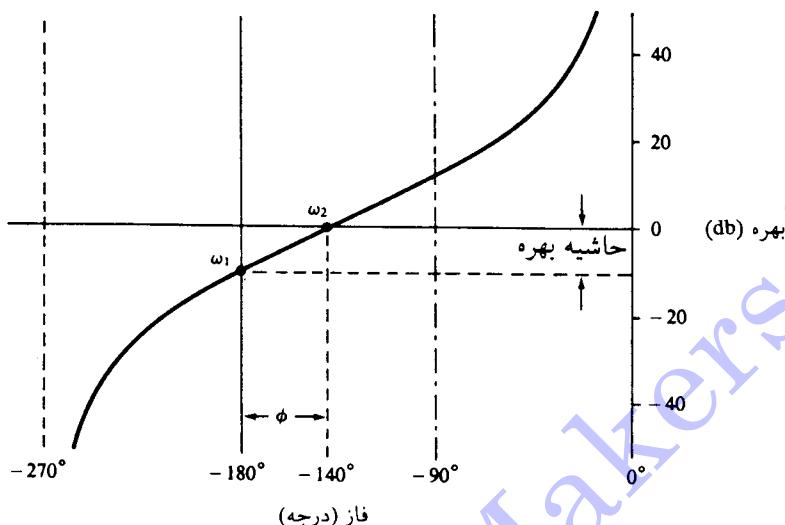
شکل ۵۲-۵ نمودار بهره بر حسب فاز مثال ۵

در بخش ۷-۵ مفاهیم حاشیه بهره و فاز را برای نمودارهای بود و نایکوئیست جهت تعیین پایداری و پایداری نسبی سیستم‌های حلقه - بسته بررسی کردیم. در اینجا بدون ورود به جزئیات بیشتر با یک مثال، نحوه تعیین حاشیه‌های بهره و فاز و کاربرد آنها در تعیین پایداری را برای نمودارهای بهره بر حسب فاز ارایه می‌کنیم.

مثال ۵۳-۵

نمودار بهره بر حسب فاز سیستمی در شکل ۵۲-۵ نشان داده شده است. برای تعیین حاشیه بهره نخست باید فرکانسی را که در آن زاویه فاز تابع تبدیل 180° است، بدست آورد و سپس حاشیه بهره را از رابطه زیر تعیین کرد:

$$\begin{aligned} \text{Hashiye Behre} &= 20 \log_{10} \left| \frac{1}{G(j\omega_1)} \right| \text{dB} \\ &= -20 \log_{10} \left| G(j\omega_1) \right| \text{dB} \end{aligned}$$



شکل ۵-۵ نمودار بهره بر حسب فاز مثال ۵-۵

که در آن برای ω_1 داریم $\angle G(j\omega_1) = -180^\circ$ و $|G(j\omega_1)|$ را می‌توان مستقیماً و یا از نمودار بهره بر حسب فاز تعیین کرد. همانطور که در شکل ۵-۵ نشان داده شده است، حاشیه بهره 10 dB می‌باشد.

حاشیه فاز را برای فرکانسی مانند ω_2 که در آن بهره 0 dB است، پیدا می‌کنیم. بنابر تعریف داریم

$$\text{حاشیه فاز} = 180^\circ + \angle G(j\omega_2)$$

که در آن $\angle G(j\omega_2)$ را می‌توان مستقیماً و یا از نمودار بهره بر حسب فاز تعیین کرد. همانطور که در شکل ۵-۵ نشان داده شده است، حاشیه فاز سیستم $+40^\circ$ می‌باشد زیرا زاویه فاز تابع تبدیل در ω_2 برابر با -140° است.

۱-۸-۵ پاسخ فرکانسی حلقه - بسته

اساس کلیه روش‌های پاسخ فرکانسی ارایه شده، استفاده از پاسخ فرکانسی سیستم حلقه - باز $G(j\omega)$ برای تحلیل سیستم حلقه - بسته است. تابع تبدیل سیستم حلقه - بسته با فیدبک

واحد عبارتست از

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)} \quad (1-8-5)$$

بدیهی است که در هر فرکانس $\omega = \omega$, برای $G(j\omega) = G(\omega)$ یک و تنها یک مقدار دامنه و زاویه فاز متناظر حلقه - بسته داده شده با $|C(j\omega')/R(j\omega')|$ و $\angle[C(j\omega')/R(j\omega')]$ وجود دارد. لیکن اگر یک مقدار معین دامنه $|C(j\omega)/R(j\omega)|$ بدون محدودیتی بر روی زاویه فاز آن $\angle[C(j\omega)/R(j\omega)]$ در نظر گرفته شود. مقدایر فراوانی از $G(j\omega)$ را می‌توان برحسب دامنه و فاز پیدا کرد که این مشخصه را بدست دهن. برای نشان دادن این مطلب،تابع تبدیل که یک کمیت مختلط است را به صورت زیر نشان دهید

$$G(j\omega) = x + iy \quad (2-8-5)$$

پاسخ فرکانسی سیستم حلقه - بسته عبارتست از

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{x + iy}{1 + x + iy} \quad (3-8-5)$$

دامنه تابع تبدیل حلقه - بسته داده شده با معادله (3-8-5) عبارتست از

$$M = \left| \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} \right| = \left(\frac{x^2 + y^2}{1 + 2x + x^2 + y^2} \right)^{1/2} \quad (4-8-5)$$

با به توان دو رساندن طرفین معادله (4-8-5) و پس از چند عمل مقدماتی جبری، خواهیم داشت

$$x^2(M^2 - 1) + 2xM^2 + y^2(M^2 - 1) = -M^2 \quad (5-8-5)$$

با تقسیم طرفین معادله (5-8-5) بر $-1 - M^2$ و کامل کردن معادله با اضافه کردن عبارت $M^4/(M^2 - 1)^2$ به طرفین آن، بدست می‌آوریم

$$x^2 + \frac{2xM^2}{(M^2 - 1)} + \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2} + y^2 = \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2} - \frac{M^2}{(M^2 - 1)} \quad (6-8-5)$$

و لذا از معادله (6-8-5)، داریم

$$\left(x + \frac{M^2}{M^2 - 1} \right)^2 + y^2 = \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2} \quad (7-8-5)$$

معادله (۷-۸-۵)، معادله دایره‌ای است با مرکز $(\frac{M}{M-1}, \frac{M^2}{M-1})$ و شعاع $\frac{M}{M-1}$. بنابراین کلیه توابع تبدیل حلقه - باز که مقادیر قسمتهای حقیقی و موهومی آنها (x و y) در معادله (۷-۸-۵)) به گونه‌ای باشند که بر روی دایره داده شده با معادله (۷-۸-۵) قرار گیرند، دارای تابع تبدیل حلقه - بسته‌ای با دامنه یکسان M خواهند بود.

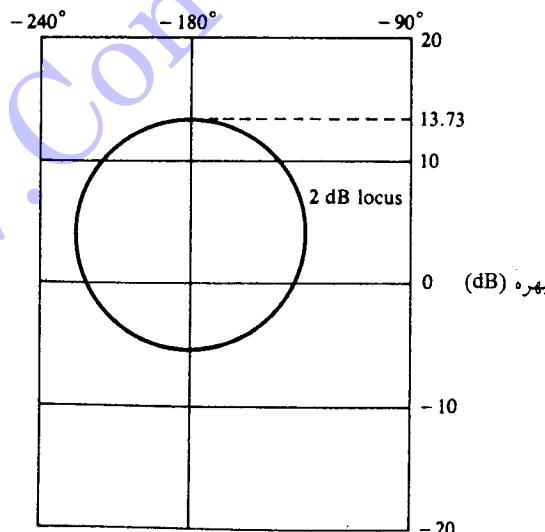
مثال ۲۶-۵

اگر دامنه تابع تبدیل حلقه - بسته را 2dB در نظر بگیریم، $M = 2 \cdot \log_{10} |C(j\omega)/R(j\omega)| = 2\text{dB}$ نمودار نشان داده شده در شکل ۵۴-۵، ترکیبها بهره و فاز تابع تبدیل حلقه - بازی را نشان می‌دهد که سیستم حلقه - بسته‌ای با بهره ۲ dB می‌دهند. این ترکیبها یک مکان هندسی 2dB ایجاد می‌کنند. توجه کنید که محورهای عمودی بهره و افقی فاز تنها به سیستم حلقه - باز اعمال می‌شوند و هیچ مقادیر بهره و فاز حلقه - بسته‌ای را نشان نمی‌دهند. یک نقطه مانند 0° را روی مکان هندسی در نظر بگیرید.

بنابراین

$$\frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)} = 1/259$$

فاز (درجه)



شکل ۵۴-۵ نمودار بهره بر حسب فاز نشان دهنده مکان هندسی بهره حلقه - بسته 2dB (M ثابت).

و لذا

$$|G(j\omega)| = 4/861 = 13/734 \text{dB}$$

$$\angle G(j\omega) = -180^\circ$$

بنابراین، اگر نقطه -180° متناظر با بهره و فاز سیستم حلقه - باز ($G(j\omega)$ برای فرکانس ω) باشد، آنگاه بهره و فاز سیستم حلقه - بسته با فیدبک واحد، $20 \text{dB} \angle 0^\circ$ در فرکانس ω خواهد بود.

تحلیل مشابهی را می توان با انتخاب یک زاویه فاز $[C(j\omega)/R(j\omega)]$ بدون محدودیتی بر روی بهره $|C(j\omega)/R(j\omega)|$ انجام داد. زاویه فاز داده شده را می توان با ترکیب‌های بسیاری از بهره‌ها و زاویه‌های فاز حلقه - باز تابع تبدیل $G(j\omega)$ بدست آورد. هر کدام از این ترکیبها، همان زاویه فاز را با بهره‌های مختلف بدست خواهد داد. برای نشان دادن این مطلب می توان تابع تبدیل حلقه - بسته را به صورت قطبی زیر نمایش داد

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = M e^{j\alpha} \quad (8-8-5)$$

که در آن $|C(j\omega)/R(j\omega)| = M$ و $\alpha = \arg[C(j\omega)/R(j\omega)]$ از معادله (۳-۸-۵)، داریم

$$\begin{aligned} \alpha &= \arg \frac{x+jy}{1+x+jy} \\ &= \arg \frac{x^2+x+y^2+jy}{(1+x)^2+y^2} \end{aligned} \quad (9-8-5)$$

با تعریف $N = \tan \alpha$ از معادله (۹-۸-۵)، بدست می آوریم

$$N = \tan \alpha = \frac{y}{x^2+x+y^2} \quad (10-8-5)$$

بنابراین

$$x^2+x+y^2 - \frac{y}{N} = 0 \quad (11-8-5)$$

با یکسری از عملیات جبری بر روی معادله (۱۱-۸-۵)، می توان نشان داد که

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{N^2 + 1}{4N^2} \quad (12-8-5)$$

معادله (۱۲-۸-۵) معادله دایره‌ای با مرکز $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2N})$ و شعاع $\sqrt{N^2 + 1}/2N$ می باشد.

بنابراین کلیه توابع تبدیل حلقه - باز که قسمتهای حقیقی و موهومی آنها (\Re و \Im) در معادله (۱۲-۸-۵)، به گونه‌ای باشند که بر روی دایره داده شده با معادله (۱۲-۸-۵) قرار گیرند، دارای تابع تبدیل حلقه - بسته‌ای با زاویه فاز یکسان α ولی دامنه‌های متفاوت خواهد بود.

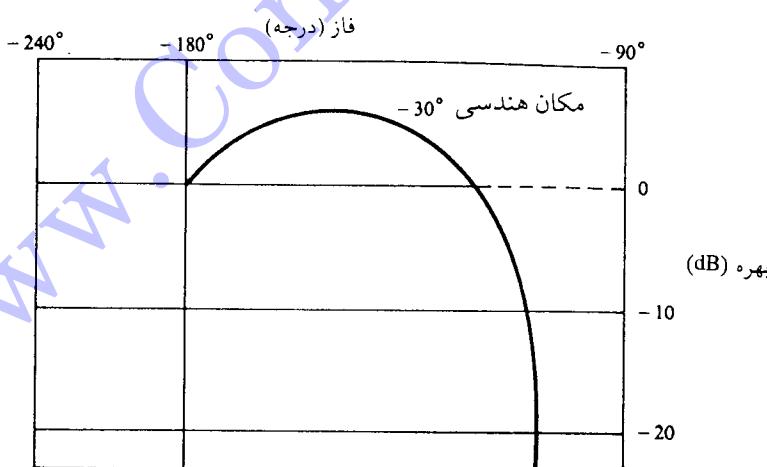
۲۷-۵ مثال

اگر تابع تبدیل حلقه - بسته با زاویه فاز -30° - را در نظر بگیریم، داریم

$$\angle [C(j\omega)/R(j\omega)] = \alpha = -30^\circ$$

نمودار شکل ۵۵-۵ ترکیب‌های بهره و فاز حلقه - بازی را نشان می‌دهد که سیستم حلقه - بسته‌ای با فاز -30° - را می‌دهند. دقت کنید که این ترکیبها یک مکان هندسی را تشکیل داده‌اند. همانند شکل ۵۴-۵، محورهای عمودی بهره و افقی فاز تنها به سیستم حلقه - باز اعمال می‌گردند و هیچ مقدار حلقه - بسته‌ای را نشان نمی‌دهند. یک نقطه مانند $-60^\circ \angle -60^\circ$ را بر روی مکان هندسی در نظر بگیرید. آنگاه

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{1 \angle -60^\circ}{1 + 1 \angle -60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle -30^\circ = -4/771 \text{dB} \angle -30^\circ$$



شکل ۵۵-۵ نمودار بهره بر حسب فاز، نشان دهنده زاویه فاز حلقه - بسته -30°

بنابراین اگر نقطه -60° در فرکانس ω متناظر با بهره و فاز یک سیستم حلقه - باز ($G(j\omega)$ برای فرکانسی مانند ω است، آنگاه سیستم حلقه - بسته با فیدبک واحد، بهره و فازی برابر با -30° در فرکانس ω خواهد داشت.

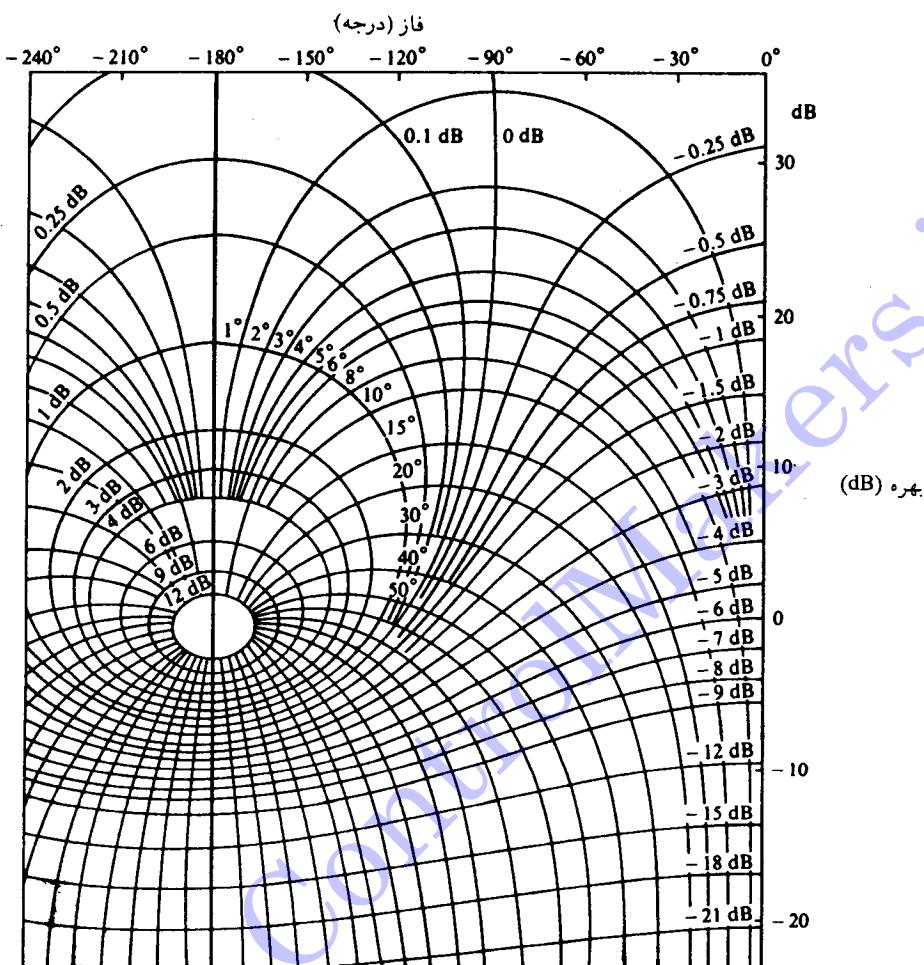
در تحلیل پاسخ فرکانس سیستم حلقه - بسته با استفاده ازتابع تبدیل حلقه - باز آن ($G(j\omega)$ ، به دو مکان هندسی در مثالهای ۲۶-۵ و ۲۷-۵ اشاره شد. مشاهده شد که اگر دامنه سیستم حلقه - بسته را یک مقدار ثابت فرض کنیم، توابع تبدیل حلقه - باز بسیاری را می توان پیدا کرد که همان مقدار دامنه (با زوایای فاز متفاوت) را در فیدبک حلقه واحد بدست دهنند. در مثال ۲۶-۵ این کار برای $2dB$ دامنه سیستم حلقه - بسته انجام گرفت و یک مکان هندسی دامنه ثابت بدست آمد (شکل ۵۴-۵). به طور مشابهی می توان، همانند مثال ۲۷-۵، زاویه فاز حلقه - بسته را تعیین کرد و توابع تبدیل حلقه - باز بسیاری را پیدا نمود که همان مقدار زاویه فاز (با دامنه های متفاوت) را بدست دهنند (شکل ۵۵-۵). اکنون فرض کنید که مثال ۲۶-۵ را برای مقادیر مختلف دامنه (بر حسب dB) تکرار کنیم، و هم چنین مثال ۲۷-۵ را برای زاویه فاز بین 0 تا 240° (بر حسب درجه) تکرار کنیم. اگر مکان هندسهای بسته دست آمده از دامنه های ثابت و زوایایی فاز ثابت را در یک شکل رسم کنیم، شکل بدست آمده را چارت نیکولز می نامند. چارت نیکولز در شکل ۵۶-۵ نشان داده شده است. در چارت نیکولز محورهای بهره عمودی و افقی فاز متناظر با مقادیر سیستم حلقه - باز هستند، در حالیکه مسیرهای منحنی الخط^۱ متناظر با سیستم حلقه - بسته هستند. به نکات زیر در رابطه با چارت نیکولز دقت کنید:

نکته ۱: نقطه بحرانی $0^{\circ}+180^{\circ}$ در صفحه مختلط به نقطه 180° بر روی چارت نیکولز نگاشت می شود.

نکته ۲: چارت نیکولز حول محور 180° متقابله است.

نکته ۳: کلیه مسیرهای فاز حلقه - بسته نشان داده شده مقادیر زوایایی فاز منفی می باشند، به عبارت دیگر یک مسیر منحنی الخط 40° ، نشان دهنده یک زاویه فاز حلقه - بسته 40° است.

نکته ۴: اگر منحنی پاسخ فرکانسی حلقه - باز سیستم را (با بکارگیری داده های دامنه و زاویه فاز به ترتیب بر حسب dB و درجه) بر روی نمودار نیکولز رسم کنیم، نقاط قطع



شکل ۵-۵ چارت نیکولز

منحنی پاسخ فرکانسی حلقه - باز ($G(j\omega)$) و مسیرهای منحنی الخط مقادیر دامنه M و زاویه فاز α پاسخ فرکانسی حلقه - بسته را در هر نقطه فرکانس بدست می دهند.

نکته ۵: با رسم منحنی پاسخ فرکانسی ($G(j\omega)$) در جهت افزایش فرکانس ω ، سیستم حلقه - بسته پایدار است اگر نقطه بحرانی dB و 180° در سمت راست منحنی باشد. در صورتیکه منحنی بیش از یک بار محور 180° - را قطع کند، سیستم پایدار شرطی است.

مثال ۲۸-۵

تابع تبدیل حلقه - باز زیر را در نظر بگیرید

$$G(j\omega) = \frac{20}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)(j\omega + 3)}$$

بهره (برحسب dB) و زاویه فاز (برحسب درجه) تابع تبدیل بالا برای یک گستره فرکانسی در جدول ۱۶-۵ آورده شده است. این مقادیر بر روی چارت نیکولز در شکل ۵۷-۵ به صورت منحنی پاسخ فرکانسی حلقه - باز سیستم نشان داده شده‌اند. بهره و فاز حلقه - بسته را می‌توان مستقیماً برای هر فرکانس و مقدار دلخواه بهره و فاز حلقه - باز از چارت نیکولز تعیین کرد. دقیق‌تر که نمودار حلقه - باز با مکان هندسی زاویه فاز حلقه - بسته 180° - هنگامیکه مکان هندسی بهره حلقه - بسته 0° - است، برخورد می‌کند.

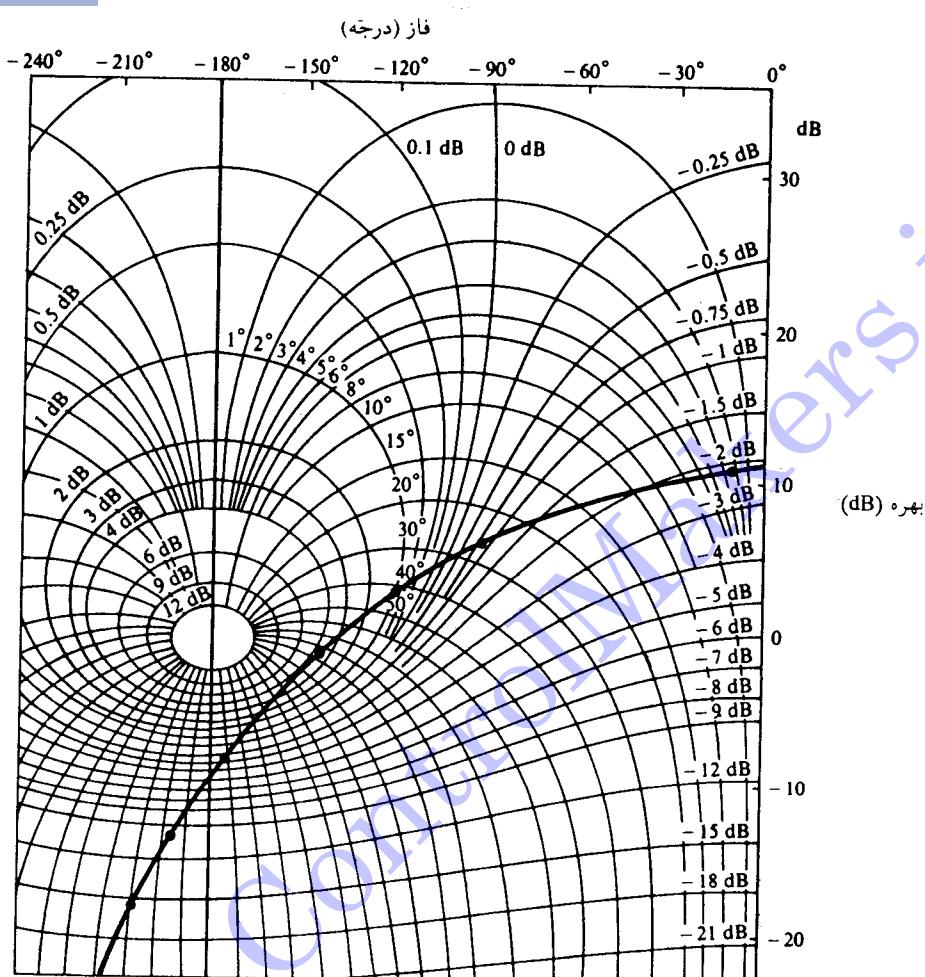
جدول ۱۶-۵ مقادیر فاز و بهره برای سیستم مثال ۲۸-۵

$\angle G(j\omega)$ (درجه)	$LmG(j\omega)$ dB	ω	فرکانس
-10/48°	10/4	0/1	
-90°	6/02	1	
-114/74°	2/43	1/5	
-142/13°	-1/14	2	
-172/87°	-7/67	3	
-192/53°	-13/27	4	
• -205/92°	-18/07	5	

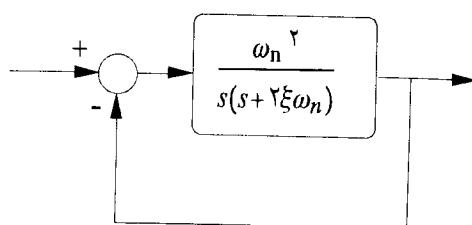
۹-۵ مشخصه‌های عملکرد سیستم براساس پاسخ فرکانسی

سیستم درجه دوم نشان داده شده در شکل ۵۸-۵ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل حلقه - بسته عبارتست از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1-9-5)$$



شکل ۵۷-۵ جارت نیکولز مثال ۵-۵



شکل ۵۸-۵ سیستم درجه دوم

که در آن ξ و ω_n به ترتیب نسبت میرایی و فرکانس طبیعی غیرمیرایی باشند. تابع تبدیل حلقه - بسته پاسخ فرکانسی بدین صورت داده می‌شود

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}} = M e^{j\alpha} \quad (2-9-5)$$

که در آن

$$M = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}, \quad \alpha = -\tan^{-1} \left(\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right)$$

همانطور که از شکل ۲-۵ بخش ۲-۵ مشاهده می‌شود، برای مقادیری از نسبت میرایی $|G(j\omega)| = M$ یک مقدار ستیغ در یک فرکانس خاص دارد. فرکانسی که در آن مقدار ستیغ رخ می‌دهد را فرکانس تشیدید^۱ می‌نامند. از آنجاییکه صورت M یک ثابت است، لذا مقدار ستیغ $|G(j\omega)|$ هنگامی رخ میدهد که عبارت زیر می‌نیم باشد

$$g(\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \quad (3-9-5)$$

با بازنویسی معادله (۳-۹-۵) به صورت زیر

$$g(\omega) = \left[\frac{\omega^2 - \omega_n^2(1 - 2\xi^2)}{\omega_n^2} \right]^2 + 4\xi^2(1 - \xi^2) \quad (4-9-5)$$

داریم که می‌نیم مقدار $g(\omega)$ در $\omega = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$ رخ خواهد داد. بنابراین فرکانس تشیدید عبارتست از

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (5-9-5)$$

بدینهی است که معادله (۵-۹-۵) برای مقادیر $\omega / \omega_n \leq 1$ که در آنها ستیغی رخ می‌دهد

مفهوم دارد. به ازاء مقادیر $\omega = \omega_r$ ، فرکانس ω_r به سمت میل می‌کند. برای $\omega > \omega_r$ فرکانس ستیغ ω کمتر از فرکانس طبیعی میرا $\omega_n = \sqrt{1 - \xi^2}$ است (فصل دوم). از معادله (۵-۹-۵) مشاهده می‌شود که برای $\omega < \omega_r$ ستیغ تشدید وجود نخواهد داشت. اندازه ستیغ تشدید M_r را می‌توان با جایگزینی معادله (۵-۹-۵) در M بدست آورد.

داریم

$$M_r = \max |G(j\omega)| = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (۵-۹-۵)$$

برای $\omega > \omega_r$,

$$M_r = 1 \quad (۵-۹-۵)$$

به ازاء مقادیر $\omega > \omega_r$ ، M_r نیز به سمت بی‌نهایت میل خواهد کرد. به عبارت دیگر اگر سیستم کم میرا در فرکانس طبیعی خودش تحریک شود، دامنه $G(j\omega)$ بی‌نهایت خواهد شد. زاویه فاز $G(j\omega)$ در فرکانس تشدید را می‌توان با جایگزینی معادله (۵-۹-۵) در α بدست آور. داریم

$$\alpha = \angle G(j\omega_r) = -\tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} = -90^\circ + \sin^{-1} \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (۸-۹-۵)$$

به M_r ، دامنه ستیغ تشدید^۱ نیز گفته می‌شود. دامنه ستیغ تشدید به مقدار نسبت میرایی ξ بستگی دارد و اندازه آن نشان دهنده پایداری نسبی سیستم می‌باشد. یک M_r بزرگ نشان دهنده حضور یک جفت قطب‌های حلقه - بسته غالب با نسبت میرایی کوچک است و در این صورت پاسخ حالت گذرای سیستم حلقه - بسته مطلوب نخواهد بود. در صورتیکه M_r مقدار کوچکتری داشته باشد، سیستم بخوبی میرایی شده است.

ارتباط بین پاسخ گذرای پله و پاسخ فرکانسی سیستم‌های درجه دوم. حداقل فرازت پاسخ پله واحد سیستم درجه دوم نشان داده شده در شکل ۵-۵۸ را می‌توان دقیقاً به ستیغ تشدید در پاسخ فرکانسی مرتبط کرد. از این‌رو همان اطلاعاتی را که از دینامیک سیستم

1- Resonant peak magnitude

در پاسخ گذرای پله واحد می‌توان کسب نمود از پاسخ فرکانسی نیز می‌توان بسته آورد و بالعکس.

برای ورودی پله واحد، خروجی سیستم نشان داده شده در شکل ۵۸-۵ عبارتست از

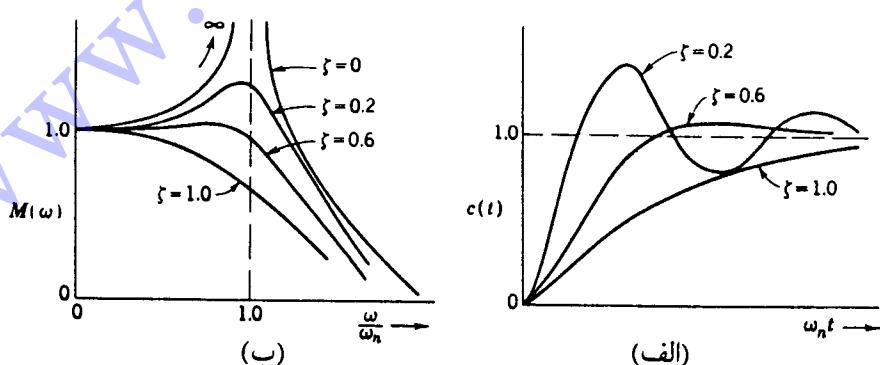
$$c(t) = 1 - e^{-\xi \omega_n t} \left(\cos \omega_n t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_n t \right) \quad (t \geq 0) \quad (59-5)$$

معادله (۵۹-۵) در بخش ۳-۴-۳ استنتاج گردید و شکل ۵۹-۵ (الف) پاسخ پله واحد سیستم درجه دوم را به ازاء مقادیر مختلف نسبت میرایی نشان می‌دهد. حداکثر فرا رفت M_p برای پاسخ پله واحد با معادله (۲۷-۴-۳) داده شده است و عبارتست از

$$M_p = e^{-(\xi \pi / \sqrt{1-\xi^2})} \quad (10-9-5)$$

حداکثر فرا رفت برای مقادیر نسبت میرایی کوچکتر از $\frac{1}{4}$ در عمل غیرقابل قبول خواهد بود. شکل ۵۹-۵ (ب) نیز دامنه تابع تبدیل فرکانسی $M = |G(j\omega)|$ ، داده شده با معادله (۲-۹-۵) را برای مقادیر مختلف نسبت میرایی نشان می‌دهد. بنابراین برای یک سیستم درجه دوم نتایج زیر را می‌توان در مرتبط کردن پاسخهای فرکانسی و زمانی بسته آورد:

- ۱- معادله (۵-۹-۵)، نشان می‌دهد که M تابعی از ω و ζ است. برای یک ζ داده شده مقدار ω بزرگتر، مقدار M بزرگتر می‌دهد و پاسخ حالت گذرا سریعتر خواهد بود.
- ۲- معادله های (۶-۹-۵) و (۱۰-۹-۵)، نشان می‌دهند که M_p و M تابع ζ هستند. با



شکل ۵۹-۵ (الف) نمودارهای زمانی برای پله واحد (ب) نمودارهای متناظر M بر حسب ω/ω_n .

کوچکتر شدن ξ ، مقادیر M_r و M_p بزرگتر خواهند شد. بنابراین می‌توان نتیجه‌گرفت که با بزرگ شدن مقدار M_m ، مقدار M_p بزرگتر خواهد شد. برای مقادیر $\xi < 0$ ، تناظر بین M_r و M_p تنها کافی است. به عبارت دیگر برای $\omega = \xi$ در حوزه زمان داریم $M_p = 1$ ولی در حوزه فرکانس $M_r = \infty$ را می‌دهد. برای $\xi > 0$ ، تناظر نزدیکی بین M_r و جود دارد. برای مثال در $\omega = \xi$ خواهیم داشت $M_r = 1/0.4$ و $M_p = 1/0.9$.

تابع تبدیل حلقه - باز سیستم نشان داده شده در شکل ۵-۸ عبارتست از

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)} \quad (11-9-5)$$

با جایگزینی $s = j\omega$ در معادله (۱۱-۹-۵) و حل معادله $|G(j\omega)| = 1$ برای ω بسادگی می‌توان نشان داد که دامنه $G(j\omega)$ در فرکانس زیر برابر یک خواهد بود

$$\omega = \omega_n \left[\left(1 + 4\xi^2 \right)^{1/2} - 2\xi^2 \right]^{1/2} \quad (12-9-5)$$

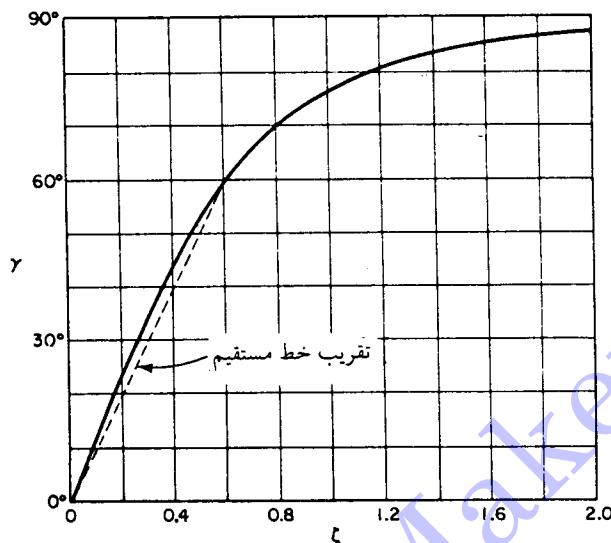
زاویه فاز تابع تبدیل در فرکانس داده شده با معادله (۱۲-۹-۵)، عبارتست از

$$\angle G(j\omega) = -\angle j\omega - \angle(j\omega + 2\xi\omega_n) = -90^\circ - \tan^{-1} \frac{\left[\left(1 + 4\xi^2 \right)^{1/2} - 2\xi^2 \right]^{1/2}}{2\xi} \quad (13-9-5)$$

بنابراین حاشیه فاز سیستم \neq عبارتست از

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ + \angle G(j\omega) \\ &= 90^\circ - \tan^{-1} \frac{\left[\left(1 + 4\xi^2 \right)^{1/2} - 2\xi^2 \right]^{1/2}}{2\xi} \\ &= \tan^{-1} \frac{2\xi}{\left[\left(1 + 4\xi^2 \right)^{1/2} - 2\xi^2 \right]^{1/2}} \end{aligned} \quad (14-9-5)$$

معادله (۱۴-۹-۵) ارتباط بین نسبت میرایی ξ و حاشیه فاز γ را می‌دهد. توجه کنید که حاشیه فاز تنها تابعی از نسبت میرایی است. شکل ۶-۵ نمودار حاشیه فاز بر حسب نسبت میرایی



شکل ۶۰-۵ منحنی حاشیه فاز بر حسب نسبت میرایی برای سیستم نشان داده شده در شکل ۴۸-۵

نشان داده شده است. دقیق کنید که برای $\xi / \omega_c = 0.5$ رابطه بین حاشیه بهره و نسبت میرایی تقریباً خطی است، در واقع داریم

$$\gamma = \frac{1}{100} \omega_c \xi$$

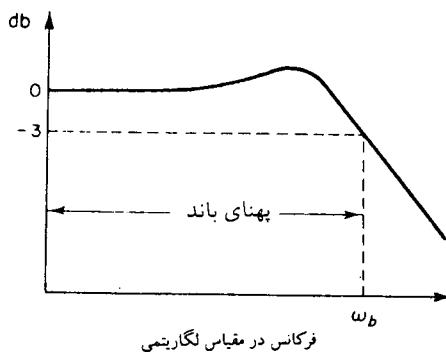
بنابراین یک حاشیه فاز 60° متناظر با نسبت میرایی ω_c / ω است. برای سیستم‌های درجه بالاتر که یک جفت قطب غالب وجود دارد، این ارتباط را می‌توان به عنوان یک قاعدة سرانگشتی در تخمین پایداری نسبی پاسخ گذرا از پاسخ فرکانسی استفاده کرد.

فرکانس قطع و پهنهای باند. علاوه بر حاشیه‌های بهره و فاز، ستینغ تشیدید M_{r} و فرکانس ستینغ تشیدید ω_s ، کمیتهای حوزه فرکانسی دیگری نیز وجود دارند که در سنجش عملکرد سیستم بکار گرفته می‌شوند. این مشخصه‌ها فرکانس قطع^۱، پهنهای باند^۲ و نرخ قطع^۳ است. با مراجعه به شکل ۶۱-۵ فرکانس ω_s که در آن دامنه تابع تبدیل فرکانسی حلقه - بسته

۱- Cutoff frequency

2- Bandwidth

3- Cutoff rate



شکل ۶-۵ نمودار لگاریتمی نشان دهنده فرکانس قطع ω_b و پهنهای باند

کمتر از ۳dB زیر مقدار فرکانس - صفر آن است را فرکانس قطع می‌نامند. بنابراین

$$\left| \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} \right| < \left| \frac{C(j0)}{R(j0)} \right| - 3\text{dB} \quad \omega > \omega_b \quad \text{برای } \omega > \omega_b$$

برای سیستم‌هایی که در آنها $|C(j0)/R(j0)|$ ، داریم

$$\left| \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} \right| < -3\text{dB} \quad \omega > \omega_b \quad \text{برای } \omega > \omega_b$$

سیستم حلقه - بسته با این مشخصه مؤلفه‌های سیگنالی که فرکانس‌هایی بزرگتر از فرکانس قطع دارند را فیلتر می‌کند و مؤلفه‌هایی که فرکانس‌های پایین‌تر از فرکانس قطع دارند را انتقال می‌دهد.

گستره فرکانسی $\omega_b \leq \omega \leq \omega_0$ که در آن اندازه تابع تبدیل حلقه - بسته از ۳dB - کمتر نمی‌شود را پهنهای باند سیستم می‌نامند. در بسیاری از سیستم‌های کنترل، سیگنال ورودی ممکن است که مقدار قابل توجهی سیگنال نویز همراه با سیگنال اصلی ورودی داشته باشد و یا حتی ممکن است که منبع تولید نویز در داخل سیستم حلقه - بسته وجود داشته باشد. سیگنال‌های نویز عموماً در باند فرکانس‌هایی بالای باند فرکانسی غالب سیگنال اصلی هستند. بنابراین برای تضعیف نویز و تولید کردن مجدد سیگنال اصلی ورودی، سیستم‌های کنترل را به گونه‌ای طراحی می‌کنند که یک پهنهای باند معین به همین منظور داشته باشند.

از طرف دیگر، می‌دانیم که برای یک ω داده شده، زمان صعود با افزایش نسبت میرایی Δ افزایش پیدا می‌کند، و هم‌چنین پهنهای باند با افزایش Δ کاهش پیدا می‌کند. بنابراین زمان خیز و

پهنهای باند نسبت عکس به هم دارند، به عبارت دیگر افزایش (کاهش) پهنهای باند باعث کاهش (افزایش) نسبت میرایی می‌شود. ازینرو افزایش (کاهش) پهنهای باند باعث افزایش (کاهش) سرعت پاسخ می‌شود.

آخرین نکته اینکه می‌توان نشان داد که پهنهای باند یک سیستم نشان دهنده کیفیت دنبال روندگی سیگنال‌های ورودی مرجع توسط آن است. برای آنکه سیستم ورودی‌های دلخواه را به طور دقیق دنبال کند، باید دارای پهنهای باندی بزرگ باشد. توجه کنید که طراحی سیستم با پهنهای باند بزرگ دارای دو مسئله عمده است، اول اینکه پهنهای باند بزرگ از نظر نویز در سیستم موجب بروز اشکالاتی خواهد گردید و دوم آنکه عناصری که در ساخت سیستم با پهنهای باند بزرگ بکار گرفته می‌شوند دارای عملکرد بالا هستند و لذا گران می‌باشند.

نرخ قطع، شبیه منفی لگاریتم دامنه در نزدیکی فرکانس قطع است. نرخ قطع توانایی یک سیستم را در تشخیص سیگنال از نویز نشان می‌دهد.

یک سیستم حلقه - بسته با مشخصه تیز قطع در منحنی تابع تبدیل پاسخ فرکانسی، ممکن است که دارای یک اندازه ستیغ تشدید بزرگ باشد که بر حاشیه پایداری نسبتاً کم دلالت خواهد کرد.

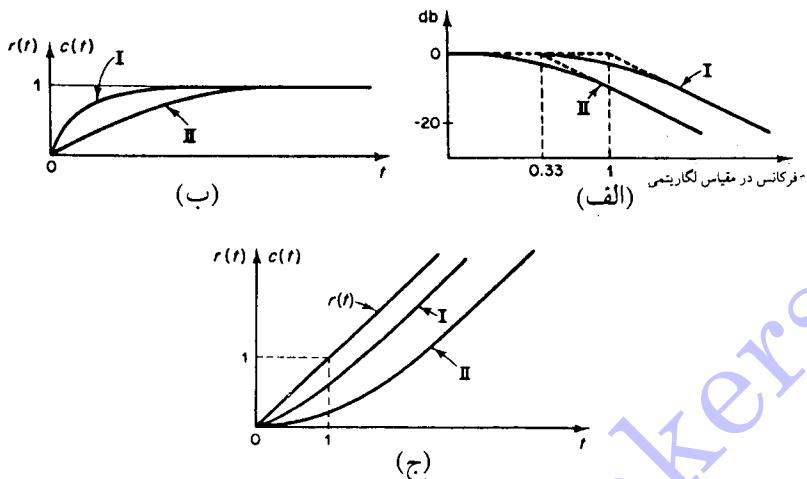
مثال ۲۹-۵

دو سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{سیستم (الف): } \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s+1}$$

$$\text{سیستم (ب): } \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{3s+1}$$

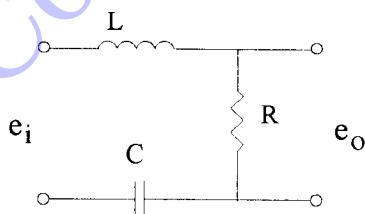
شکل ۶۲-۵ (الف) منحنی‌های پاسخ فرکانسی حلقه - بسته دو سیستم را نشان می‌دهد. همانطور که مشخص است پهنهای باند سیستم (الف) $0 \leq \omega \leq 1$ رadian بر ثانیه و پهنهای باند سیستم دوم $0 \leq \omega \leq 33$ رadian بر ثانیه است. شکل‌های ۶۲-۵ (ب) تا (ج) نشان می‌دهند که سیستم (الف) با پهنهای باند بزرگتر، هر دو ورودی پله واحد و شبیه واحد را به ترتیب در شکل‌های (ب) و (ج) بهتر دنبال می‌کند.



شکل ۶۲-۵ مقایسه مشخصه‌های دینامیکی دو سیستم در نظر گرفته شده در مثال ۲۹-۵، (الف) منحنیهای پاسخ فرکانسی (ب) پاسخ پله واحد (ج) پاسخ شب

مسایل

- ۱-۵ مدار نشان داده شده در شکل ۶۳-۵ را در نظر بگیرید. ولتاژ ورودی به مدار و ولتاژ خروجی آنرا به ترتیب با e_i و e_o نشان دهید. اگر ولتاژ ورودی $e_i = E_i \sin \omega t$ باشد، مقدار حالت - ماندگار جریان مدار $i(t)$ که از مقاومت عبور می‌کند را تعیین کنید.



شکل ۶۳-۵ مدار الکتریکی مسئله ۱-۵

- ۲-۵ نمودار بود توابع تبدیل زیر را رسم کنید:

$$G(s) = \frac{20(s+2)}{s(s^2 + 6s + 25)} \quad (\text{الف})$$

$$G(s) = \frac{4(1+0/\Delta s)}{s(1+s)(1+0/1s)} \quad (\text{ب})$$

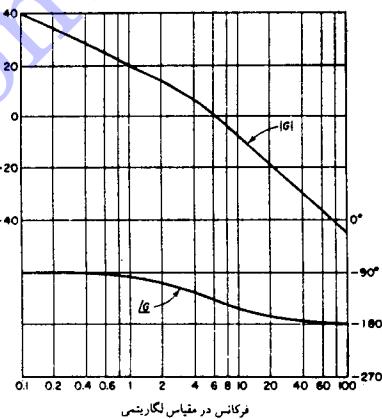
$$G(s) = \frac{20}{(1+0/2s)(1+0/4s)(1+s)} \quad (\text{ج})$$

$$G(s) = \frac{2}{s^2(1+0/1s)(1+0/4s)} \quad (\text{د})$$

$$G(s) = \frac{2(1+0/\Delta s)}{s(1+0/1s)(1+0/4s)} \quad (\text{ه})$$

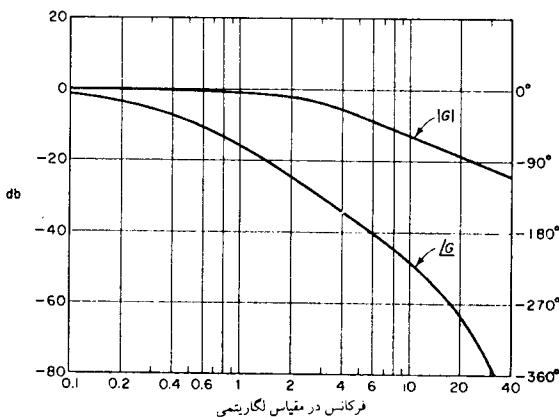
$$G(s) = \frac{2(1+0/4s)}{s^2(1+0/1s)(1+0/0\Delta s)} \quad (\text{و})$$

۳-۵ شکل ۶۴-۵ دیاگرام بود یک تابع تبدیل (s) را نشان می‌دهد. این تابع تبدیل را تعیین کنید.



شکل ۶۴-۵ دیاگرام بود مسئله ۳-۵

۴-۵ دیاگرام بود یک تابع تبدیل (s) در شکل ۶۵-۵ رسم شده است. این تابع تبدیل را تعیین کنید.



شکل ۴-۵ دیاگرام بود مسئله ۴-۵

۵-۵ تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم کنترل با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{as + 1}{s^2}$$

به ازاء چه مقداری از a حاشیه فاز سیستم 45° است.

۵-۶ توابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید. مقادیر بهره K را چنان پیدا کنید که (الف) حاشیه فاز سیستم 45° باشد (ب) حاشیه فاز سیستم 0° باشد. از نمودارهای بود بالاترین مقدار مجاز بهره برای پایداری را تعیین کنید.

$$(الف) G(s) = \frac{K(s+0/2s)}{(1+0/1s)(2+3s+s^2)}$$

$$(ب) G(s) = \frac{K(1+0/2s)}{(1+s)(1+0/3s+0/4s^2)}$$

$$(ج) G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s^2+4s+5)}$$

۷-۵ تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{2K}{(s+2)(s+0/4)(s+0/2)}$$

با رسم نمودار بود برای $K=1$ ، حاشیه‌های بهره و فاز تابع تبدیل را تعیین کنید.
همچنین گسترهای از مقادیر K که برای آنها سیستم حلقه - بسته ناپایدار است را بدست آورید.

۸-۵ تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{3(s+1)}{s(s+\alpha)}$$

با رسم نمودار بود این تابع تبدیل، مقدار ثابت α که فرکانس عبور بهره حلقه - بسته را (رادیان بر ثانیه) $= 100$ می‌کند، پیدا کنید. حاشیه‌های بهره و فاز سیستم تابع تبدیل را تعیین کنید.

۹-۵ نمودارهای نایکوئیست تابع تبدیل داده شده در زیر را رسم کنید.

$$G(s) = \frac{K}{s^2(-1+5s)(1+s)} \quad (\text{ب}) \quad G(s) = \frac{K(1+s)}{s^3} \quad (\text{الف})$$

$$G(s) = \frac{K}{s^3(s+15)(s^2+6s+10)} \quad (\text{د}) \quad G(s) = \frac{K}{s^2(1-0.5s)} \quad (\text{ج})$$

گستره مقادیر K را برای پایداری سیستم حلقه - بسته تابع تبدیل بالا با استفاده از نمودارهای رسم شده تعیین کنید.

۱۰-۵ نمودارهای نایکوئیست تابع تبدیل زیر را

$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1)}{s^2(T s + 1)}$$

برای حالتهای داده شده رسم کنید:

$$T_b > T > 0, \quad T_a > T > 0$$

$$T > T_b > 0, \quad T > T_a > 0$$

۱۱-۵ تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم حلقه - بسته عبارتست از

$$G(s) = \frac{Ke^{-2s}}{s}$$

حداکثر مقدار K را برای پایداری سیستم تعیین کنید.

۱۲-۵ تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم حلقه - بسته عبارتست از

$$G(s) = \frac{Ke^{-Ts}}{s(s+1)}$$

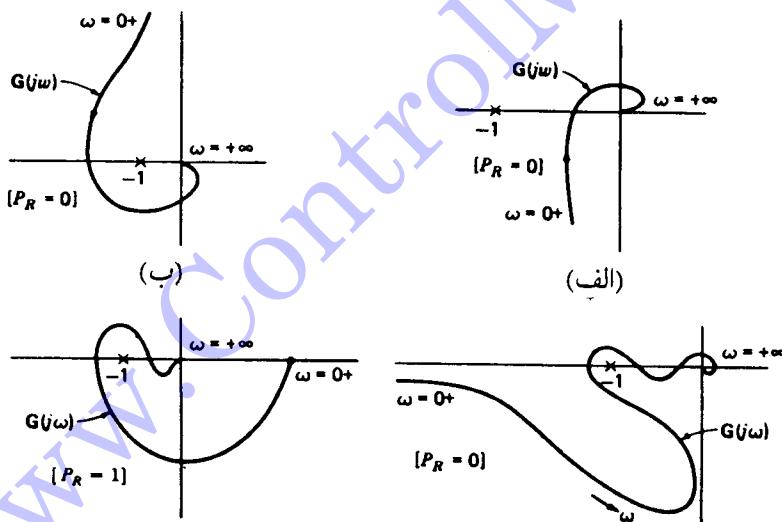
حداکثر مقدار K را برای پایداری سیستم برحسب تابعی از زمان تأخیر T پیدا کنید.

۱۳-۵ نمودار نایکوئیست تابع تبدیل زیر را رسم کنید

$$G(s) = \frac{(Ts)^2 - 6(Ts) + 12}{(Ts)^2 + 6(Ts) + 12}$$

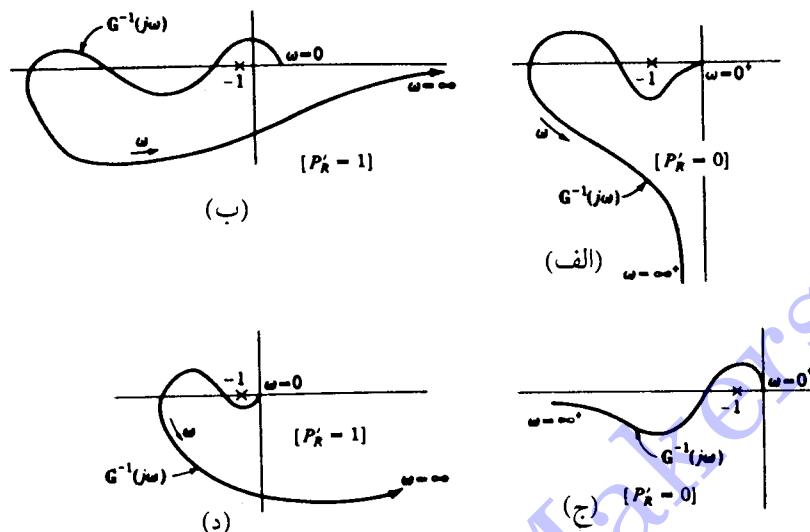
نشان دهید که برای گستره فرکانسی $\omega T < 2\sqrt{3}$ ، این معادله تقریب مناسی برای تابع تبدیل تأخیر e^{-Ts} است.

۱۴-۵ با کامل کردن نمودارهای نایکوئیست داده شده در شکل ۶۶-۵ پایداری هر سیستم را بررسی کنید.



شکل ۶۶-۵ نمودارهای نایکوئیست مسئله ۱۴-۵

۱۵-۵ نمودارهای نایکوئیست معکوس تابع تبدیل پایداری $G(s)$ در شکل ۶۷-۵ رسم شده‌اند. پایداری حلقه - بسته سیستم‌های کنترل متناظر با این تابع تبدیل را تعیین کنید.



شکل ۶۷-۵ نمودارهای نایکوئیست معکوس مسئله ۱۵-۵

۱۶-۵ تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم کنترل حلقه - بسته عبارتست از

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + s + 0.05)}$$

مقدار بهره K را چنان تعیین کنید که اندازه ستیغ تشدید در پاسخ فرکانسی برابر 20dB باشد.

۱۷-۵ سیستم درجه دوم زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

نشان دهید که پهنای باند سیستم به صورت زیر بدست می آید

$$\omega_b = \omega_n \left(1 - 2\xi^2 + \sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + 2} \right)$$

توجه کنید که ω_b/ω_n تنها تابعی از ξ است. نمودار ω_b/ω_n را بر حسب ξ رسم کنید.

مراجع فصل پنجم

- [5-1] Nyquist H., *Regeneration theory*, Bell System. Tech. J., Vol. 11, pp. 126-147, Jan. 1932.
- [5-2] Bode H. W., *Relations between attenuation and phase in feedback amplifier design*, Bell System Tech. J., pp. 421-454, 1940.
- [5-3] Brockett R. W. and J.L.Willems, *Frequency domain stability criteria-Part I*, IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-10, pp 255-261, July 1965.
- [5-4] Brockett R. W. and J.L.Willems, *Frequency domain stability criteria-Part II*, IEEE Trans. Automatic control, Vol. Ac-10, pp 407-413, oct. 1965.
- [5-5] Natesan T. R., *A supplement to the note on the generalized Nyquist criterion*, IEEE Trans. Automatic control, Vol. AC-12, pp. 215-216, April 1985.
- [5-6] Yeung K. S., *A reformulation of Nyquist's criterion*, IEEE Trans. Educ., Vol. E-28, pp 58-60, Feb. 1985.
- [5-7] Hind H. C., *Closed-loop transient response from the open-loop frequency response*, Trans. Measurement and control, pp 302-8, 1979.
- [5-8] MacFarlane A. G. J. , *Frequency response method in control systems*, IEEE press, 1979.
- [5-9] Westcott J. H., *The Frequency response method: Its relationship to transient behaviour in control system design*, Trans. of soc. of Instr. Tech., Vol 4, No. 3, pp 113-124, 1952
- [5-10] Sanathanan C. K. and H. Tsukui, *Synthesis of transfer function from frequency response data*, International J. systems scinece, Vol, 5, no. 1, pp 4-54, January 1974.



- [5-11] Maccoll L. A., *Fundamental theory of servomechanisms*, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1945
- [5-12] Brown G. S. and D.P.Campbell, *Principles of servomechanisms*, Wiley, New York, 1948
- [5-13] Stockdale L. A., *Servomechanism*, Pitama, 1962.

کتاب‌شناسی

در ابتدای این فصل از روشی تحلیلی برای بدست آوردن پاسخ فرکانسی یک سیستم خطی استفاده کردیم، پاسخ فرکانسی سیستم‌های خطی از نمودارهای قطب - صفر در [2] آمده است. رسم دیاگرام‌های بود همراه با مثالهای بسیار متنوع تقریباً در تمامی کتابهای مربوط به کنترل کلاسیک آورده شده است. مراجع [2]، [3] و [25] به عنوان نمونه رسم نمودارهای بود با رسم مجانبهای مناسب را به خوبی توضیح داده‌اند. محاسبه ثابت‌های مختلف خطأ و ارتباط نوع سیستم با منحنی لگاریتم دامنه مفصل‌آ در [1] و [2] توضیح داده شده است، اندازه‌گیریهای پاسخ فرکانسی نیز در [4] مختصراً توضیح داده شده‌اند. دو مرجع کلاسیک در تحلیل پاسخ فرکانسی با نمودارهای لگاریتم دامنه و فاز [5-1] و [5-2] هستند. یکی از کاربردهای نمودارهای بود در شناسایی تابع تبدیل سیستم‌های نامعلوم خطی است. روش شناسایی پاسخ فرکانسی در [1] و [2] به خوبی توضیح داده شده است، برای این منظور به مرجع [5-10] نیز مراجعه نمایید.

دومین دسته از نمودارهای مهم پاسخ فرکانسی، نمودارهای نایکوئیست هستند. رسم نمودارهای نایکوئیست در مراجع [1] و [2] به طور کامل آمده است.

کاربرد نمودارهای پاسخ فرکانسی برای تحلیل پایداری سیستم به طور اختصاصی در [5-3]، [5-4] و [5-5] و [5-6] آمده است. بسیاری از کتب درسی نیز به تحلیل پایداری سیستم با استفاده از نمودارهای بود و معیار پایداری نایکوئیست پرداخته‌اند. کاربرد نمودار بود برای تحلیل پایداری یک سیستم به خوبی در [3] بیان گردیده است. مرجع [15] بیان نسبتاً متفاوتی برای تعریف حاشیه‌های بیهوده و فاز دارد. برای بررسی معیار پایداری نایکوئیست و اثبات آن (که در این کتاب آورده نشده است) اطلاعات مقدماتی از نگاشتهای همدیس الزامی است. مراجع [1]، [2] و [5] فضای نگاشت، نگاشتهای همدیس و اثبات ریاضی معیار پایداری نایکوئیست را به طور نسبتاً ساده‌ای بیان کرده‌اند. سیستم‌های چند حلقه‌ای نیز در [1] و [3] بررسی شده‌اند. کاربرد معیار پایداری نایکوئیست برای سیستم‌های غیر علی^۱ و تأخیردار نیز در [3] بحث

شده است. چندین مثال بسیار جالب نیز در همان مرجع آورده شده است. مرجع [4] نیز در دو فصل جداگانه، پایداری سیستم‌های خطی و روش‌های مختلف بررسی آن را مفصل‌آ بحث نموده است. رسم نمودارهای نایکوئیست معکوس و تحلیل پایداری توسط آنها نیز در مراجع [1] تا [11] آورده شده است.

ارتباط بین رفتار حالت - گذرای سیستم حلقه - بسته و پاسخ فرکانسی حلقه - باز آن در مقاله [5-7] و کتاب [5-8] و مقاله [5-9] مفصل‌آ بحث شده است. در مراجع [1] ، [3] ، [4] و [25] نیز این ارتباطات را به طور ساده‌ای بیان گردیده‌اند. اثرات اضافه کردن قطب و صفر بهتابع تبدیل بر پارامترهای پاسخ فرکانسی نیز در [3] آورده شده است.



۶

روشهای جبران سازی سیستم های کنترل

اهداف فصل:

- ۱- آشنایی با ایده جبران سازی و انواع جبران سازها
- ۲- معرفی جبران سازهای پس فاز، پیش فاز و پس - پیش فاز
- ۳- طراحی جبران سازها با استفاده از مکان ریشه
- ۴- طراحی جبران سازها با استفاده از روش پاسخ فرکانسی
- ۵- طراحی جبران سازها با استفاده از چارت نیکولز

۱-۶ مقدمه

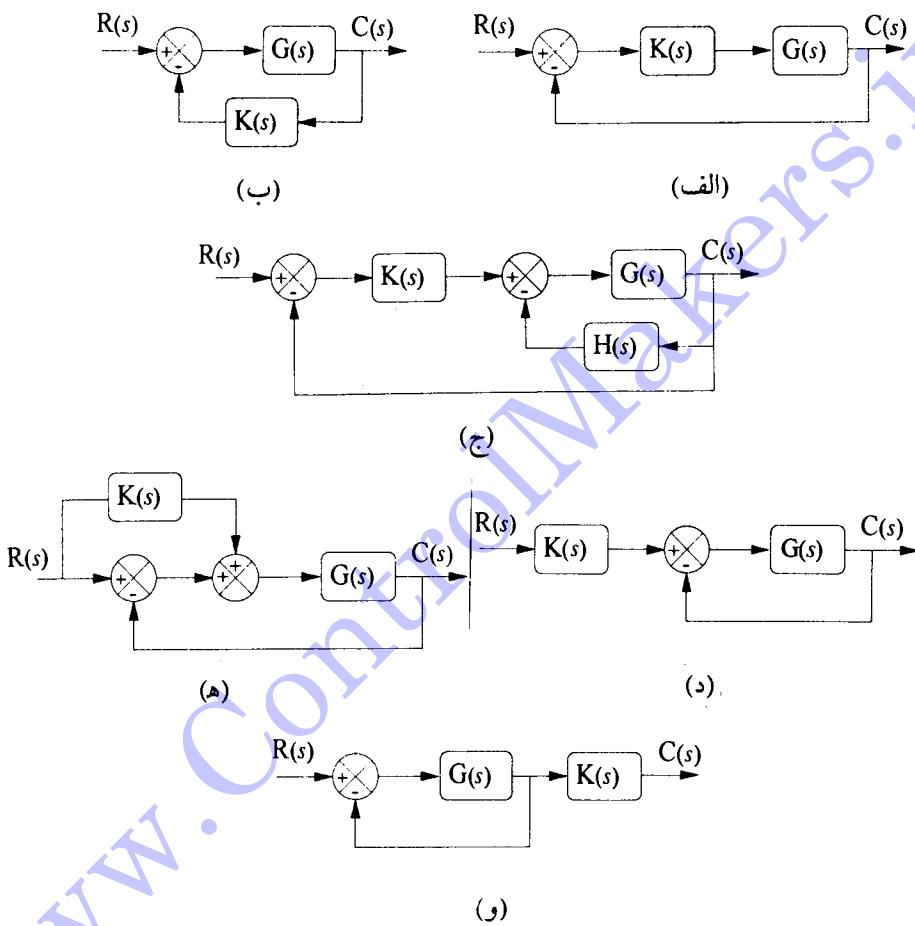
در فصلهای قبل بانمایش و تحلیل عملکرد سیستم‌های کنترل آشنا شدیم. مهندس کنترل پس از نمایش سیستم کنترل به صورت معادلات دیفرانسیل غیرخطی، تابع تبدیل، فضای حالت و ... به تحلیل سیستم خواهد پرداخت. توسط مدل بدست آمده از سیستم، و یا در صورت امکان با تحت آزمایش قرار دادن سیستم حلقه - باز اصلی، مشخصه‌های حوزه زمانی پاسخ سیستم به ورودیهای مختلف مانند ورودی پله (سرعت پاسخ، فراجهش حداکثر، زمان پاسخ، زمان استقرار...)، خطاهای حالت - ماندگار، پایداری و پایداری نسبی، رسم مکانیستیغ، رسم نمودارهای بود، نایکوئیست و چارت نیکولز مشخصه‌هایی ریشه و در حوزه فرکانس با رسم نمودارهای بود، نایکوئیست و پایداری نسبی، رسم مکانیستیغ، رسم حاشیه بهره، حاشیه فاز، پایداری نسبی، پهنای باند، فرکانس قطع و ... را مورد بررسی قرار می‌دهد. حال اگر یک یا چند پارامتر از مشخصه‌های سیستم، مانند پایداری، سرعت پاسخ، حاشیه‌های بهره و فاز و غیره مطلوب نباشند، طراح سیستم باید به گونه‌ای به مشخصه‌های مطلوب عملکرد سیستم دست یابد. با توجه به اینکه در اکثر سیستم‌ها، سخت افزار و ساختار درونی سیستم حلقه - باز مورد نظر غیرقابل تغییر و تعویض است، لذا در عمل نمی‌توان با تغییر پارامترهای خود سیستم به عملکرد مطلوب دسترسی پیدا کرد. از این‌رو، مهندس طراح سیستم با بکارگیری روشهای طراحی^۱ و جبران‌سازی^۲، کنترل کننده مناسبی را جهت دست یابی به مشخصه‌های مورد نظر طراحی می‌کند. به سیستم‌های کمکی که وارد حلقه کنترل می‌گردند و رفتار مورد نظر حلقه - بسته را بدست می‌دهند، جبران ساز^۳ می‌گویند. در برخی از سیستم‌ها عمل جبران‌سازی با بستن یک حلقه فیدبک واحد به دور سیستم و تنظیم بهره حلقه - باز آن، به خوبی انجام می‌پذیرد. حال آنکه در بسیاری از سیستم‌های صنعتی که چند مشخصه مانند پایدارسازی، سرعت بخشیدن به پاسخ و ... مورد نظر است، و یا اینکه سیستم از دینامیک پیچیده‌ای برخوردار است، با تنظیم یک بهره از سیستم حلقه - بسته با فیدبک واحد، مشخصه‌های تعیین شده برای سیستم حلقه - بسته بدست نخواهد آمد. در این چنین مواردی استفاده از جبران سازهای دینامیکی الزامی خواهد بود.

1- Design

2- Compensation

3- Compensator

روش‌های مختلفی برای وارد کردن جبران سازها در سیستم فیدبک وجود دارند. این روشها در شکل زیر آورده شده‌اند. اولین و متدالترین روش، استفاده از جبران ساز در مسیر پیشرو همراه با سیستم حلقه - باز است. به این روش، جبران سازی سری^۱ یا متولی^۲ می‌گویند.



(الف) سیستم کنترل فیدبک با جبران ساز سری (ب) سیستم کنترل فیدبک با جبران ساز موازی (ج) سیستم کنترل فیدبک با جبران ساز سری - موازی (د) سیستم کنترل فیدبک با جبران ساز در مسیر ورودی (ه) سیستم کنترل فیدبک با جبران ساز در مسیر خروجی (و)

این روش جبران‌سازی در شکل ۱-۶ (الف) نشان داده شده است. روش دوم وارد کردن جبران سازها، استفاده از جبران ساز در مسیر فیدبک است. به این روش، جبران سازی فیدبک یا موازی^۱ گفته می‌شود و در شکل ۱-۶ (ب) نشان داده شده است. همچنین می‌توان دو روش بالا را تلفیق نموده و از جبران ساز سری - فیدبک نشان داده شده در شکل ۱-۶ (ج) استفاده کرد. در بعضی از شرایط بهتر است که از جبران ساز در مسیر ورودی به سیستم فیدبک استفاده نمود که به دو صورت نشان داده شده در شکل‌های ۱-۶ (د) و (ه) اعمال می‌شود. سرانجام می‌توان از جبران سازها در مسیر خروجی سیستم نیز استفاده کرد که به آن جبران کردن خروجی یا بار^۲ گویند و در شکل ۱-۶ (و) نشان داده شده است.

علاوه بر روشهای ذکر شده می‌توان به روشهای جدید بنا نهاده شده بر مفاهیم فضایی حالت نیز اشاره کرد. این روشهای تحلیل و طراحی سیستم‌ها را، بصورت مختصر در فصل ۷ بررسی خواهیم کرد. در این فصل، با توجه به سر راست بودن و کاربردی تر بودن روشهای طراحی جبران سازهای سری (شکل ۱-۶ (الف)), تنها به ارایه و توضیح این روشهای خواهیم پرداخت. بدیهی است که در شرایط خاصی ممکن است یکی از روشهای ذکر شده در بالا بر روش سری ترجیح داده شود، لیکن جبران سازی سری با توجه به کاربرد وسیعتر آن، بیشتر از همه روشهای دیگر مورد استفاده قرار گرفته است. در هر صورت عوامل زیر در انتخاب، بین روشهای مختلف جبران سازی باید در نظر گرفته شوند:

۱- روشهای طراحی جبران‌کننده سری سر راست تر از روشهای طراحی سایر جبران سازها است. اگر چه ممکن است اعمال عملی برخی از جبران‌کننده‌ها ساده‌تر باشد.

۲- با توجه به ماهیت فیزیکی یک سیستم کنترل (الکترونیکی، مکانیکی، هیدرولیکی و یا غیره)، ممکن است که برخی از روشهای جبران‌سازی ذکر شده قابل اجرا نباشند.

۳- اعمال جبران ساز از نقطه نظر اقتصادی مقرن به صرفه باشد. مواردی از قبیل اندازه، وزن، هزینه عناصر و تقویت‌کننده‌ها، همگنی در ارزیابی اقتصادی جبران

ساز مهم هستند. دقت کنید که در برخی از کاربردها، مانند صنایع هواییما بی، حجم و وزن جعبه کنترل فوق العاده مهم است و طراح باید یک محدوده حجم و وزن مشخصی را برای جبران ساز در نظر بگیرید.

۴- شرایط محیطی که جبران ساز در آن به کار گرفته خواهد شد، بر دقت و پایداری کمیت کنترل شده پشت تأثیر می‌گذارد و انتخاب متغیر مناسب برای ورودی و خروجی بلوك جبران ساز می‌تواند یکی از عوامل تعیین کننده باشد. به عنوان مثال ممکن است که یک کمیت در سیستم، تحت تأثیر شدید شرایط جوی باشد و با تغییر دما تغییر کند و یا اینکه به کارگیری متغیر دیگری از نظر سخت افزار سیستم، مناسب تر باشد.

۵- مسئله نویز در سیستم کنترل نیز می‌تواند در انتخاب نوع جبران ساز تأثیر گذارد. به عنوان مثال در جبران سازهای سری که از یک بهره تقویت زیاد استفاده می‌کنند، مسئله نویز حادتر از جبران سازهای فیدبک است که در آنها تقویت کننده‌ای با بهره بزرگ بکار گرفته نمی‌شود.

۶- نوع مشخصه عملکرد مطلوب در نظر گرفته شده برای سیستم حلقه - بسته نیز می‌تواند یکی از عوامل رجحان یک نوع جبران ساز بر دیگری باشد. اگر پاسخ سریعی از سیستم مطلوب باشد، جبران سازی فیدبک می‌تواند بهتر جوابگو باشد و یا اگر بخواهیم یک قسمت از دینامیک سیستم را از سایر قسمتها مجزی کنیم، در این حالت می‌توان از یک حلقة فیدبک داخلی در قسمت موردنظر استفاده کرد.

۷- در کنار تمامی موارد بالا، باید تجربه و علاقه طراح به یک سیستم خاص جبران سازی و عناصر در دسترس برای بکارگیری در سیستم جبران ساز را نیز افزود.

مشخصه‌های عملکرد. مشخصه‌های عملکرد بسیاری، بسته به نیاز صنعت و کاربرد خاص سیستم کنترل، برای تعیین رفتار مطلوب سیستم کنترل وجود دارند. در جدول ۱-۶ خلاصه‌ای از مشخصه‌های عملکرد آورده شده است.

مراحل طراحی. اولین مرحله طراحی، بdest آوردن یک مدل ریاضی مناسب خطی از سیستم مورد نظر است. پس از مدلسازی و شبیه‌سازی سیستم، با روش‌های ارایه شده، تحلیل مدل سیستم صورت می‌پذیرد و نقاط ضعف و قوت سیستم به طور کامل تعیین می‌گردد. با

جدول ۱-۶ خلاصه‌ای از مشخصه‌های مهم عملکرد که در صراحی جبران سازها مورد استناده قرار می‌گیرند.

(الف) سیستم حلقه - باز

مشخصه	حوزه	توضیح
۱- ساختار قطب و صفر	حوزه‌های زمان و فرکانس	نشان دهنده پایداری و رفتار حلقه - باز
۲- حاشیه بهره و حاشیه فاز	حوزه فرکانس	نشان دهنده پایداری حلقه - سته و حاشیه پایداری

(ب) سیستم حلقه - بسته

مشخصه	حوزه	توضیح
۱- ساختار قطب و صفر	حوزه‌های زمان و فرکانس	نشان دهنده پایداری و رفتار حلقه - بسته
۲- مشخصه‌های پاسخ زمانی	حوزه زمان	تابعی از فرکانس طبیعی غیرمیرا و نسبت میرای برای سیستم مرتبه دوم و ب فقطهای مُثُر سیستمهای مرتبه بالاتر

۳- خطای حالت - ماندگار	حوزه زمان	تابعی از نوع سیستم و ماهیت ورودی
۴- فرکانس تشدید، بالاترین مقدار تشدید، پنهانی باند.	حوزه فرکانس	تابعی از فرکانس طبیعی غیرمیرا و نسبت میرای برای سیستم مرتبه دوم و ب فقطهای غالب سیستمهای مرتبه بالاتر
فرکانس قطع و نرخ آن		میزانی برای حذف نویز و دنبال روندگی در سیستم. میزانی برای تعیین حاشیه پایداری و سرعت پاسخ سیستم.

تعیین مشخصه‌های عملکرد و رفتار مطلوب و ایده‌آل سیستم حلقه - بسته، طراح با روشن سعی و خطا به طراحی جبران سازی می‌پردازد که رفتار مطلوب حلقه - بسته را فراهم آورد. در این مرحله، باید با انجام آزمایشات مکرر و طراحیهای مختلف، پارامترهای گوناگون جبران ساز را به گونه‌ای تغییر داد تا رفتار مناسب حلقه - بسته حاصل شود. با آزمون پایداری و اطمینان از پایداری سیستم حلقه - بسته و بدست آوردن سایر مشخصه‌های پاسخ سیستم، طراح با اعمال جبران ساز به سیستم اصلی و بستن حلقه آن، سیستم را مورد آزمایش قرار می‌دهد. با توجه به در نظر گرفتن مسایل عملی از قبیل عناصر غیرخطی در سیستم، محركها، سنسورها، برخی دینامیک‌های مدل نشده و نامعینی در مدل‌سازی و شبیه‌سازی سیستم حلقه - باز و جبران ساز، بدیهی است که رفتار سیستم حلقه - بسته واقعی با رفتار مدل آن مقداری

تفاوت داشته باشد. لذا ممکن است که اولین نتیجه طراحی چندان مطلوب نباشد و مشخصه‌های عملکرد را برآورده نسازد. در اینجا طراح سیستم کنترل با سعی و خطا به بهینه‌سازی مدل طراحی شده پرداخته تا اینکه به سیستم مطلوب حلقه - بسته دست پیدا کند. در این مرحله، طراح باید هر آزمایشی را بر روی سیستم به طور دقیق تحلیل و بررسی کند و نتایج هر مرحله را در بهینه‌سازی مراحل بعد به کار گیرد. طراح باید اطمینان پیدا کند که سیستم نهایی، مشخصه‌های عملکرد را برآورده می‌سازد، علاوه بر آن از نظر اقتصادی مفروض به صرفه است و از نظر کار قابل اعتماد می‌باشد.

تذکر این نکته حائز اهمیت است که در طراحی سیستم‌های کنترل با روشهای مکان ریشه، و یا پاسخ فرکانسی (که در این فصل مورد بررسی قرار می‌گیرند)، جبران ساز و نتیجه نهایی منحصر بفرد نیست. منحصر بفرد نبودن نتیجه طراحی بدین دلیل است که بهترین پاسخ یا پاسخ بهینه به مسئله طراحی تعریف نشده است و برای دست یابی به طراحی بهینه باید از روشهای پیشرفته‌تری استفاده کرد که از محدوده این کتاب خارج است.

مشخصه‌های کلی که یک سیستم طراحی شده باید داشته باشند، عبارتند از: خطاهای کوچک در پاسخ به سیگنال ورودی (برای این منظور میرایی سیستم باید مناسب باشد)، حساسیت کم به تغییرات کوچک در پارامترهای سیستم، از بین بودن اثر اغتشاشات نامطلوب وارد به سیستم و همچنین کم کردن اثر نویز ورودی (مانند نویز سنسورها).

۶- انواع جبران سازها

متداول‌ترین جبران سازها که در صنعت نیز کاربرد فراوانی دارند عبارتند از: جبران سازهای پیش فاز^۱، پس فاز^۲ و پس - پیش فاز^۳. جبران ساز پیش فاز بطور عمده برای بهبود بخشیدن به رفتار گذراي پاسخ بکار گرفته می‌شود و تأثیر اندکی بر روی خطای حالت - ماندگار یا پاسخ دارد. این جبران ساز ممکن است موجب تشدید اثرات نویزهای فرکانس بالا گردد. جبران ساز پس فاز برای بهبود بخشیدن خطای حالت - ماندگار به کار گرفته می‌شود. لیکن باعث افزایش زمان پاسخ گذاری سیستم می‌گردد. جبران ساز پس فاز اثرات نویزهای فرکانس بالا را که هشت

1- Phase lead

2- Phase lag

3- Phase lag-lead

می‌دهد. جبران ساز پس - پیش فاز اثرات هر دو جبران سازی پس و پیش فاز را با هم ترکیب می‌کند. بکارگیری جبران ساز پس فاز یا پیش فاز درجه دینامیکی سیستم را، در صورتیکه حذف صفر و قطب صورت نگیرد، یک درجه بالا می‌برد و در صورت عدم حذف صفر و قطب، جبران ساز پس - پیش فاز دو درجه به درجه دینامیکی سیستم اضافه می‌کند. این دو درجه افزایش در درجه دینامیکی، موجب پیچیده‌تر شدن سیستم می‌گردد و کنترل رفتار گذرای آن را مشکلتر می‌سازد.

جبران سازهای دیگری نیز وجود دارند که بعضًا در صنعت به کار گرفته می‌شوند، برای بررسی این جبران سازها به بخش کتابشناسی همین فصل مراجعه شود.

۱-۲-۶ جبران ساز پیش فاز

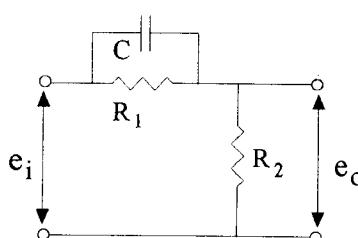
جبران ساز پیش فاز استاندارد دارای تابع تبدیل زیر است

$$G_c(s) = \alpha \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts} \quad (1-2-6)$$

که در آن $\alpha > 0$ و T یک عدد حقیقی مثبت است. در بسیاری از مواقع، همراه با تابع تبدیل جبران ساز داده شده با معادله (۱-۲-۶)، یک بهره قابل تنظیم K نیز برای بهبود بخشدیدن به عملکرد جبران ساز بکار گرفته می‌شود. در این صورت تابع تبدیل جبران ساز عبارتست از

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts} \quad (2-2-6)$$

شکل ۱-۶ تحقیق فیزیکی جبران ساز پیش فاز داده شده با معادله (۱-۲-۶) را به صورت یک مدار الکتریکی نشان می‌دهد (برای دیگر تحقیقات فیزیکی جبران ساز، به مسایل ۱-۶ و ۲-۶ مراجعه کنید) از شکل ۱-۶ داریم که تابع تبدیل بین خروجی ($e_o(s)$) و ورودی ($e_i(s)$) عبارتست از



- شکل ۱-۶ مدار پیش فاز الکتریکی

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_1 Cs + 1}{R_1 R_2 Cs + 1} \quad (3-2-6)$$

با تعریف

$$R_1 C = T, \quad \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \alpha < 1$$

از معادله (3-2-6)، بدست می‌آوریم

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \alpha \cdot \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts}$$

که همانند معادله (1-2-6) می‌باشد.

مشخصه‌های جبران سازهای پیش فاز، تابع تبدیل جبران ساز پیش فاز را می‌توان از معادله (1-2-6) به صورت زیر نوشت

$$G_c(s) = \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad (4-2-6)$$

بنابراین جبران ساز پیش فاز یک قطب در $\omega = 1/T$ دارد. از آنجاییکه $\alpha < 1$ می‌باشد، صفر جبران ساز همواره در سمت راست قطب آن برروی محور حقیقی منفی در صفحه مختلط قرار دارد. برای مقدار کوچک α ، قطب جبران ساز در قسمت چپ صفحه مختلط بسیار دور از محور موهومنی قرار می‌گیرد. حداقل مقدار α با تحقق فیزیکی جبران ساز پیش فاز محدود می‌شود.

تابع تبدیل پاسخ فرکانسی جبران ساز پیش فاز عبارتست از

$$G_c(j\omega) = K_c \alpha \frac{j\omega T + 1}{j\omega \alpha T + 1} \quad (0 < \alpha < 1) \quad (5-2-6)$$

نمودار بود جبران ساز پیش فاز برای $\alpha = 0$ و $K_c = 1$ در شکل ۲-۶ نشان داده شده است. فرکانس‌های شکست برای جبران ساز پیش فاز عبارتند از $\omega = 1/T$ و $\omega = 1/(aT)$ از شکل ۲-۶ مشاهده می‌شود که جبران ساز پیش فاز یک فیلتر بالاگذرا است. به عبارت دیگر

فرکانس‌های بالا را عبور داده ولی فرکانس‌های پایین را تضعیف می‌کند. دقت کنید که این مشخصه برای پدیده نویز که عموماً دارای فرکانس‌های بالا می‌باشد، مناسب نیست. با توجه به قسمت فاز نمودار بود شکل ۶-۲، مشاهده می‌شود که حداکثر پیش فاز، زاویه ϕ_m در ω رخ می‌دهد که میانگین هندسی دو فرکانس شکست است، به عبارت دیگر

$$\log \omega_m = \frac{1}{2} \left(\log \frac{1}{T} + \log \frac{1}{\alpha T} \right) \quad \text{واز اینزو}$$

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha T}} \quad (6-2-6)$$

نمودار نایکوئیست جبران ساز پیش فاز داده شده با معادله (۵-۲-۶) در شکل ۶-۳ نشان داده شده است. همانطور که در شکل ۳-۶ نشان داده شده است. حداکثر پیش فاز، زاویه ϕ_m زاویه بین مماسی است که از مبدأ به نمودار نایکوئیست (یک نیمدايره) رسم می‌شود. همچنین داریم که زاویه فاز در $\omega_m = \omega$ ، عبارتست از

$$\sin \phi_m = \frac{\frac{1-\alpha}{2}}{\frac{1+\alpha}{2}} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad (7-2-6)$$

از معادله (۷-۲-۶)، می‌توان حداکثر زاویه پیش فاز برای یک «داده شده را محاسبه کرد. چارت نیکولز جبران ساز پیش فاز داده شده با معادله (۱-۲-۶)، برای $\alpha = 0$ و $K_c = 1$ نیز در شکل ۴-۶ رسم شده است.

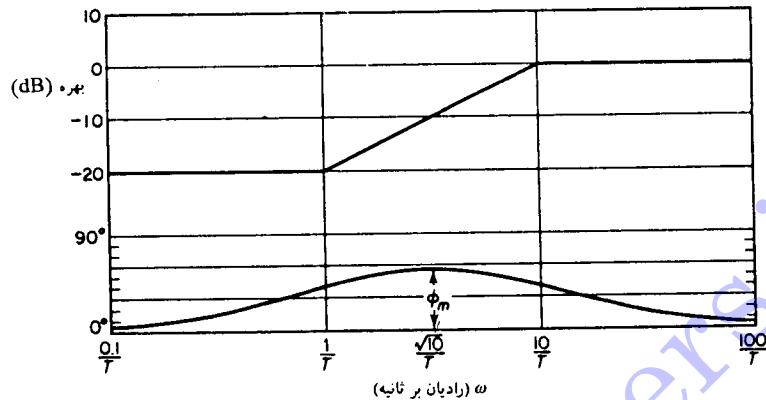
۲-۲-۶ جبران ساز پس فاز

جبران ساز پس فاز استاندارد، دارای تابع تبدیل زیر می‌باشد

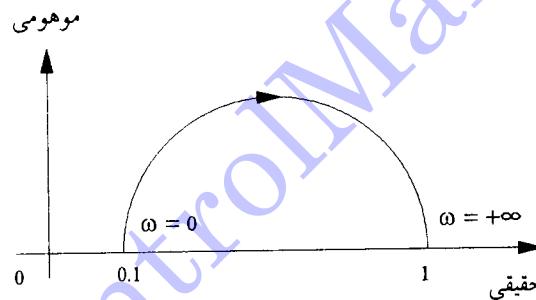
$$G_c(s) = \frac{1+Ts}{1+\beta Ts} \quad (8-2-6)$$

که در آن $\beta > 1$ عدد حقیقی مثبت است. همانند جبران ساز پیش فاز در اینجا نیز در بسیاری از مواقع همراه با جبران ساز داده شده با معادله (۸-۲-۶)، یک بهره قابل تنظیم K_c برای بهبود عملکرد جبران ساز بکار گرفته می‌شود. در این صورت تابع تبدیل جبران ساز پس فاز عبارتست از

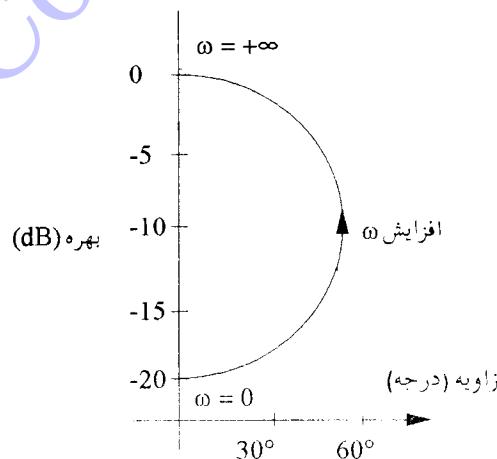
$$G_c(s) = K_c \frac{1+Ts}{1+\beta Ts}$$



شکل ۲-۶ نمودار بود جبران ساز پیش فاز معادله (۲-۲-۶) که در آن $1 + K_c = ۰$ و $\alpha = ۰ / ۱$



شکل ۳-۶ نمودار نایکوئیست جبران ساز پیش فاز معادله (۲-۲-۶) که در آن $1 + K_c = ۰$ و $\alpha = ۰ / ۱$

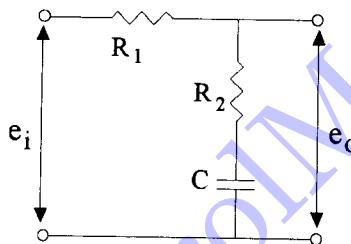


شکل ۴-۶ پیچایش اگرکن جبران ساز پیش فاز معادله (۲-۲-۶) که در آن $1 + K_c = ۰$ و $\alpha = ۰ / ۱$

$$= \frac{K_c}{\beta} \frac{s + 1/T}{s + 1/\beta T} \quad (9-2-6)$$

شکل ۵-۶ تحقق فیزیکی جبران ساز پس فاز داده شده با معادله (۸-۲-۶) را به صورت یک مدار الکتریکی نشان می‌دهد. (برای دیگر تحقیقاتی فیزیکی جبران ساز به مسایل ۱-۶ و ۲-۶ مراجعه کنید) با نوشتن تابع تبدیل مدار شکل ۵-۶ و مقایسه با معادله (۸-۲-۶)، بدست می‌آوریم

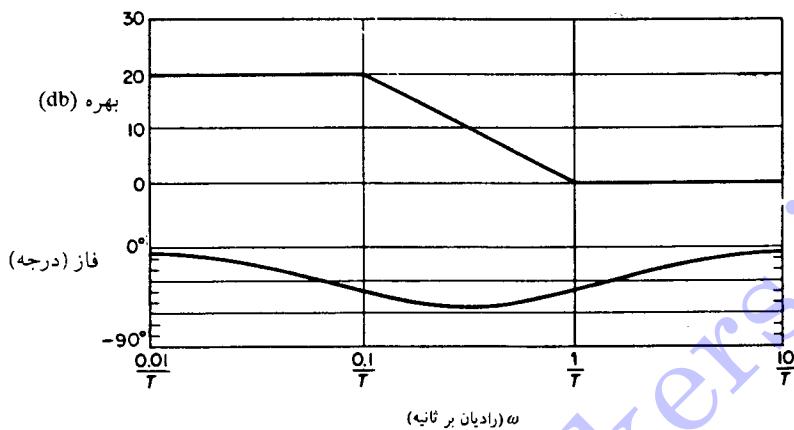
$$T = R_2 C, \quad \beta = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \quad (\beta > 1/0)$$



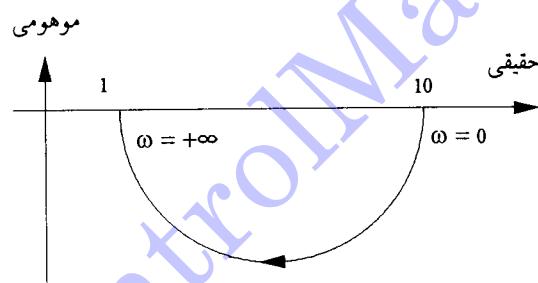
شکل ۵-۶ مدار پس فاز الکتریکی

مشخصه‌های جبران سازهای پس فاز، با توجه به معادله (۹-۲-۶) جبران ساز پس فاز یک قطب در $1/(1/\beta T) = \omega$ و یک صفر در $1/T = \omega$ دارد. از آنجاییکه $\beta > 1/0$ ، لذا قطب جبران ساز همواره در سمت راست صفر آن بر روی محور حقیقی منفی در صفحه مختلط قرار دارد. برای مقادیر بزرگ β قطب جبران ساز به مبدأ صفحه مختلط نزدیکتر خواهد شد. نمودار بود جبران ساز پس فاز برای $K_c = 1$ و $\beta = 10$ در شکل ۶-۶ نشان داده شده است. فرکانس‌های شکست برای جبران ساز پس فاز در $1/T = \omega = 1/(1/\beta T) = \omega$ قرار دارند. همانطور که از شکل ۶-۶ مشاهده می‌شود، جبران ساز پس فاز به صورت یک فیلتر پایین گذر^۱ عمل می‌کند. دقت کنید که دامنه جبران ساز پس فاز در فرکانس‌های پایین برابر 10 dB یا 20 dB و در فرکانس‌های بالا یک dB است. نمودار نایکوئیست و چارت نیکولز جبران ساز پس فاز نیز به ترتیب در شکل‌های ۷-۶ و ۸-۶ رسم شده‌اند.

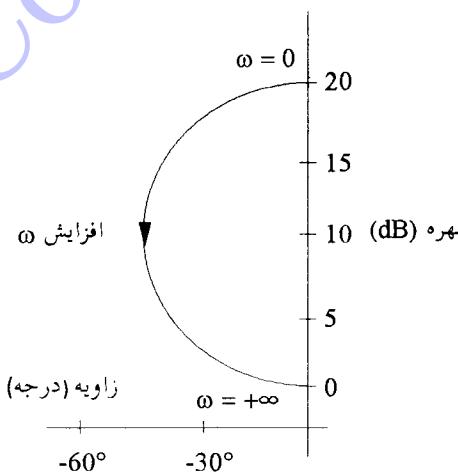
1- Low pass filter



شکل ۶-۶ نمودار بود جبران ساز پس فاز معادله (۸-۲-۶)، که در آن $1 = K_c$ و $\beta = ۱۰$



شکل ۶-۷ نمودار نایکوئیست جبران ساز پس فاز معادله (۸-۲-۶) که در آن $1 = K_c$ و $\beta = ۱۰$



شکل ۸-۶ چارت نیکولز جبران ساز پس فاز معادله (۸-۲-۶) که در آن $1 = K_c$ و $\beta = ۱۰$

۳-۲-۶ جبران ساز پس - پیش فاز

برای آنکه از مزیت هر دو جبران ساز پس فاز در بالا بردن دقت حالت - ماندگار و پیش فاز در سرعت بخشیدن به پاسخ سیستم و کاهش فرجهش حداقل استفاده کنیم، این دو جبران ساز با هم ترکیب شده و جبران ساز پس - پیش فاز را بوجود می آورند.تابع تبدیل جبران ساز پس - پیش فاز عبارتست از

$$G_c(s) = K_c \beta \alpha \frac{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}{(1+\alpha T_1 s)(1+\beta T_2 s)} \quad (10-2-6)$$

که در آن $\alpha < 1$ ، T_1 و T_2 ثابت‌های مثبت و K_c یک بهره قابل تنظیم است. در بسیاری از موقعیت β برابر با $1/\alpha$ انتخاب می شود. شکل ۹-۶ تحقق فیزیکی این جبران ساز را به صورت یک مدار الکتریکی نشان می دهد. (برای دیگر تحقیقات فیزیکی جبران ساز به مسایل ۶-۳ و ۶-۴ مراجعه کنید). از شکل ۹-۶، تابع تبدیل مدار نشان داده شده عبارتست از

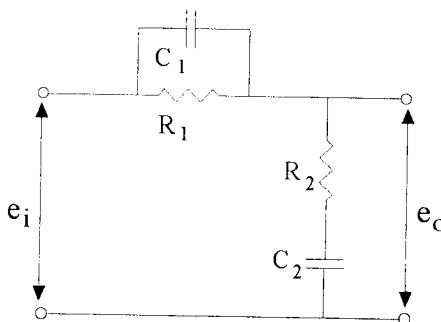
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1) + R_1 C_1 s} \quad (11-2-6)$$

با تعریف

$$T_1 = R_1 C_1, \quad T_2 = R_2 C_2, \quad R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_1 = \frac{T_1}{\beta} + \beta T_2 \quad (\beta > 1)$$

داریم

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{\left(\frac{T_1}{\beta} s + 1\right)(\beta T_2 s + 1)} \quad (12-2-6)$$



شکل ۹-۶ مدار پس - پیش فاز الکتریکی

معادله (۱۲-۲-۶)، همان معادله (۱۰-۲-۶) است با $\alpha = \beta = 1/\alpha$ و $K_c = 1$

مشخصه‌های جبران سازهای پس - پیش فاز، تابع تبدیل جبران ساز پس - پیش فاز را می‌توان از معادله (۱۰-۲-۶) به صورت زیر نوشت

$$G_c(s) = K_c \left(\frac{s + 1/T_1}{s + 1/\alpha T_1} \right) \left(\frac{s + 1/T_2}{s + 1/\beta T_2} \right) \quad (13-2-6)$$

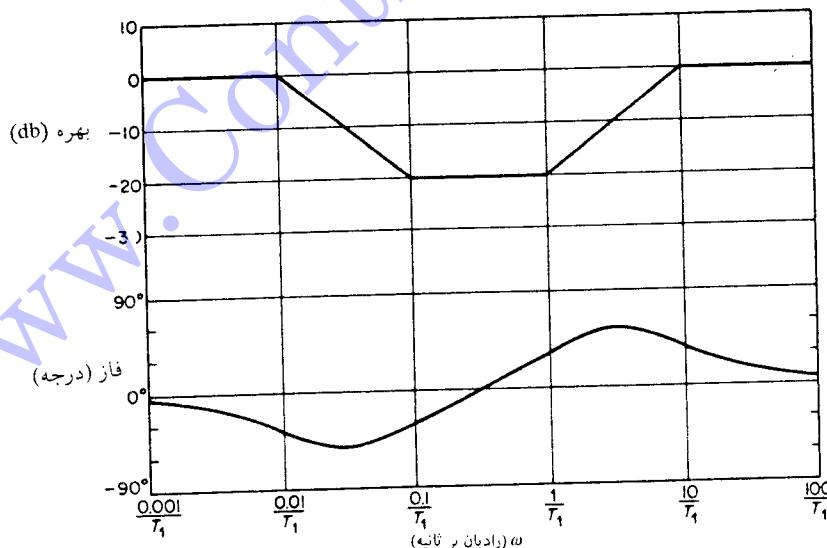
که در آن $\alpha < 1$ و $\beta > 1$. عبارت

$$\frac{s + 1/T_1}{s + 1/\alpha T_1} = \alpha \left(\frac{T_1 s + 1}{\alpha T_1 s + 1} \right) \quad (\alpha < 1)$$

اثر یک جبران ساز پیش فاز و عبارت

$$\frac{s + 1/T_2}{s + 1/\beta T_2} = \beta \left(\frac{\beta T_2 s + 1}{T_2 s + 1} \right) \quad (\beta > 1)$$

اثر یک جبران ساز پس فاز را دارد. نمودار بود جبران ساز پس - پیش فاز، برای $K_c = 1$ ، $T_2 = 10 T_1$ و $\alpha = \beta = 10$ در شکل ۱۰-۶ نشان داده شده است. توجه کنید که منحنی دامنه



شکل ۱۰-۶ نمودار بود جبران ساز پس - پیش فاز معادله (۱۰-۲-۶) برای $K_c = 1$ و $T_2 = 10 T_1$ و $\alpha = \beta = 10$

جبران ساز در فرکانس های پایین و بالا مقدار dB را اختیار می کند. اگر فرکانسی را که در آن زاویه فاز α است با ω نشان دهیم، همانطور که در شکل ۱۰-۶ نشان داده شده است، داریم

$$\log \omega_1 = \frac{1}{2} \left[\log \frac{\omega}{T_1} + \log \frac{1}{T_1} \right]$$

$$= \log \sqrt{\frac{\omega}{T_1}}$$

ولذا

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{\omega}}{T_1}$$

نمودار بود شکل ۱۰-۶، بین فرکانس های ω و ∞ به ترتیب همانند نمودار بود جبران ساز پس فاز و پیش فاز عمل می کند.

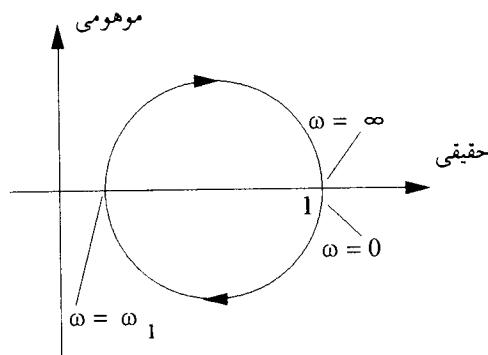
شکلهای ۱۱-۶ و ۱۲-۶ به ترتیب نمودارهای نایکوئیست و چارت نیکولز تابع تبدیل جبران ساز پس - پیش فاز را نشان می دهند. همانطور که در شکل ۱۱-۶ نیز نشان داده شده است، زاویه فاز جبران ساز پس - پیش فاز در ω صفر می شود. نمودار نایکوئیست نیز بین فرکانس های ω و ∞ به ترتیب همانند نمودارهای نایکوئیست جبران ساز پس فاز و پیش فاز عمل می کند.

۴-۲-۶ کنترل کننده های PD، PI و PID

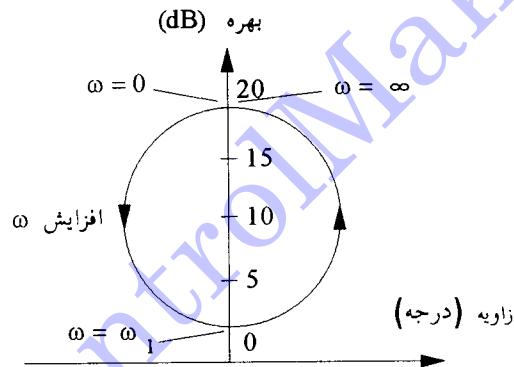
کنترل کننده PD. اگر در جبران ساز پیش فاز α را برابر صفر قرار دهیم (حالت ایده‌آل)، کنترل کننده تناسبی مشتقی^۱ یا PD را خواهیم داشت. تابع تبدیل کننده PD عبارتست از

$$G_C(s) = K_p + K_D s \quad (۱۴-۲-۶)$$

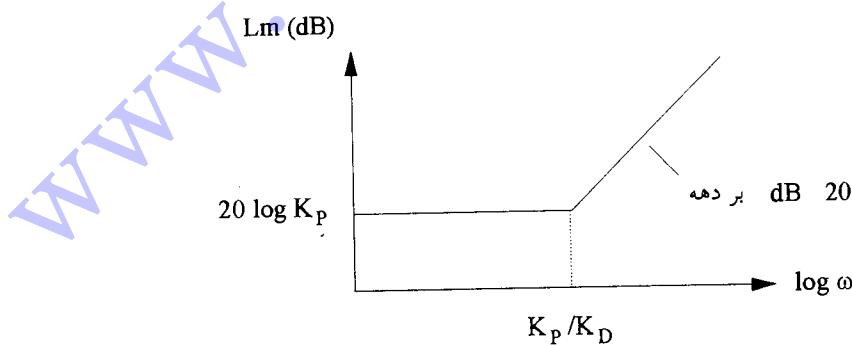
که در آن K_p و K_D را به ترتیب، بهره های تناسبی و مشتقی می نامند. نمودار بود این کنترل کننده در شکل ۱۳-۶ نشان داده شده است. فرکانس شکست نمودار در $\omega = K_p/K_D$ دارد. مقدار بهره K_p تا حدی تعیین کننده رفتار حالت ماندگار است و از آن برای بهبود رفتار



شکل ۱۱-۶ نمودار نایکرئیست جبران ساز پس - پیش فاز معادله (۱۰-۲-۶) برای $\frac{1}{\alpha} = \beta = 10$ و $K_c = 1$



شکل ۱۲-۶ چارت نیکولز جبران ساز پس - پیش فاز معادله (۱۰-۲-۶) برای $\frac{1}{\alpha} = \beta = 10$ و $K_c = 1$



شکل ۱۳-۶ نمودار برد کنترل کننده PD

حالت - ماندگار استفاده می‌کنند. کنترل کننده PD حاشیه فاز را افزایش می‌دهد و لذا می‌تواند پایداری سیستم را بهبود ببخشد. لیکن دامنه آن بعد از فرکانس K_p/K_D روند افزایشی داشته که باعث تشدید نویزهای فرکانس بالا می‌گردد (کنترل کننده PD به صورت یک فیلتر بالاگذر عمل می‌کند). با توجه به اینکه جبران ساز پیش فاز نیز به اندازه کافی پیش فاز فراهم می‌کند و حاشیه فاز را افزایش می‌دهد ولی برای محدوده فرکانس بالا دارای دامنه بسیار کوچکتری نسبت به کنترل کننده PD است، لذا جبران ساز پیش فاز بر کنترل کننده PD ترجیح داده می‌شود. کنترل کننده PD همانند جبران ساز پیش فاز رفتار گذرای پاسخ را بهبود می‌بخشد. با توجه به اینکه PD یک مشتق‌گیر خالص است، لذا تحقیق آن با عناصر RLC غیرفعال امکان‌پذیر نمی‌باشد.

زاویه فاز کنترل کننده PD برابر است با $\phi = \tan^{-1} \frac{\omega K_D}{K_p}$ ، که از 0° تا $+90^\circ$ تغییر پیدا می‌کند و همواره مثبت است.

کنترل کننده PI. با قرار دادن $\omega = \beta$ در جبران ساز پس فاز، این جبران ساز به سمت جبران ساز ایده‌آل تناسبی - انتگرال^۱ یا PI می‌پیماید خواهد کرد.تابع تبدیل کنترل کننده PI عبارتست از

$$G_c(s) = K_p + K_I/s \quad (15-2-6)$$

که در آن K_p و K_I به ترتیب بهره‌های تناسبی و انتگرال کنترل کننده می‌باشند. کنترل کننده PI یک صفر در $K_p = -K_I$ و یک قطب در $s = 0$ دارد. نمودار لگاریتمی دامنه کنترل کننده PI، در شکل ۱۵-۶ رسم شده است. بهره کنترل کننده PI در فرکانس صفر بی‌نهایت است، و این مشخصه‌هایی حالت - ماندگار را بهبود می‌بخشد. از طرف دیگر، کنترل کننده PI نوع سیستم جبران شده را یکی افزایش می‌دهد و لذا سیستم را به طرف ناپایداری سوق می‌دهد و حاشیه پایداری را کم می‌کند. بنابراین در انتخاب ضرایب K_p و K_I باید دقت کرد که پاسخ گذرا می‌گردد. بهره کنترل کننده PI نیز همانطور که در شکل ۱۵-۶ آمده است، یک فیلتر پایین گذراست و لذا فرکانس‌های بالا را تضعیف می‌کند و موجب کند شدن پاسخ گذرا می‌گردد. بهره کنترل کننده PI برای فرکانس‌های پایین بسیار بزرگ و برای فرکانس‌های بالا

مقدار ثابت $20 \log K_p$ می‌باشد. زاویه فاز یک کنترل کننده PI عبارتست از

$$\angle G_c(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega K_p}{K_I} - 90^\circ \quad (16-2-6)$$

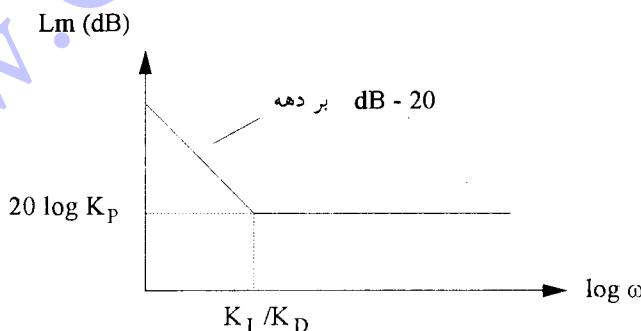
این زاویه فاز از -90° برای فرکانس $\omega = 0$ شروع می‌شود و تا 0° برای فرکانس‌های بالا $\omega \rightarrow \infty$ تغییر پیدا می‌کند و لذا همواره منفی است.

کنترل کننده PID، کنترل کننده PD برای سود جستن از مزایای یک کنترل کننده PI و PD طراحی شده است. می‌توان گفت که هیچ کنترل کننده‌ای در صنعت به اندازه کنترل کننده PID مورد استفاده قرار نگرفته است.تابع تبدیل کنترل کننده PID عبارتست از

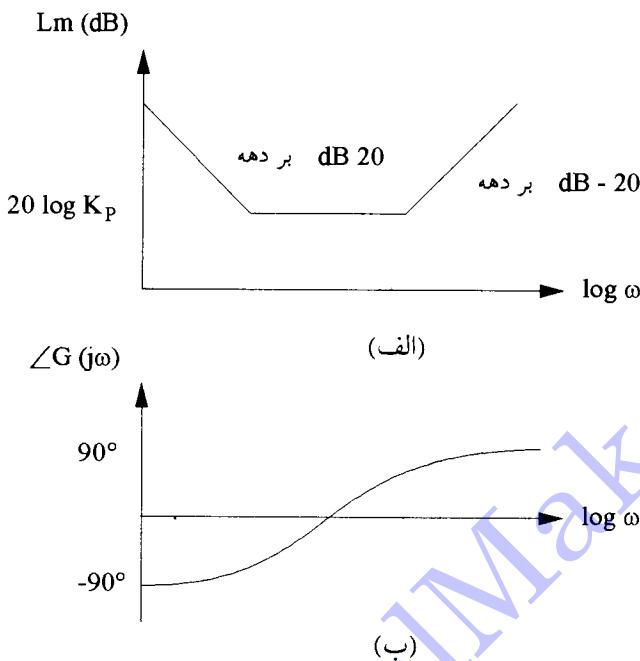
$$G_c(s) = K_p + K_I/s + K_D s \quad (17-2-6)$$

که در آن K_p بهره تناسبی، K_I بهره انتگرال و K_D بهره مشتقی است. تحقق فیزیکی این کنترل کننده توسط یک مدار الکتریکی امکان‌پذیر است. شکل ۱۵-۶ نمودار بود کنترل کننده PID را نشان می‌دهد. همانطور که مشخص است کنترل کننده PID یک کنترل کننده پس - پیش فاز است و همانند یک جبران ساز پس - پیش فاز باید در تنظیم پارامترهای کنترل کننده دقت کرد و افزایش بیش از اندازه آنها ممکن است به ناپایداری سیستم حلقه - بسته منجر گردد.

تنظیم پارامترهای کنترل کننده‌های PID. مهم‌ترین مسئله در استفاده بهینه از کنترل کننده‌های PID، تنظیم مناسب پارامترهای آنها K_p ، K_I و K_D است. روش‌های مختلفی برای



شکل ۱۴-۶ نمودار لگاریتم دامنه کنترل کننده PI



شکل ۱۵-۶ نمودار بود یک کنترل کننده PID. (الف) منحنی دامنه (ب) منحنی فاز

تنظیم این پارامترها پیشنهاد شده است. قواعد زیگلر و نیکولز^۱ از جمله این روشها هستند. در این کتاب به ارایه و بررسی این روشها نمی‌پردازیم. لیکن خواننده می‌تواند با مراجعه به بخش کتابشناسی همین فصل، با مراجعه به منابع داده شده، از روش‌های کلاسیک زیگلر و نیکولز تا کاربرد سیستم‌های هوشمند^۲ را ملاحظه و بررسی نماید.

۳-۶ طراحی جبران سازها با استفاده از مکان ریشه

در فصل چهارم، با نحوه ترسیم مکان ریشه آشنا شدیم. نمودارهای مکان ریشه رابطه بین بهره سیستم و پاسخ زمانی آن را نشان می‌دهند (محل قطب‌های حلقه - بسته). در واقع هنگامیکه مشخصه‌های عملکرد مطلوب سیستمی بر حسب کمیتهای حوزه زمانی، مانند مقدار فرجهش حد اکثر، زمان ستیغ، زمان استقرار، نسبت میرایی و فرکانس طبیعی غیر میرای

قطبهای غالب حلقه - بسته، ثابت زمانی و خطاهای حالت - ماندگار بیان شده باشد، مکان ریشه روش بسیار مؤثر و قوی برای جبران کردن سیستم حلقه - باز و رسیدن به مشخصه های عملکرد تعیین شده در سیستم حلقه - بسته است.

اگر سیستمی به ازاء کلیه مقادیر بهره K ناپایدار باشد و یا اینکه به ازاء کلیه مقادیر بهره K ، پاسخ آن مشخصه های نامطلوبی داشته باشد، بدیهی است که با تغییر K به تنهایی نمی توان به مشخصه های مطلوب عملکرد دست پیدا کرد. در این صورت باید با تغییر شکل دادن نمودار مکان ریشه سیستم توسط جبران سازه ای مناسب، به مشخصه های عملکرد مطلوب تعیین شده رسید.

به طور کلی، یکی از موارد زیر می تواند دلیل مناسبی برای تغییر مکان ریشه سیستم توسط طراح باشد:

۱- سیستم داده شده به ازاء کلیه بهره ها ناپایدار است، برای پایدار سازی باید مکان ریشه به گونه ای تغییر شکل داده شود تا قسمتی از هر کدام از شاخه ها در سمت چپ صفحه ۵ قرار گیرند و سیستم پایدار گردد.

۲- سیستم داده شده پایدار است، لیکن پاسخ گذرای آن مطلوب نیست. در این حالت می توان مکان ریشه را به گونه ای تغییر داد که دورتر از محور موهومی، به سمت چپ در صفحه ۵ انتقال داده شود.

۳- سیستم داده شده پایدار است، پاسخ گذرای آن نیز مناسب می باشد، لیکن خطای حالت - ماندگار بسیار بزرگی دارد. در این حالت باید با افزایش بهره، خطای حالت - ماندگار را کاهش داد. توجه کنید که افزایش بهره باید بدون کاهش پایداری سیستم به مقدار قابل ملاحظه ای صورت گیرد.

۴- سیستم داده شده پایدار است، لیکن پاسخ گذرا و خطای حالت - ماندگار آن مناسب نمی باشند. در این حالت باید ضمن انتقال مکان ریشه به سمت چپ در صفحه ۵، بهره سیستم را نیز افزایش داد.

قبل از آنکه به تشریح طراحی با جبران سازه ای دینامیکی بپردازیم، با یک مثال نشان خواهیم داد که در برخی از موارد، رسیدن به عملکرد تعیین شده سیستم حلقه - بسته توسط تغییر بهره حلقه - باز K به تنهایی امکان پذیر است. بدیهی است که اگر بتوان به اهداف طراحی با یک آمپلی فایر ساده و تغییر بهره دست پیدا کرد، طراحی جبران سازه ای دینامیکی که موجب پیچیده تر شدن سیستم می گردد، لزومی نخواهد داشت.

مثال ۱-۶

تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی عبارتست از

$$G(s) = \frac{K}{s(s+\zeta)}$$

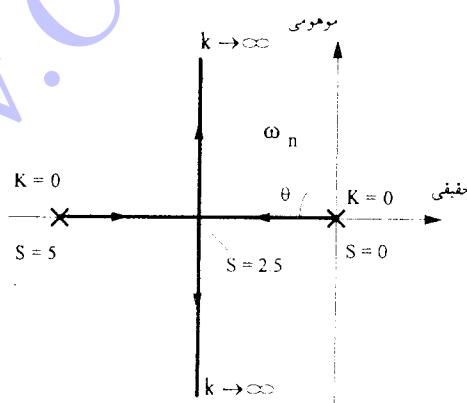
مطلوب است که سیستم حلقه - بسته در پاسخ به ورودی شیب واحد بیش از ۳۳٪ خطای حالت - ماندگار نداشته و در پاسخ به ورودی پله فراجهش حداقل خروجی سیستم بیش از ۱۰٪ نباشد. مکان ریشه تابع تبدیل در شکل ۱۶-۶ رسم شده است. از مقایسه تابع تبدیل سیستم حلقه - بسته با تابع تبدیل استاندارد مرتبه دوم داریم $\omega_n = 5$ و $\zeta = K/2\omega_n = 5/2\cdot 5 = 1/2$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

برای آنکه سیستم درجه دوم حلقه - بسته، در پاسخ به ورودی پله واحد حداقل ۱۰٪ فرجهش داشته باشد، از شکل ۱۶-۳ داریم که $\theta = 45^\circ$. توجه کنید که دو ریشه حلقه - بسته با توجه به شکل ۱۶-۶، عبارتند از، $s = -2/5 \pm j\beta$ ، که در آن $\beta = -2/5 + \omega_n = -2/5 + 5 = 1/5$ و همچنین ω_n از آنجاییکه $\omega_n = \sqrt{K}/2$ ، داریم که $\cos\theta = \cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$. لذا برای $\theta = 45^\circ$ بدست می‌آوریم

$$\theta = 45^\circ / 13^\circ, \quad \omega_n = 4/167, \quad \beta = 3/33, \quad K = 17/36$$

برای هر $K > 17/36$ و $\omega_n < 4/167$ ، $\theta < 45^\circ$ و $K < 17/36$. بنابراین برای K در محدوده $17/36 < K < 17/36 + 10\%$ حداقل فراجهش تا ۱۰٪ پله واحد خواهد بود.



شکل ۱۶-۶ نمودار مکان ریشه تابع تبدیل مثال ۱-۶

برای برآورده کردن دو مبنی مشخصه عملکرد، حداقل خطای حالت - ماندگار به ورودی شبیب واحد ۰.۳۳٪، نخست داریم که خطای حالت - ماندگار به ورودی شبیب واحد عبارتست از $K_r = K/5$ (بخش ۳-۶)، که در آن $sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = K_r$ ، و به عبارت دیگر برای خطای ۰.۳۳٪، $K_r = K/5 > ۱۵$ ، از اینرو، می‌توان یک بهره حلقه - باز K را چنان انتخاب کرد تا هر دو شرط طراحی را برآورده سازد. به عبارت دیگر با انتخاب بهره $K < ۱۷/۳۶$ می‌توان شرایط فراجهش حداقل در پاسخ به ورودی پله واحد و دقت خطای حالت - ماندگار به ورودی شبیب واحد را برآورده ساخت.

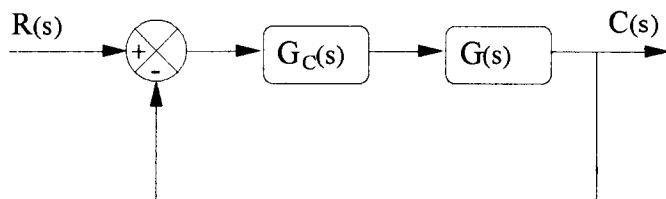
توجه کنید که اگر بخواهیم دقت پاسخ سیستم به ورودی شبیب واحد را بالا ببریم و برای مثال حداقل ۰.۵٪ خطای حالت - ماندگار مجاز باشد، خواهیم داشت $K_r = K/5 > ۲۰$ ،

بدیهی است که در این حالت برآورده ساختن همزمان $K < ۱۷/۳۶$ و $K < ۲۰$ امکان پذیر نیست. در این چنین حالتی با تغییر بهره حلقه - باز K به تنهایی، نمی‌توان به مشخصه‌های طراحی دست پیدا کرد و بکارگیری جبران سازهای دینامیکی الزامی است.

۱-۳-۶ طراحی جبران سازهای پیش فاز با استفاده از مکان ریشه
اگر سیستم حلقه - باز به ازاء کلیه مقادیر بهره ناپایدار باشد و یا اینکه پایدار باشد لیکن مشخصه‌های پاسخ گذرای آن نامطلوب باشند، در هر دو حالت جبران ساز پیش فاز برای جبران سری سیستم حلقه - بسته و بدست آوردن پایداری و یا مشخصه‌های مطلوب پاسخ گذرا مناسب است.

مراحل طراحی یک جبران ساز پیش فاز برای سیستم نشان داده شده در شکل ۱۷-۶، توسط مکان ریشه را می‌توان به صورت خلاصه زیر بیان کرد:

- ۱- با استفاده از روابط داده شده در بخش ۴-۴، از مشخصات عملکرد داده شده موقعیت قطب‌های غالب حلقه - بسته را تعیین کنید.



شکل ۱۷-۶ سیستم کنترل

- ۲- نمودار مکان ریشه سیستم حلقه - باز را رسم کنید. با استفاده از نمودار مکان ریشه، تعیین کنید که آیا با تنظیم بهره حلقه - باز به تنهایی می‌توان به موقعیت قطبهای حلقه - بسته رسید یا خیر. در صورتیکه تنظیم بهره به تنهایی کافی نیست، نقص زاویه^۱ ϕ را محاسبه کنید. برای تعیین نقص زاویه، نخست مجموع زوایای یکی از قطبهای غالب حلقه - بسته مطلوب (قطبهای که باید معادله مشخصه سیستم حلقه - بسته مطلوب را تشکیل دهند)، با قطبها و صفرهای حلقه - باز سیستم اصلی را بدست آورید. از شرط زاویه داریم، برای آنکه قطب غالب حلقه - بسته مطلوب بروی مکان ریشه سیستم قرار گیرد، باید مجموع زوایای قطبها و صفرهای حلقه - باز سیستم اصلی $(180^\circ + 2k\pi) \pm 180^\circ$ باشد. نقص زاویه ϕ زاویه لازمی است که باید با مجموع بدست آمده جمع گردد تا حاصل جمع برابر با $(180^\circ + 2k\pi) \pm 180^\circ$ شود. این زاویه توسط جبران ساز پیش فاز فراهم آورده می‌شود.
- ۳-تابع تبدیل جبران ساز پیش فاز عبارتست از

$$G_C(s) = K_C \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_C \frac{s + 1/T}{s + 1/\alpha T} \quad (1-3-6)$$

که در آن α و T از نقص زاویه تعیین می‌گردند. توجه کنید که مقادیر مناسب α و T جهت فراهم کردن نقص زاویه منحصر بفرد نمی‌باشند. بهره K_C از شرط دامنه تعیین می‌گردد. به عبارت دیگر، از شرط دامنه داریم

$$\left| K_C \frac{s + 1/T}{s + 1/\alpha T} G(s) \right| = 1 \quad (2-3-6)$$

$s =$ نقطه مصوب

- لذا با جایگزینی قطب غالب حلقه - بسته، مقدار مناسب بهره K_C بدست خواهد آمد.
- ۴- دقت کنید که اگر مقدار خاصی برای ثابت خطای استاتیکی تعیین شده باشد، معمولاً استفاده از روش‌های پاسخ فرکانسی ساده‌تر خواهد بود. در صورتیکه ثابت‌های خطای استاتیکی مشخص نشده باشند، موقعیت قطب و صفر جبران ساز به گونه‌ای تعیین می‌شوند که زاویه لازم ϕ را بدست دهند. اگر مشخصه دیگری برای عملکرد در نظر

گرفته نشده باشد، مطلوب است که مقدار α حتی الامکان بزرگ باشد. یک مقدار بزرگتر α عموماً مقدار بزرگتری از K را می‌دهد.

پس از طراحی جبران ساز باید با شبیه‌سازی کامپیوتروی یا انجام محاسبات مناسب، از برآورده شدن کلیه مشخصه‌های عملکرد اطمینان حاصل شود. در صورتیکه سیستم جبران شده مشخصه‌های عملکرد را برآورده ننماید، مراحل طراحی باید با تنظیم قطب و صفر جبران ساز دوباره تکرار شوند تا نتیجه مناسب بدست آورده شود. اگر یک ثابت خطای استاتیک بزرگ مورد نظر باشد، می‌توان از یک جبران ساز سری پس فاز یا تغییر جبران ساز به یک جبران ساز پس-پیش فاز استفاده کرد.

مثال ۲-۶

سیستم نشان داده شده در شکل ۱۷-۶ را در نظر بگیرید.تابع تبدیل سیستم حلقه - باز عبارتست از

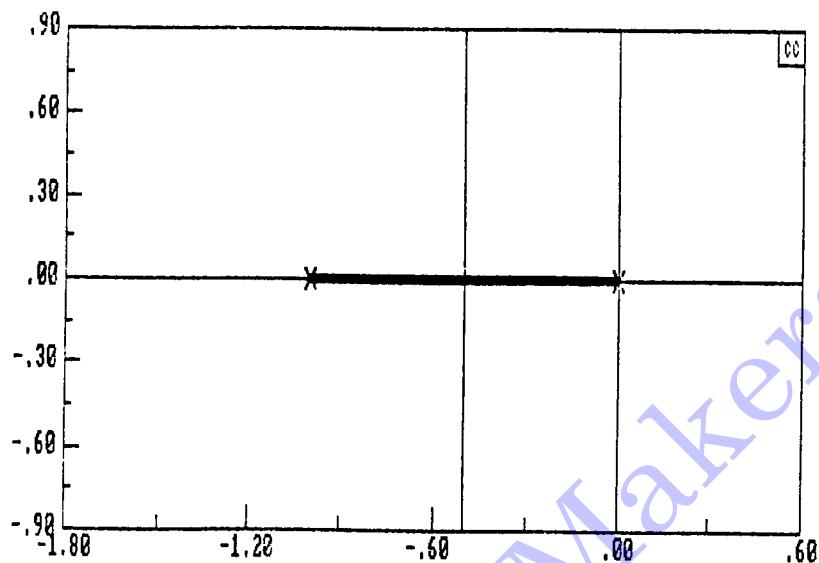
$$G(s) = \frac{0/2}{s(s+1)}$$

تابع تبدیل سیستم حلقه - بسته (بدون جبران ساز) عبارتست از

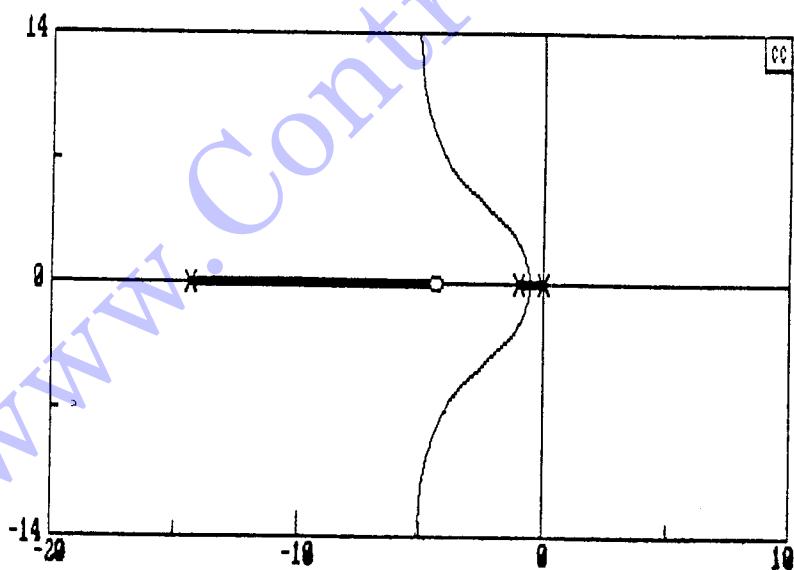
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{0/2}{s^2 + s + 0/2}$$

قطبهای حلقه - بسته سیستم در $s = -0/0$ و $-0/2764$ قرار دارند. مکان ریشه سیستم جبران نشده نیز در شکل ۱۸-۶ رسم شده است. با توجه به موقعیت قطبهای حلقه - بسته و نمودار مکان ریشه، بدینهی است که پاسخ سیستم بسیار کند است. پاسخ زمانی سیستم برای ورودی پله واحد در شکل ۲۰-۶ رسم شده است. همانطور که از شکل ۲۰-۶ مشاهده می‌شود، پاسخ سیستم پس از گذشت ۱۰ ثانیه به پله واحد نرسیده است. از شکل ۱۸-۶ داریم که با افزایش بعده به تنهایی نمی‌توان تغییر اساسی در رفتار سیستم حلقه - بسته ایجاد کرد. برای سرعت بخشیدن به پاسخ (بهبود رفتار پاسخ حالت گذراي سیستم حلقه - بسته)، مشخصه‌های عملکرد زیر را برای رفتار حلقه - بسته پاسخ تعیین می‌کنیم

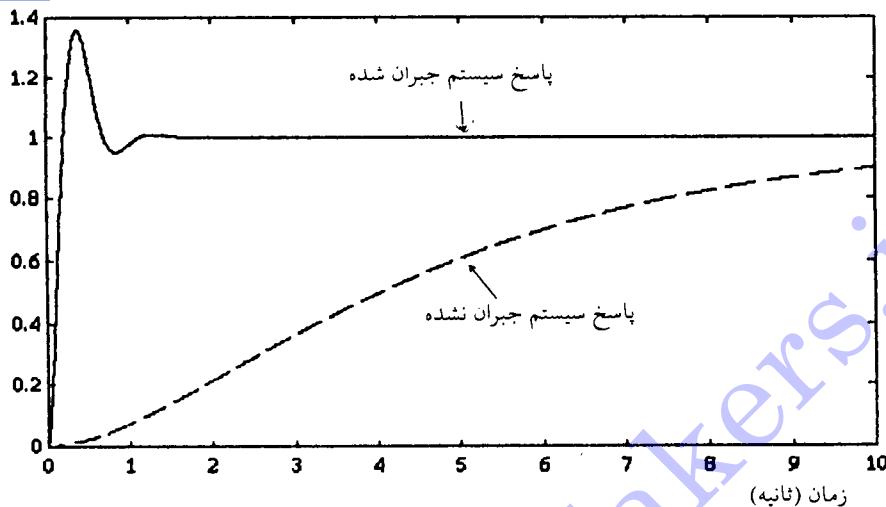
$$1 \leq \zeta \leq 5, (\text{ثانیه})$$



شکل ۱۸-۶ مکان ریشه سیستم جبران نشده مثال ۲-۶.



شکل ۱۹-۶ مکان ریشه سیستم جبران شده



شکل ۲۰-۶ پاسخ سیستم‌های جبران شده و جبران نشده مثال ۲-۶ به ورودی پله.

قطبهای سیستم حلقه - بسته، برای برآورده ساختن این مشخصه‌های عملکرد عبارتند از $4 \pm j6/93$. برای تغییر مسیر نمودار مکان ریشه به گونه‌ای که از این قطبها عبور کند، جبران ساز پیش فازی طراحی خواهیم نمود. (دقت کنید که در این مثال با افزایش بهره به تنها یکی، نمودار ریشه از این قطبها عبور نخواهد کرد). برای تعیین جبران ساز پیش فاز، زاویه لازم ϕ جهت افزودن به مجموع زوایای قطبها و صفرهای حلقه - باز با یکی از قطبها غالب حلقه - بسته مطلوب را پیدا می‌کنیم. مجموع این زوایا و زاویه ϕ باید $180^\circ + (2k+1)$ باشد. در سیستم فعلی، زاویه $\phi(s)$ در قطب حلقه - بسته مطلوب عبارتست از

$$\frac{4/j}{s(s+1)} = 126/6^\circ$$

$$s = -4 \mp j6/93$$

از اینرو، جبران ساز پیش فاز باید زاویه $53/4^\circ$ را در این نقطه فراهم آورد. موقعیت قطب و صفری که این زاویه را فراهم آورند، منحصر بفرد نیست. یک جبران ساز مناسب (که با سعی و خطاب بدست آمده است) عبارتست از

$$G_c(s) = \frac{K_c(s+4/4)}{s+14/54}$$

تابع تبدیل حلقه - باز سیستم جبران شده عبارتست از

$$G_c(s)G(s) = \frac{K_c(s+4/4)}{(s+14/54)} \cdot \frac{0/2}{s(s+1)}$$

با استفاده از شرط دامنه $|G_c(s)G(s)|$ در قطب مورد نظر باید یک باشد، بهره K_c برابر با ۵۵۰ بسته خواهد آمد. مکان ریشه سیستم جبران شده در شکل ۱۹-۶ رسم شده است. همانطور پاسخ زمانی سیستم حلقه - بسته نیز به ورودی پله در شکل ۲۰-۶ رسم شده است. همانطور که در شکل ۲۰-۶ مشاهده می شود، سیستم حلقه - بسته مشخصه های عملکرد مورد نظر را برآورده می سازد.

۲-۳-۶ طراحی جبران سازهای پس فاز با استفاده از مکان ریشه

در موقعیکه مشخصه های پاسخ گذرا سیستم مناسب است ولی پاسخ حالت دایه آن مطلوب نیست، از جبران ساز پس فاز استفاده می کنیم. در این حالت، جبران سازی با افزایش بهره حلقه - باز بدون تغییر قابل توجهی در مشخصه پاسخ گذرا انجام می گیرد. لذا مکان ریشه در نزدیکی قطب های غالب حلقه - بسته باید زیاد تغییری پیدا کند. لیکن بهره حلقه - باز باید حتی الامکان تا مقداری که مورد نیاز است افزایش یابد. این جبران سازی با اعمال یک جبران ساز پس فاز سری با تابع تبدیل حلقه - باز بسته می آید.

برای آنکه تغییر شکل قابل توجهی در نمودار مکان ریشه رخ ندهد، سهم زاویه جبران ساز پس فاز باید مقدار کوچکی مانند 5° باشد. از اینرو قطب و صفر جبران ساز پس فاز را نزدیک هم و نزدیک مبدأ صفحه دفرا می دهیم. در این صورت قطب های حلقه - بسته سیستم جبران شده، تنها به مقدار کمی از موقعیتهای اصلی خود حرکت خواهند کرد و مشخصه های پاسخ گذرا تغییر محسوسی نخواهند کرد.

تابع تبدیل جبران ساز پس فاز عبارتست از

$$G_c(s) = K_c \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = K_c \frac{s + 1/T}{s + 1/(\beta T)} \quad (3-3-6)$$

اگر قطب و صفر جبران ساز داده شده با معادله (۳-۳-۶) را بسیار نزدیک هم قرار دهیم، آنگاه در $s=0$ که در آن s یکی از قطب های غالب حلقه - بسته است، اندازه های $(1/T) + \beta$ و

$s + 1/\beta T$ تقریباً یکسان هستند. لذا از معادله (۴-۳-۶)، داریم

$$|G_c(s_1)| = \left| K_c \frac{s_1 + 1/T}{s_1 + 1/(\beta T)} \right| \approx K_c$$

بنابراین اگر بهره K_c را برابر یک انتخاب کنیم، مشخصه‌های پاسخ گذار تغییر نخواهد کرد و بهره کلی سیستم حلقه - باز با عامل β ، که در آن $> \beta$ ، افزایش خواهد یافت. اگر قطب و صفر جبران ساز نزدیک مبداء قرار داده شوند، آنگاه مقدار β را می‌توان بزرگ کرد و مقدار T نیز باید بزرگ انتخاب شود، ولی مقدار دقیق آن چندان مهم نیست. در هر حال مقادیر T و β باید به گونه‌ای انتخاب شوند که تحقق فیزیکی جبران ساز امکان پذیر باشد یک گستره مناسب برای مقدار β می‌تواند $15 < \beta < 100$ باشد و مقادیر β و T بحسب مورد و سیستم تحت کنترل، با سعی و خطاب دست آورده می‌شوند.

دقت کنید که افزایش بهره باعث کاهش خطای حالت - ماندگار و به عبارت دیگر افزایش ثابت‌های خطای استاتیکی می‌شود. برای سیستم جبران نشده $G(s)$ و جبران ساز سری $G_c(s)$ داده شده با معادله (۴-۳-۶)، از بخش ۴-۳-۶ داریم که ثابت خطای حالت - ماندگار سرعت، برای تابع تبدیل حلقه - باز $G(s)$ و $G_c(s)G(s)$ به ترتیب عبارتست از

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) \quad (4-3-6)$$

$$\hat{K}_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s)G(s) \quad (5-3-6)$$

با جایگزینی معادله (۴-۳-۶) در معادله (۵-۳-۶)، داریم

$$\begin{aligned} \hat{K}_v &= \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s) K_v \\ &= K_c \beta K_v \end{aligned} \quad (6-3-6)$$

با توجه به اینکه مقدار K_c تقریباً برابر با یک انتخاب می‌شود، خطای حالت - ماندگار به ورودی شبیب واحد برابر است با

$$1/\hat{K}_v = 1/(\beta K_v)$$

لذا با افزایش β ، خطای حالت - ماندگار کاهش خواهد یافت.

با فرض اینکه سیستم جبران نشده با تنظیم بهره مشخصه‌های پاسخ گذاری مناسبی

خواهد داشت، مراحل طراحی یک جبران ساز پس فاز برای سیستم نشان داده شده در شکل ۱۷-۶، توسط مکان ریشه را می‌توان به صورت خلاصه زیر بیان کرد:

۱- نمودار مکان ریشه سیستم جبران نشده با تابع تبدیل حلقه - باز ($G(s)$) را رسم کنید.

براساس مشخصه‌های پاسخ گذرا، قطب‌های غالب حلقه - بسته را بروی مکان ریشه جایابی کنید.

۲- تابع تبدیل جبران ساز پس فاز را به صورت داده شده با معادله (۳-۶)، در نظر بگیرید.

۳- با مشخص نمودن ثابت خطای استاتیکی مورد نظر سیستم حلقه - بسته، مقدار افزایش لازم در ثابت خطای استاتیکی را برای برآورده ساختن مشخصه‌ها تعیین کنید. این میزان افزایش توسط عامل β در معادله (۶-۳-۶)، فراهم می‌شود.

۴- با انتخاب β ، موقعیت قطب و صفر جبران ساز پس فاز که افزایش لازم در ثابت خطای استاتیکی معین شده را بدون تغییر قابل توجهی در مکان ریشه اصلی بدست می‌دهد، تعیین کنید. توجه کنید که سهم زاویه جبران ساز پس فاز نباید زیاد باشد و یک قاعده‌سازانگشتی آن است که این زاویه از حد اکثر 7° تجاوز نکند.

۵- نمودار مکان ریشه سیستم جبران شده را رسم کنید. اگر سهم زاویه ناشی از جبران ساز پس فاز زیاد نباشد، نمودار مکان ریشه سیستم جبران شده و جبران نشده تقریباً یکسان خواهند بود. در غیر اینصورت، اندک تفاوتی در دو نمودار پیدا می‌شود و قطب‌های غالب حلقه - بسته مطلوب جدید را براساس مشخصه‌های پاسخ فرکانسی، مشخص کرده و بروی نمودار مکان ریشه سیستم جبران شده جایابی کنید.

۶- با توجه به اینکه قطب‌های غالب حلقه - بسته باید بروی مکان ریشه قرار گیرند، از شرط دامنه بهره جبران ساز K را بدست آورید.

مثال ۳-۶

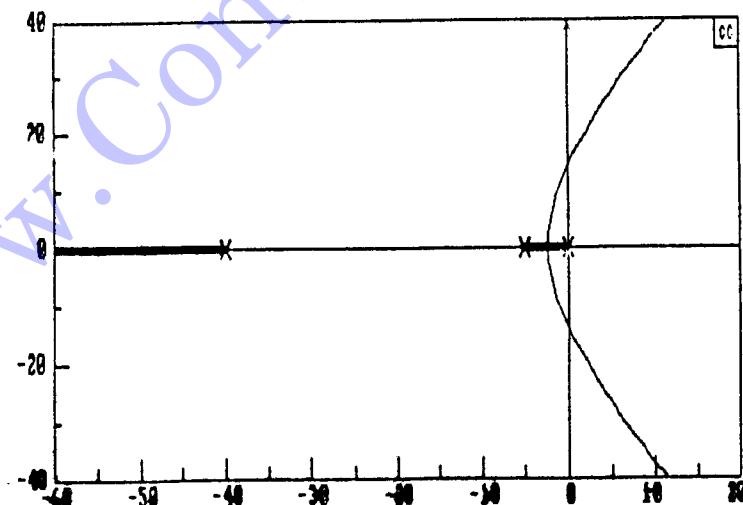
تابع تبدیل حلقه - باز سیستم نشان داده شده در شکل ۱۷-۶ عبارتست از

$$G(s) = \frac{45}{s(s+5)(s+40)}$$

تابع تبدیل سیستم حلقه - بسته جبران نشده (با فیدبک واحد در شکل ۲۱-۶) به صورت زیر است

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{450}{s^3 + 45s^2 + 20s + 450}$$

قطبهای غالب حلقه - بسته، عبارتند از $\pm j\sqrt{2}/3826 \pm j2/3440$ و یک قطب حلقه - بسته نیز در $-40/3161$ قرار دارد. فرکانس طبیعی غیر میرایی $\omega_n = 3/25$ (رادیان بر ثانیه) و $\zeta = 0.7$. ثابت خطای سرعت استاتیکی سیستم (که نشان دهنده رفتار حالت - ماندگار سیستم در پاسخ به ورودی شبی است) $K_v = 2/25$ است. با توجه به موقعیت قطبها غالب حلقه - بسته، پاسخ سیستم جبران نشده زمان استقراری کمتر از ۲ ثانیه و نسبت میرایی قطبها نیز مقدار مناسبی دارد. لیکن مقدار ثابت خطای سرعت استاتیکی بسیار کم می‌باشد و مقدار مطلوب آن حداقل حدوداً ۱۰ برابر مقدار جبران نشده آن می‌باشد. به عبارت دیگر، پاسخ گذرای سیستم جبران نشده مطلوب است ولی برای بهبود پاسخ حالت - ماندگار آن به یک جبران ساز نیاز است. با توجه به رفتار مناسب حالت گذرای پاسخ، جبران ساز نباید موقعیت قطبها غالب حلقه - بسته را تغییر زیادی دهد. نمودار مکان ریشه سیستم جبران نشده در شکل ۲۱-۶، نشان داده شده است.



شکل ۲۱-۶ نمودار مکان ریشه سیستم جبران نشده مثال ۳-۶ -

برای برآورده ساختن این مشخصه‌ها، یک جبران ساز پس فاز به طور سری (همانطور که در شکل ۶-۱۷ نشان داده شده است) برای سیستم طراحی می‌کنیم. برای افزایش ثابت خطای سرعت استاتیکی به میزان $10 \times$ برابر، β را برابر 10 انتخاب می‌کنیم و صفر و قطب جبران ساز پس فاز را به ترتیب در $s = -0.1$ و $s = -0.1$ قرار می‌دهیم. از این‌رو تابع تبدیل جبران ساز به صورت زیر داده می‌شود

$$G_c(s) = K_c \frac{s + 0.1}{s + 0.1}$$

سهم زاویه‌ای این جبران ساز در نزدیکی یک قطب غالب حلقه - بسته، حدوداً هشت درجه است و لذا تغییر جزیی در نمودار مکان ریشه حلقه - بسته در نزدیکی قطبهای غالب حلقه - بسته پدید خواهد آمد.

تابع تبدیل حلقه - باز سیستم جبران شده عبارتست از

$$\begin{aligned} G_c(s)G(s) &= K_c \frac{s + 0.1}{s + 0.1} \frac{40}{s(s+5)(s+40)} \\ &= \frac{40K_c(s + 0.1)}{s(s+0.1)(s+5)(s+40)} \end{aligned}$$

نمودار مکان سیستم جبران شده در شکل ۶-۲۲ نشان داده شده است. با فرض $K_c = 5$ برای قطبهای غالب حلقه - بسته، این قطبهای در $s = -2/3 \pm j2/6$ قرار خواهند گرفت. برای تعیین بهره جبران ساز، از شرط دامنه داریم

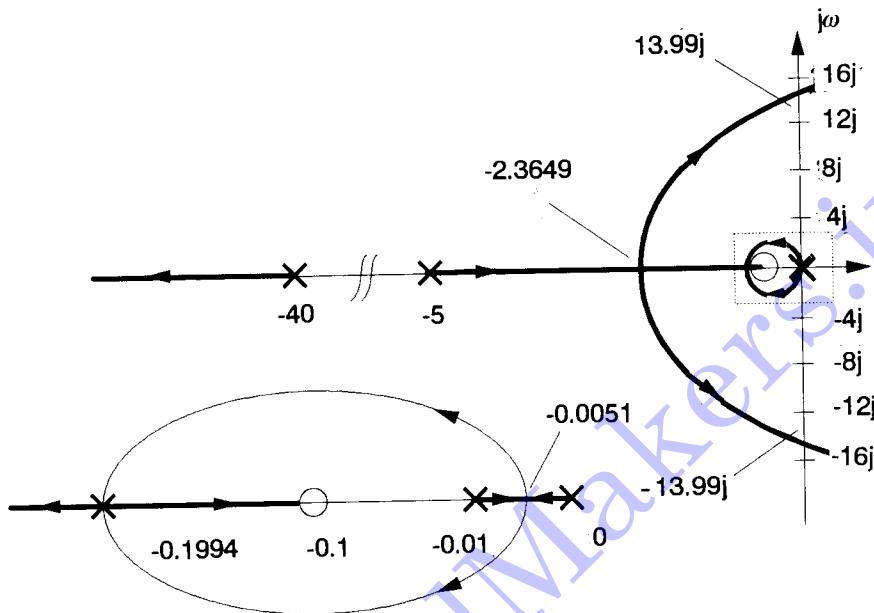
$$\begin{aligned} K_c &= \frac{1}{40} \left| \frac{s(s+0.1)(s+5)(s+40)}{s+0.1} \right| \Big|_{s = -2/3 \pm j2/6} \\ &= 1/1 \end{aligned}$$

بنابراین، تابع تبدیل جبران ساز پس فاز عبارتست از

$$G_c(s) = 1/1 \frac{s + 0.1}{s + 0.1}$$

و تابع تبدیل حلقه - باز سیستم جبران شده عبارتست از

$$G_c(s)G(s) = \frac{50.3(s + 0.1)}{s(s+0.1)(s+5)(s+40)}$$



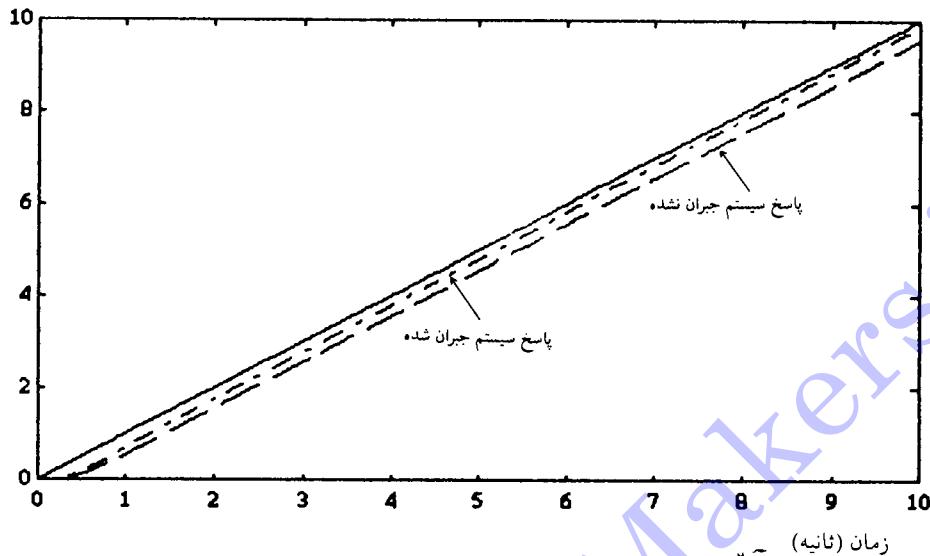
شکل ۲۲-۶ نمودار مکان ریشه سیستم جبران شده در مثال ۳-۶.

ثابت خطای سرعت استاتیکی K_v برابر است با

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s)G(s) = 25/15$$

در سیستم جبران شده، ثابت خطای سرعت استاتیکی از $2/25$ (ثانیه) به $1/15$ (ثانیه) افزایش یافته است و لذا خطای حالت - ماندگار در پاسخ به ورودی شبیب، به مقدار قابل ملاحظه‌ای کاهش خواهد یافت. اگر بخواهیم ثابت خطای سرعت استاتیکی دقیقاً $22/5$ باشد (ده برابر مقدار جبران نشده)، می‌توان محل قطب و صفر جبران ساز را تغییر داد و یا اینکه بهره جبران ساز را به $K_c = 1$ کاهش دهیم، لیکن در این صورت نسبت میرایی قطب‌های حلقه - بسته نیز اندکی کاهش خواهد یافت.

پاسخ زمانی شبیب واحد سیستم جبران شده و جبران نشده در شکل ۲۳-۶ نشان داده شده است. همانطور که از پاسخ مشاهده می‌گردد، خطای حالت ماندگار سیستم جبران شده به میزان قابل توجهی کاهش نشان می‌دهد.



شکل ۲۳-۶ پاسخ زمانی سیستم حلقه - بسته جبران شده و جبران نشده به ورودی شیب واحد

۳-۳-۶ طراحی جبران سازهای پس - پیش فاز با استفاده از مکان ریشه

تابع تبدیل جبران ساز پس - پیش فاز عبارتست از

$$G(s) = K_c \beta \alpha \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{(T_1 \alpha s + 1)(\beta T_2 s + 1)} = K_c \left(\frac{s + 1/T_1}{s + 1/\alpha T_1} \right) \left(\frac{s + 1/T_2}{s + 1/\beta T_2} \right) \quad (7-3-6)$$

که در آن $\alpha > 0$ و $\beta > 0$. در مواردی که هر دو پاسخ گذراي سیستم و حالت - ماندگار آن نياز به جبران سازی داشته باشند، هيچگدام از دو جبران ساز پس فاز و پیش فاز به تنهايی جوابگوی مسئله طراحی نخواهد بود. در اين صورت باید از جبران ساز پس - پیش فاز داده شده با معادله (7-3-6) استفاده کرد. اين جبران ساز مشخصه های هر دو جبران ساز نامبرده را دارا است. همانطور که از معادله (7-3-6) مشاهده می شود، دو پارامتر مهم طراحی در اين جبران ساز α و β هستند (متناظر با پارامترهای α و β در جبران سازهای پیش و پس فاز). در اینجا مراحل طراحی جبران سازهای پس - پیش فاز را با استفاده از مکان ریشه در دو حالت $\alpha = \beta$ و $\alpha \neq \beta$ ، ارایه می کنیم.

حالت اول: $\alpha^{-1} \neq \beta$

۱- موقعیت قطب‌های غالب حلقه - بسته را براساس مشخصه‌های عملکرد داده شده، تعیین کنید.

۲- با رسم نمودار مکان ریشه سیستم حلقه - باز داده شده با $(s)G$ و یا با انجام محاسبات لازم، نقص زاویه ϕ را برای آنکه قطب‌های حلقه - بسته در مکانهای مطلوب باشند، تعیین کنید.

۳- قسمت پیش فاز جبران ساز داده شده با معادله (۶-۳-۶)، باید این نقص زاویه را جبران کند. لذا T_1 و α را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که

$$\angle[(s_1 + 1/T_1)/(s_1 + 1/\alpha T_1)] = \phi$$

که در آن ϕ پکی از قطب‌های غالب حلقه - بسته است. توجه کنید که انتخاب T_1 و α منحصر بفرد نیست. سپس بهره K_c را از شرط دامنه تعیین کنید:

$$\left| K_c \frac{s_1 + 1/T_1}{s_1 + 1/\alpha T_1} G(s_1) \right| = 1$$

۴- مقدار β از ثابت خطای سرعت K_v تعیین می‌گردد. با مشخص نمودن ثابت خطای سرعت K_v ، داریم

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s K_c \left(\frac{s + 1/T_1}{s + 1/(\alpha T_1)} \right) \left(\frac{s + 1/T_2}{s + 1/(\beta T_2)} \right) G(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s K_c \beta \alpha G(s) \end{aligned}$$

مقادیر α و K_c از مرحله ۳ بدست آمدند. از این‌و، برای مقدار K_v داده شده مقدار β را می‌توان از معادله بالا تعیین کرد. با استفاده از β بدست آمده، مقدار T_2 را می‌توان از روابط زیر محاسبه نمود:

$$\left| \frac{s_1 + 1/T_2}{s_1 + 1/(\beta T_2)} \right| = 1$$

و

$$-5^\circ < \angle[(s_1 + 1/T_2)/(s_1 + 1/(\beta T_2))] < 0^\circ$$

در واقع مقدار T_2 باید به گونه‌ای باشد که شرط دامنه برآورده شود و سهم زاویه ناشی از قسمت پس فاز جبران ساز پس - پیش فاز نیز بزرگ نباشد.

مثال ۴-۶

تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم کنترل با فیدبک منفی عبارتست از

$$G(s) = \frac{3}{s(s+0.6)}$$

قطبهای سیستم حلقه - بسته در $j1/706 \pm 0/3$ - قرار دارند. نسبت میرانی، فرکانس طبیعی غیرمیرا و ثابت خطای سرعت استاتیکی سیستم جبران نشده به ترتیب عبارتند از $173/0$ ، $1/732$ (رادیان بر ثانیه) و $1/5$ (ثانیه). بنابراین مشخصه‌های حالت - گذرا و حالت - ماندگار پاسخ هیچکدام مناسب نمی‌باشند.

مشخصه‌های مطلوب عملکرد سیستم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(ثانیه) 1/6 < \zeta < 1/5 , \quad 0/5 < \omega_n < 1/7$$

با توجه به مشخصه‌های تعیین شده، قطبها مطلوب غالب سیستم حلقه - بسته در $2/5 \pm j4/33$ - قرار خواهد گرفت.

از قسمت پیش فاز جبران ساز پس - پیش فاز داده شده با معادله $(6-3-7)$ ، برای بهبود رفتار حالت گذرا سیستم و از قسمت پس فاز آن برای کاهش خطای حالت ماندگار (افزایش K_v) استفاده می‌کنیم. نخست قسمت پیش فاز جبران ساز را طراحی می‌کنیم، از آنجاییکه

$$\left. \frac{3}{s(s+0.6)} \right|_{s= -2/5 + j4/33} = 126/31$$

قسمت پیش فاز جبران ساز باید زاویه‌ای برابر با $53/69^\circ$ را در قطبها غالب فراهم آورد (در این صورت نمودار مکان ریشه سیستم جبران شده از قطبها غالب مطلوب عبور خواهد کرد). برای فراهم آوردن سهم زاویه‌ای برابر با $53/69^\circ$ ، تابع تبدیل زیر را برای قسمت پیش فاز جبران ساز در نظر می‌گیریم

$$K_c \frac{s+2/73}{s+9/13}$$

(دقت کنید که این تابع تبدیل منحصر بفرد نیست و می‌تواند از روش‌های سیستماتیک و یا سعی و خطاب دست آورده شود، تنها فراهم آوردن سهم زاویه‌ای مطلوب کافی است). بهره از شرط دامنه بدست آورده می‌شود. داریم

$$\left| K_c \frac{s+2/\sqrt{3}}{s+9/13} \cdot \frac{3}{s(s+0/6)} \right|_{s=-2/5+j\sqrt{4}/33} = 1$$

از اینرو

$$K_c = 14/4$$

قسمت پس فاز جبران ساز را برای برآورده ساختن مشخصه حالت - ماندگار پاسخ طراحی می‌کنیم. در واقع مقدار β را چنان تعیین می‌کنیم که شرط داده شده برروی K_c برآورده گردد. داریم

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s K_c \alpha \beta G(s) \\ = 90$$

و لذا

$$\beta = 4/2$$

سرانجام، مقدار T_2 را به گونه‌ای به اندازه کافی بزرگ انتخاب می‌کنیم که

$$\left| \frac{s + 1/T_2}{s + \frac{1}{4/2} T_2} \right|_{s = -2/5 + j\sqrt{4}/33} \approx 1$$

و

$$\begin{array}{c} \angle \frac{s + 1/T_2}{s + \frac{1}{4/2} T_2} \\ \hline -50^\circ < \quad < 0^\circ \\ \end{array} \Bigg|_{s = -2/5 + j\sqrt{4}/33}$$

با انتخاب $T_2 = 10$ ، دو شرط بالا برآورده خواهند شد (دامنه برابر یک جهت برآورده کردن شرط دامنه، و سهم زاویه ناچیز در قطب‌های غالب برای تغییر ندادن رفتار حالت - گذرا) و لذا تابع تبدیل قسمت پس فاز جبران ساز عبارتست از

$$\frac{s+0/1}{s+0/02}$$

بنابراین تابع تبدیل جبران ساز پس - پیش فاز به صورت زیر بدست می‌آید

$$G_c(s) = \frac{14/4}{s+9/12} \left(\frac{s+2/\sqrt{2}}{s+0/1} \right) \left(\frac{s+0/1}{s+0/0.2} \right)$$

مکان ریشه سیستم جبران شده در شکل ۲۴-۶ نشان داده شده است. پاسخ زمانی سیستم‌های جبران شده و جبران نشده به ورودی پله واحد و شیب واحد نیز در شکل‌های ۲۵-۶ (الف) و (ب) رسم شده‌اند.

حالت دوم: $\alpha^{-1} = \beta$

۱- موقعیت قطب‌های غالب حلقه - بسته را براساس مشخصه‌های عملکرد داده شده تعیین کنید.

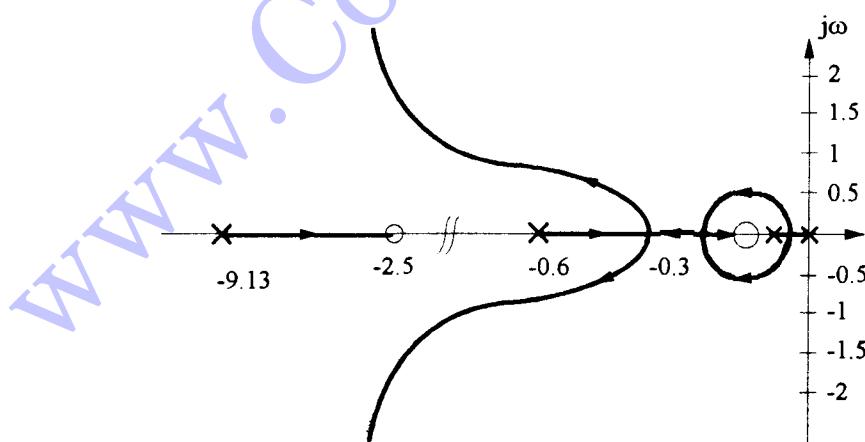
۲- جبران ساز پس - پیش فاز داده شده با معادله (۷-۳-۶) بدین صورت اصلاح می‌شود:

$$G_c(s) = K_c \frac{\left(\frac{T_1}{\beta}s + 1\right)\left(\frac{T_2}{\beta}s + 1\right)}{\left(\frac{T_1}{\beta}s + 1\right)\left(\beta T_2 s + 1\right)} = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + 1/T_2\right)}{\left(s + \beta/T_1\right)\left(s + 1/\beta T_2\right)} \quad (8-3-6)$$

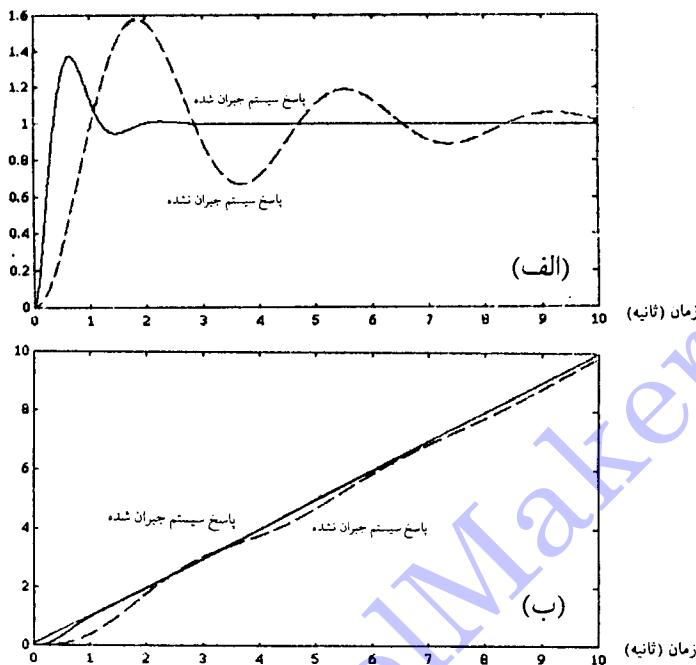
که در آن $\beta > 1$. تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده عبارتست از $(s)G_c(s)G(s)$. اگر ثابت خطای سرعت استاتیکی K_v مشخص باشد، مقدار K_v از معادله زیر تعیین می‌گردد:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s K_c G(s)$$



شکل ۲۴-۶ نمودار مکان ریشه سیستم جبران شده -



شکل ۲۵-۶ پاسخ زمانی سیستم‌های جبران شده و جبران نشده (الف) و رودی به واحد (ب) ورودی شب واحد.

۳- برای آنکه قطب‌های عالی حلقه - بسته در مکانهای مطلوب باشند، سهم زاویه ϕ که باید توسط قسمت پیش فاز جبران ساز فراهم گردد را تعیین کنید.

۴- مقادیر T_1 و β را به گونه‌ای انتخاب کنید که شرایط دامنه و زاویه زیر را برآورده سازند:

$$\left| K_c \left(\frac{s_1 + 1/T_1}{s_1 + \beta/T_1} \right) G(s_1) \right| = 1$$

$$\sqrt{[(s_1 + 1/T_1)/(s_1 + 1/(\beta T_1))]^2 + \phi^2} = 1$$

۵- با مقدار β بدست آمده، T_1 را به گونه‌ای انتخاب کنید که شرایط زیر را برآورده سازند:

$$\left| \frac{s_1 + 1/T_1}{s_1 + 1/(\beta T_1)} \right| \approx 1$$

$$\angle[(s_1 + 1/T_2)/(s_1 + 1/(\beta T_2))] = 90^\circ$$

مقدار بزرگترین ثابت زمانی جبران ساز پس - پیش فاز βT_2 را به اندازه‌ای می‌توان افزایش داد که تحقق فیزیکی آن ممکن باشد.

مثال ۵-۶

سیستم کنترل مثال ۴-۶ را در نظر بگیرید. برای جبران رفتار حالت - گذرا و حالت - ماندگار سیستم حلقه - بسته از جبران ساز داده شده با معادله (۸-۳-۶) استفاده می‌کنیم. با فرض مشخصات عملکرد داده شده در مثال ۴-۶، قطب‌های غالب حلقه - بسته در $G_c(s)G(s) = 2/5 \pm j4/33$ - قرار خواهد گرفت.تابع تبدیل حلقه - باز سیستم جبران شده $K_v = K_c \cdot 18$ می‌باشد و K_c را از شرط داده شده بروی K_v از رابطه زیر تعیین می‌کنیم

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K_c \left(s + \frac{1}{T_1} \right) \left(s + \frac{1}{T_2} \right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1} \right) \left(s + \frac{1}{\beta T_2} \right)} \frac{3}{s(s+0/6)} \\ &= K_c \frac{3}{0/6} \end{aligned}$$

از آنجاییکه K_v باید حداقل 90° باشد، لذا

$$K_c = 18$$

ثابت زمانی T_1 و مقدار β ، برای طراحی قسمت پیش فاز جبران ساز، باید به گونه‌ای انتخاب گردند که شرط دامنه را در موقعیت قطب‌های غالب برآورده سازند و هم چنین زاویه‌ای برابر با $53/69^\circ$ را در قطب‌های غالب، فراهم آورند. بنابراین

$$\left| \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right| \left| \frac{3 \times 18}{s(s+0/6)} \right|_{s=-2/5+j4/33} = \left| \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right| \frac{54}{23/6} = 1$$

$$\left| \begin{array}{l} s + \frac{1}{T_1} \\ \hline s + \frac{\beta}{T_1} \end{array} \right|_{s = -2/5 + j4/31} = 53/69^\circ$$

همانطور که در شکل ۲۶-۶ نشان داده شده است، اگر p در موقعیت مطلوب قطب حلقه باشد، باید A و B را ببروی محور حقیقی به گونه‌ای تعیین کرد که

$$\angle APB = 53/69^\circ, \quad \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{23/V}{54} = \frac{4/V4}{10/V8}$$

لذا

$$\overline{AO} = 3/V27, \quad \overline{BO} = 11/V2894$$

یا

$$T_1 = \frac{1}{3/V27} = 0/V30, \quad \beta = \frac{11/V2894}{3/V27} = 3/V45$$

بنابراین قسمت پیش فاز جبران ساز عبارتست از

$$\frac{s + 3/V27}{s + 11/V2894}$$

برای قسمت پس فاز جبران ساز انتخاب می‌کنیم

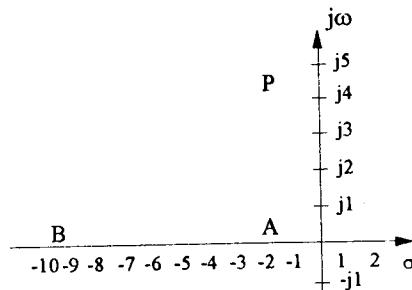
$$T_2 = 1^\circ$$

بنابراین

$$\frac{1}{\beta T_2} = \frac{1}{30/V45}$$

و تابع تبدیل قسمت پس فاز جبران ساز عبارتست از

$$\frac{s + 0/V1}{s + 0/V03}$$

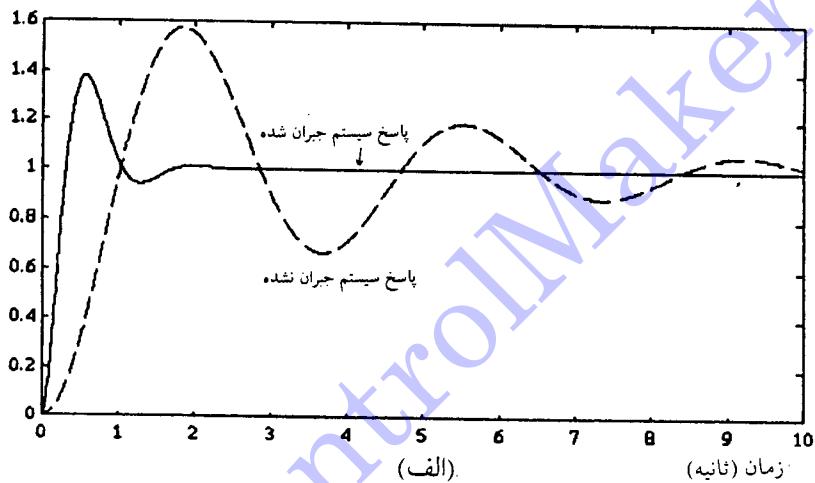


شکل ۲۶-۶ تعیین موقعیت قطب - صفر مطلوب

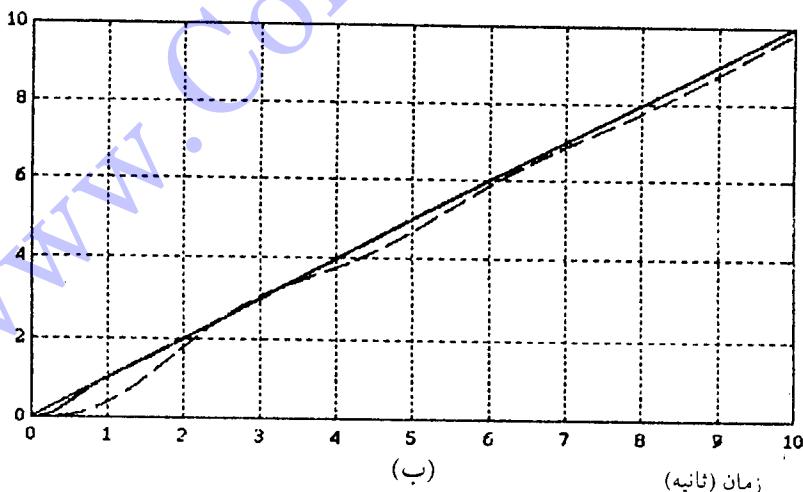
بنابراین تابع تبدیل جبران ساز پس - پیش فاز عبارتست از

$$G_C(s) = \left(\frac{s+0/1}{s+0/0.3} \right) \left(\frac{s+3/27}{s+11/2897} \right)$$

پاسخهای زمانی سیستم حلقه - بسته جبران نشده و جبران شده به ورودیهای پله واحد و شبیب واحد به ترتیب در شکل‌های ۲۷-۶ (الف) و (ب) رسم شده‌اند. همانطور که از این شکلها مشاهده می‌شود، رفتار حالت - گذرا و حالت - ماندگار پاسخ بهبود قابل ملاحظه‌ای یافته و مشخصه‌های عملکرد مطلوب برآورده شده‌اند.



(الف).



(ب).

مشکل ۲۷-۶ پاسخ زمانی سیستم‌های جبران نشده و جبران شده به (الف) ورودی پله واحد (ب) ورودی شبیب واحد

۴-۶ طراحی جبران سازها با استفاده از روش پاسخ فرکانسی

در فصل پنجم با ایده‌های کلی روش پاسخ فرکانسی و رسم نمودارهای بود، نایکوئیست و چارت نیکولز، که ابزار اصلی تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل با روش پاسخ فرکانسی هستند، آشنا شدیم. در بخش ۹-۵، مشخصه‌های عملکرد سیستم براساس پاسخ فرکانس ارایه گردیدند. در این بخش با تغییر دادن مشخصه‌های پاسخ فرکانسی سیستم حلقه - باز توسط جبران سازهای سری پیش فاز، پس فاز و پس - پیش فاز و یا در صورت امکان با تغییر دادن بهره به تنهایی، به مشخصه‌های پاسخ فرکانسی مطلوب داده شده برای سیستم حلقه - بسته تعیین می‌گرددند (بخش ۹-۵). مقدار M_T (ستیغ تشدید) عمدتاً نشان دهنده $\hat{\theta}$ (نسبت میرایی) است و لذا مقدار حداکثر فراجهش در پاسخ گذرا را تعیین می‌کند. برای یک M_T معین، فرکانس تشدید ω تعیین کننده فرکانس طبیعی غیرمیرا می‌باشد که خود نیز زمان پاسخ سیستم را می‌دهد. برای اطلاع از خطای حالت - ماندگار و رودهای استاندارد نیز از ضریب خطای سیستم K_m استفاده می‌شود.

به طور کلی، یکی از موارد زیر می‌تواند دلیل مناسبی برای تغییر نمودار پاسخ فرکانسی سیستم توسط طراح باشد:

۱- سیستم داده شده به ازاء کلیه بهره‌ها ناپایدار است، نمودار پاسخ فرکانسی را باید به گونه‌ای در نزدیکی -180° - 0dB یا ۱-بروی محور حقیقی منفی تغییر داد که سیستم پایدار شود. M_T و ω نیز مقادیر مطلوبی داشته باشند.

۲- سیستم داده شده پایدار می‌باشد ولی زمان استقرار حالت گذرای آن نامطلوب است. به عبارت دیگر M_T مقدار مناسبی دارد ولی ω خیلی کوتاه است. در چنین حالتی ممکن است که بهره مناسب باشد و یا با اندک تغییری مقدار مناسبی پیدا کند، لیکن قسمت فرکانس بالای نمودار باید به گونه‌ای تغییر کند که مقدار ω افزایش یابد.

۳- سیستم داده شده پایدار با مقادیر M_T و ω مناسب، ولذا پاسخ گذرای سیستم مطلوب می‌باشد، لیکن خطای حالت - ماندگار پاسخ بسیار بزرگ است. در این حالت باید مقدار بهره سیستم را بدون تغییر قابل توجهی در مقادیر M_T و ω ، افزایش داد. به عبارت دیگر قسمت فرکانس بالای نمودار پاسخ فرکانسی مناسب است ولی قسمت فرکانس پایین آن

مناسب نیست.

- سیستم داده شده پایدار و مقدار M_r مطلوب است ولی پاسخ حالت گذرا و پاسخ حالت ماندگار نامطلوب هستند. بنابراین باید مقدار ω و K افزایش داده شوند. قسمت نمودار پاسخ فرکانسی در نزدیکی نقطه $(\omega = 180^\circ)$ یا -180° بروی محور حقیقی منفی، باید به گونه‌ای تغییر داده شود که مطلوب بدست آورده شود و قسمت فرکانس پایین باید به گونه‌ای تغییر داده شود که به مقدار مناسب بتوان بهره را افزایش داد.

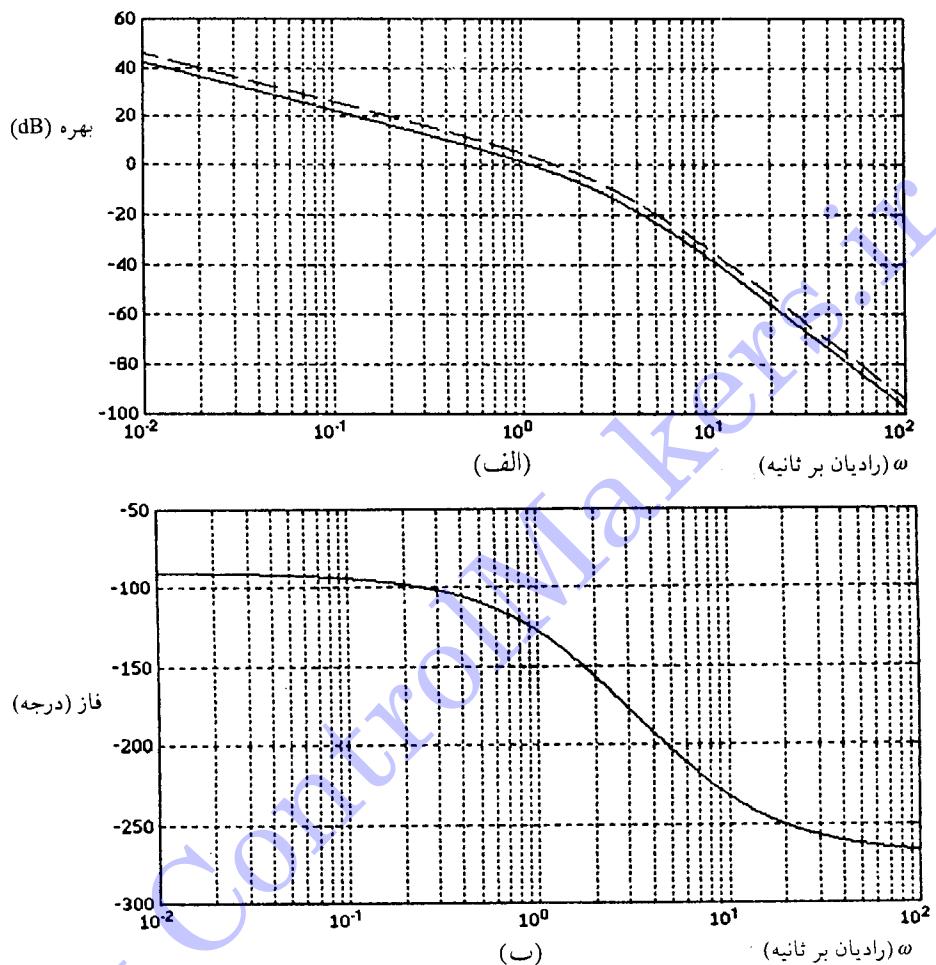
بنابراین هدف از طراحی، تغییر دادن نمودارهای پاسخ فرکانسی توسط تغییر بهره (در صورت امکان) یا یک جبران ساز دینامیکی به گونه‌ای است که مشخصه‌های عملکرد برآورده شوند. قبل از آنکه به تشرییع طراحی با جبران سازهای پس فاز، پیش فاز و پس - پیش فاز پردازیم، با یک مثال نشان خواهیم داد که در برخی از موارد، رسیدن به عملکرد تعیین شده سیستم حلقه - بسته توسط تغییر بهره حلقه - باز K به تنها یک امکان پذیر است. افزایش بهره باعث حرکت دادن نمودار بهره بر حسب فرکانس به طرف بالا، متناظر با مقدار افزایش بهره، در تمامی فرکانس‌ها است و حال آنکه کاهش بهره باعث حرکت دادن نمودار بهره بر حسب فرکانس به طرف پایین، متناظر با مقدار کاهش بهره، در تمامی فرکانس‌ها است. تغییر بهره K تغییری در نمودار زاویه فاز بر حسب فرکانس ندارد.

مثال ۶

تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی عبارتست از

$$G(j\omega) = \frac{20}{j\omega(j\omega+2)(j\omega+5)}$$

حاشیه فاز سیستم جبران نشده برابر با 36° است. مطلوب است که حاشیه فاز سیستم 46° باشد. بنابراین باید در فرکانسی که برای آن انتقال زاویه $= -134^\circ - 180^\circ + 46^\circ = -134^\circ$ است، بهره $|G(j\omega)| = 0 \text{ dB}$ نشان داده شده است. با مراجعت به شکل ۲۸-۶، در می‌یابیم که انتقال فاز برابر با -134° در فرکانس $\omega = 1/\sqrt{5} \text{ (رادیان بر ثانیه)}$ است و بهره در این فرکانس برابر با $3/5 \text{ dB}$ است. بنابراین اگر بهره را به میزان $3/5 \text{ dB}$ ، بر روی کلیه فرکانس‌ها کاهش دهیم، در فرکانس $\omega = 1/\sqrt{5} \text{ (رادیان}$



شکل ۶-۶ (الف) نمودار بهره بر حسب فرکانس برای سیستم مثال ۶-۶ (ب) نمودار زاویه فاز بر حسب فرکانس برای سیستم مثال ۶-۶

بر ثانیه) اندازه نمودار برابر با dB خواهد شد. در این صورت حاشیه فاز مطلوب 46° بدست خواهد آمد. داریم $\log x = \frac{3}{5} \cdot 20$ و لذا $x = 1/496$ برابر با بهره متناظر با $3/5 \text{ dB}$ است. بهره حلقه - باز سیستم 20 است و با تقسیم این بهره بر $1/496$ بهره حلقه - باز جدید $13/37$ بدست می آید. بنابراین در سیستم جبران نشده $\log 20 = 26.0 \text{ dB}$ و در سیستم

جبران شده توسط کاهش بهره حلقه - باز $20 \log \frac{13}{37} = 22/52 \text{dB}$ کمتر $3/5 \text{dB}$ ، که مقدار از مقدار قبلی است.

به طور خلاصه می‌توان گفت که سیستم حلقه - بسته با تابع تبدیل حلقه - باز داده شده، دارای حاشیه بهره 36° می‌باشد. با کاهش بهره سیستم حلقه - باز از $K=20$ به $K=13/37$ ، حاشیه فاز سیستم حلقه - بسته 48° خواهد شد.

۱-۴-۶ طراحی جبران سازهای پیش فاز با استفاده از روش پاسخ فرکانسی
 سیستم نشان داده شده در شکل ۱۷-۶ را در نظر بگیرید. اگر مشخصه‌های عملکرد بر حسب حاشیه فاز، حاشیه بهره، ثابت‌های خطای سرعت استاتیکی و یا سایر مشخصه‌های پاسخ فرکانسی داده شده باشند، باید از روش پاسخ فرکانسی برای طراحی جبران ساز ($G_c(s)$) استفاده کرد. فرض کنید که عمل خواسته شده از جبران ساز، تغییر شکل نمودار پاسخ فرکانسی برای فراهم آوردن زاویه پیش فاز کافی جهت خنثی کردن پس فاز اضافی در سیستم جبران نشده باشد. در این حالت (موارد ۱ و ۲ بخش ۴-۶) جبران ساز پیش فاز برای جبران سیستم مناسب است.

مراحل طراحی یک جبران ساز پیش فاز با استفاده از روش پاسخ فرکانسی در زیر آمده است:

۱- تابع تبدیل جبران ساز پیش فاز عبارتست از

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c \frac{s + 1/T}{s + 1/(\alpha T)} \quad (0 < \alpha < 1) \quad (1-4-6)$$

با تعریف $K = \alpha K_c$ ، تابع تبدیل حلقه - باز سیستم جبران شده در شکل ۱۷-۶ با معادله (۱-۴-۶) عبارتست از

$$G_c(s)G(s) = K \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} G(s) \quad (2-4-6)$$

در اولین مرحله طراحی باید بهره K را چنان تنظیم نمود که شرط داده شده بروی ثابت خطای استاتیکی برآورده گردد.

۲- با بهره بدست آمده K از مرحله قبل، نمودار بود ($KG(s)$) را رسم کنید. تابع تبدیل ($KG(s)$)

مربوط به سیستم جبران نشده می‌باشد ولی بهره آن تنظیم شده است. از نمودار بود رسم شده، حاشیه فاز را تعیین کنید.

۳- زاویه پیش فاز لازم ϕ ، که باید به سیستم اضافه گردد را محاسبه کنید.

۴- از معادله (۷-۲-۶)

$$\sin \phi = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

فاکتور α در جبران ساز پس فاز را تعیین کنید. دقت کنید که «براساس زاویه پیش فاز لازم، که باید توسط جبران ساز فراهم آورده شود، تعیین گردیده است. مرحله بعد تعیین فرکانس‌های شکست $1/T$ و $(\alpha T)/1$ جبران ساز پیش فاز است. فرکانسی را تعیین کنید که در آن دامنه سیستم جبران نشده $(j\omega KG)$ برابر با $(1/\alpha)^{-2} \log(1/\sqrt{\alpha})$ باشد و این فرکانس را به عنوان فرکانس تقاطع بهره جدید انتخاب کنید. این فرکانس با معادله (۶-۲-۶) داده شده است و بزرگترین انتقال فاز در این فرکانس رخ می‌دهد (به شکل ۶-۲-۶ مراجعه کنید).

۵- فرکانس‌های شکست جبران ساز پیش فاز عبارتند از:

صفر جبران ساز پیش فاز $\omega = 1/T$

قطب جبران ساز پیش فاز $\omega = (\alpha T)/1$

۶- بهره جبران ساز $K_c = K/\alpha$ تعیین کنید.

۷- حاشیه فاز سیستم را تعیین کنید. اگر با مقدار مطلوب مطابقت نداشته باشد، موقعیت قطب

- صفر جبران ساز را تا حصول نتیجه مناسب تغییر دهید.

مثال ۶-۷

تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم کنترل با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{1/2}{s(s+1)}$$

مشخصه‌های عملکرد مطلوب سیستم به صورت ثابت خطای سرعت استاتیکی K_s برابر 15^1 (ثانیه) و حاشیه فاز 45° داده شده‌اند. برای برآورده ساختن مشخصه‌های داده شده، از یک جبران ساز پیش فاز استفاده می‌کنیم.

نخستین قدم در طراحی یک جبران ساز پیش فاز، تنظیم بهره K_c در جبران ساز داده شده با

معادله (۶-۴) است. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_c(s)G(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} sK_c \frac{\frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \frac{\cdot / 2}{s(s+1)} \\ &= \cdot / 2 K_c \alpha = 15 \end{aligned}$$

با تعریف $K_c = K_c \alpha$, بدست می‌آوریم

$$K = 75$$

با انتخاب بهره $K = 75$, سیستم جبران شده، شرط داده شده بر روی پاسخ حالت - ماندگار را برآورده می‌سازد.

نمودار بود تابع تبدیل زیر

$$G(j\omega) = \frac{15}{j\omega(j\omega + 1)}$$

در شکل ۲۹-۶ رسم شده است. حاشیه‌های بهره و فاز $(j\omega)$, $G(j\omega)$ از شکل ۲۹-۶ بدست آورده می‌شوند و به ترتیب برابرند با تقریباً $56/49dB$ و $56/49dB$ و $14/7^\circ$. حاشیه بهره $14/7^\circ$ نشان دهنده یک پاسخ کاملاً نوسانی و لذا نامطلوب است. (پاسخ سیستم جبران نشده به ورودی پله واحد در شکل ۳۰-۶ نشان داده شده است). بنابراین، اگرچه با افزایش بهره مشخصه مطلوب رفتار حالت - ماندگار برآورده شده است، لیکن رفتار گذراي پاسخ بسیار نامطلوب می‌باشد. مشخصه داده شده برای حاشیه فاز حداقل 45° است. برای بدست آوردن این حاشیه فاز (بدون کاهش بهره K) باید با استفاده از یک جبران ساز پیش فاز پیش فازی برابر با حدوداً 30° برای جبران زاویه فاز فراهم آورد.

با توجه به اینکه افزودن یک جبران ساز پیش فاز نمودار منحنی دیاگرام بود را تغییر می‌دهد، فرکانس تقاطع بهره به سمت راست انتقال داده خواهد شد. با در نظر گرفتن این انتقال در فرکانس تقاطع بهره فرض خواهیم کرد که بیشترین پیش فاز لازم حدوداً $35/30^\circ$ می‌باشد. به عبارت دیگر حدوداً 5° برای جبران این انتقال فرکانس تقاطع بهره به زاویه پیش فاز لازم اضافه می‌گردد.

از آنجاییکه

$$\sin 35/30^\circ = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

لذا $\alpha = 267^\circ$ است. برای تعیین فرکانس‌های شکست، فرکانسی را تعیین می‌کنیم که در آن دامنه سیستم جبران نشده برابر با $-5.73dB = -\log(1/\sqrt{0/267})$ است. این فرکانس که همان فرکانس تقاطع بهره جدید است برابر $\omega_1 = 5/73$ می‌باشد. از آنجاییکه

$$\omega_1 = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{T} = 2/961$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\alpha T} = 11/089$$

بهره جبران ساز نیز عبارتست از

$$K_c = \frac{K}{\alpha} = \frac{70}{0/267} = 280/899$$

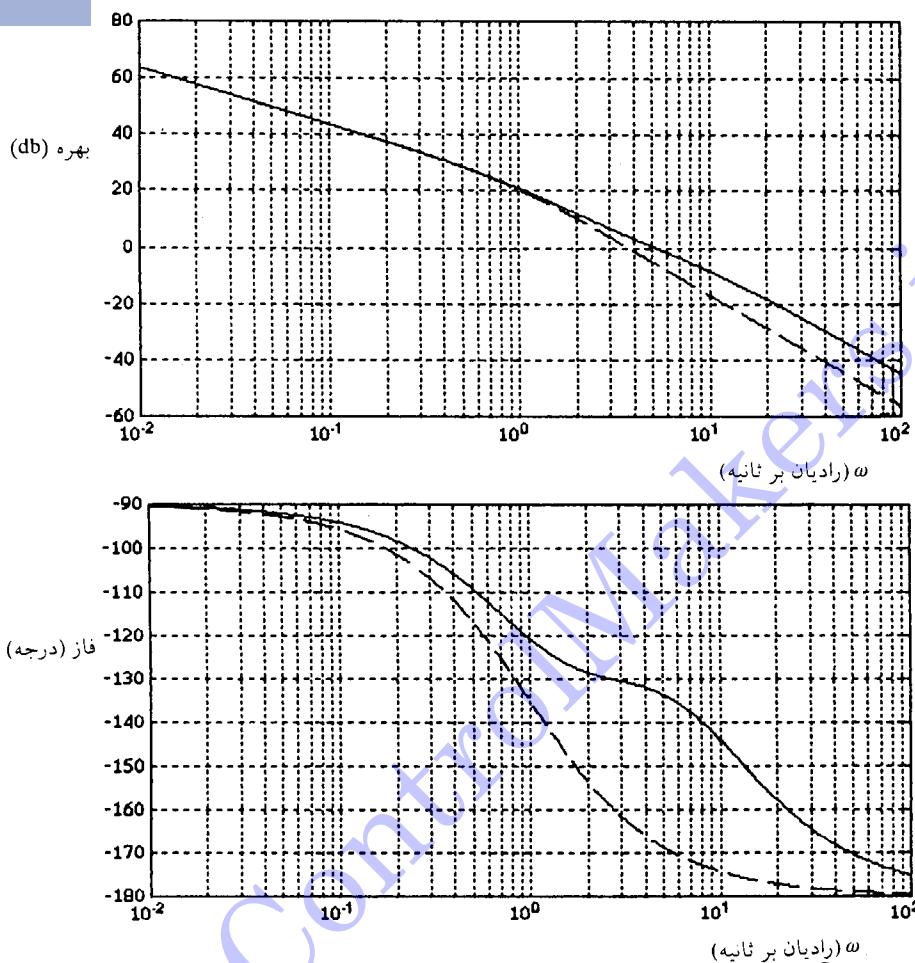
بنابراین تابع تبدیل جبران ساز پیش فاز عبارتست از

$$G_c(s) = 280/899 \frac{s+2/96}{s+11/089}$$

نمودارهای دامنه و زاویه فاز سیستم‌های جبران نشده و جبران شده در شکل ۲۹-۶ رسم شده‌اند. تابع تبدیل حلقه - باز سیستم جبران شده عبارتست از

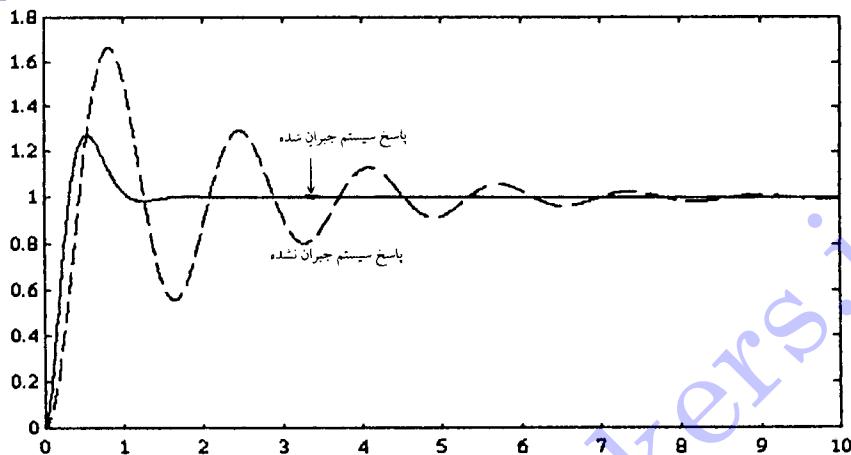
$$G_c(s)G(s) = 280/899 \frac{s+2/96}{s+11/089} \frac{0/2}{s(s+1)}$$

منحنی‌های پیوسته در شکل ۲۹-۶، نمودارهای دامنه و فاز این تابع تبدیل را نشان می‌دهند. حاشیه‌های بهره و فاز سیستم جبران شده به ترتیب عبارتند از 47° و ∞dB که مشخصه طراحی را برآورده می‌سازند. پاسخهای پله واحد سیستم جبران نشده و جبران شده نیز در شکل ۳۰-۶، رسم شده‌اند. همانطور که مشاهده می‌گردد، پاسخ سیستم جبران نشده نوسانی ولی پاسخ سیستم جبران شده با مقدار حداقل فراجهش و زمان استقرار مناسب، بدون نوسانات اضافی است.



شکل ۲۹-۶ دیاگرام بود سیستم‌های جبران نشده و جبران شده، نمودار نشان داده شده با خط چین - نمودار سیستم جبران نشده و نمودار نشان داده شده با خط پیوسته نمودار سیستم جبران شده است.

۲-۴-۶ طراحی جبران سازهای پس فاز با استفاده از روش پاسخ فرکانسی
 اثر جبران ساز پس فاز بروی سیستم جبران نشده، معرفی یک عنصر فاز منفی در ناحیه میانه گستره فرکانسی و اهمیت دادن به پاسخ فرکانس پایین‌تر در مقایسه با پاسخ فرکانسی بالاتر است. لذا همانند یک فیلتر پایین‌گذر عمل می‌کند.



شکل ۳۰-۶ پاسخ زمانی سیستم جبران نشده و جبران شده به ورودی پله واحد

مراحل طراحی یک جبران ساز پس فاز با استفاده از روش پاسخ فرکانسی، در زیر آمده است:

۱- تابع تبدیل جبران ساز پس فاز عبارتست از

$$G_c(s) = K_c \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} \quad (\beta > 1) \quad (3-4-6)$$

با تعریف $K_c \beta = K$ ، تابع تبدیل حلقه - باز سیستم جبران شده در شکل ۱۷-۶ با معادله (۳-۴-۶) عبارتست از

$$G_c(s)G(s) = K \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} G(s) \quad (4-4-6)$$

K را به گونه‌ای تعیین خواهیم کرد که مقدار مطلوب ثابت خطای استاتیکی بدست آورده شود.

۲- با بهره بدست آمده از مرحله ۱ طراحی، نمودار بود سیستم جبران نشده $KG(s)$ را رسم کنید. از نمودار بود رسم شده، حاشیه بهره و حاشیه فاز را تعیین کنید. اگر مشخصه‌های مطلوب حاشیه بهره و فاز برآورده نشده باشند، به عبارت دیگر مقدار حاشیه بهره و حاشیه فاز، مقدار مطلوب نباشد، نخست مقدار مطلوب حاشیه فاز را تعیین کنید. حاشیه

فاز لازم عبارتست از حاشیه فاز معین شده بعلاوه 5° تا 12° فاز اضافی. این 5° تا 12° فاز اضافی جهت جبران کردن پس فاز ایجاد شده توسط جبران ساز پس فاز به مقدار تعیین شده حاشیه فاز اضافه می‌گردد. اکنون فرکانس را تعیین کنید که در آن زاویه فاز تابع تبدیل حلقه - باز برابر با 180° بعلاوه حاشیه فاز لازم است. این فرکانس به عنوان فرکانس تقاطع بهره جدید انتخاب می‌شود.

- ۳- برای جلوگیری از اثرات منفی پس فاز ناشی از جبران ساز پس فاز، قطب و صفر جبران ساز پس فاز را باید به مقدار متنابه‌ی پایین‌تر از فرکانس تقاطع بهره جدید قرار دهیم. بنابراین فرکانس شکست $T = 1/\omega$ ، متناظر با صفر جبران ساز پس فاز را یک اکتاو تا یک دهه پایین‌تر از فرکانس تقاطع بهره جدید قرار دهید. (این مقدار بستگی به ثابت زمانیهای جبران ساز خواهد داشت، وقتی که این ثابت زمانیها نباید خیلی بزرگ شوند)
- ۴- تضعیف لازم جهت پایین آوردن منحنی دامنه به dB در فرکانس تقاطع بهره جدید را تعیین کنید. توجه کنید که مقدار این تضعیف برابر با $20 \log \beta$ است و لذا با این مقدار تعیین شده تضعیف، می‌توان β را محاسبه کرد. سرانجام، فرکانس شکست دوم جبران ساز، متناظر با قطب آن را از $T = 1/\beta\omega$ تعیین کنید.

- ۵- با استفاده از مقادیر بدست آمده K و β بهره جبران ساز را بدست می‌آوریم:

$$K_c = K / \beta \quad (5-4-6)$$

مثال ۸-۶

تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم جبران نشده با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{40}{s(s+5)(s+40)}$$

مطلوب است که سیستم را به گونه‌ای جبران کنیم که ثابت خطای سرعت استاتیکی برابر $(\text{ثانیه})^{22/5}$ ، حاشیه فاز حداقل 45° و حاشیه بهره حداقل 15dB باشد. برای جبران سیستم از یک جبران ساز پس فاز استفاده می‌کنیم. تابع تبدیل جبران ساز پس فاز با معادله (۳-۴-۶) داده شده است، لذا تابع تبدیل حلقه - باز سیستم جبران شده

عبارتست از

$$G_c(s)G(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \frac{450}{s(s+5)(s+40)}$$

با تعریف $K = K_c \beta$ ، K را باید به گونه‌ای انتخاب کنیم که شرط داده شده بروی ثابت خطای سرعت استاتیکی برآورده شود. بنابراین

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K 450}{s(s+5)(s+40)} \\ &= K 2 / 25 = 22 / 5 \end{aligned}$$

یا

$$K = 10$$

با بهره $K = 10$ ، سیستم جبران شده، شرط داده شده بروی عملکرد حالت - ماندگار را برآورده خواهد کرد. دیاگرام بود تابع تبدیل

$$G_1(j\omega) = \frac{4500}{s(s+5)(s+40)}$$

(که در آن بهره سیستم، جبران شده است) در شکل ۳۱-۶ با خط چین رسم شده است. از نمودارهای دامنه و فاز، حاشیه‌های بهره و فاز تقریباً به ترتیب عبارتند از $3dB$ و $13/5^\circ$. مقدار مطلوب حاشیه فاز (با توجه به 12° در نظر گرفته شده) 57° می‌باشد. از آنجاییکه فرکانس متناظر با حاشیه فاز 57° برابر $2/783$ رادیان بر ثانیه است، فرکانس قطع بالای جبران ساز را در دو اکتاو پایین‌تر از این فرکانس، یعنی 696° رادیان بر ثانیه، در نظر می‌گیریم. مقدار بهره تابع تبدیل جبران نشده در $\omega = 696^\circ$ برابر با $16/962dB$ است. از این‌رو

$$20 \log \beta = 16/962$$

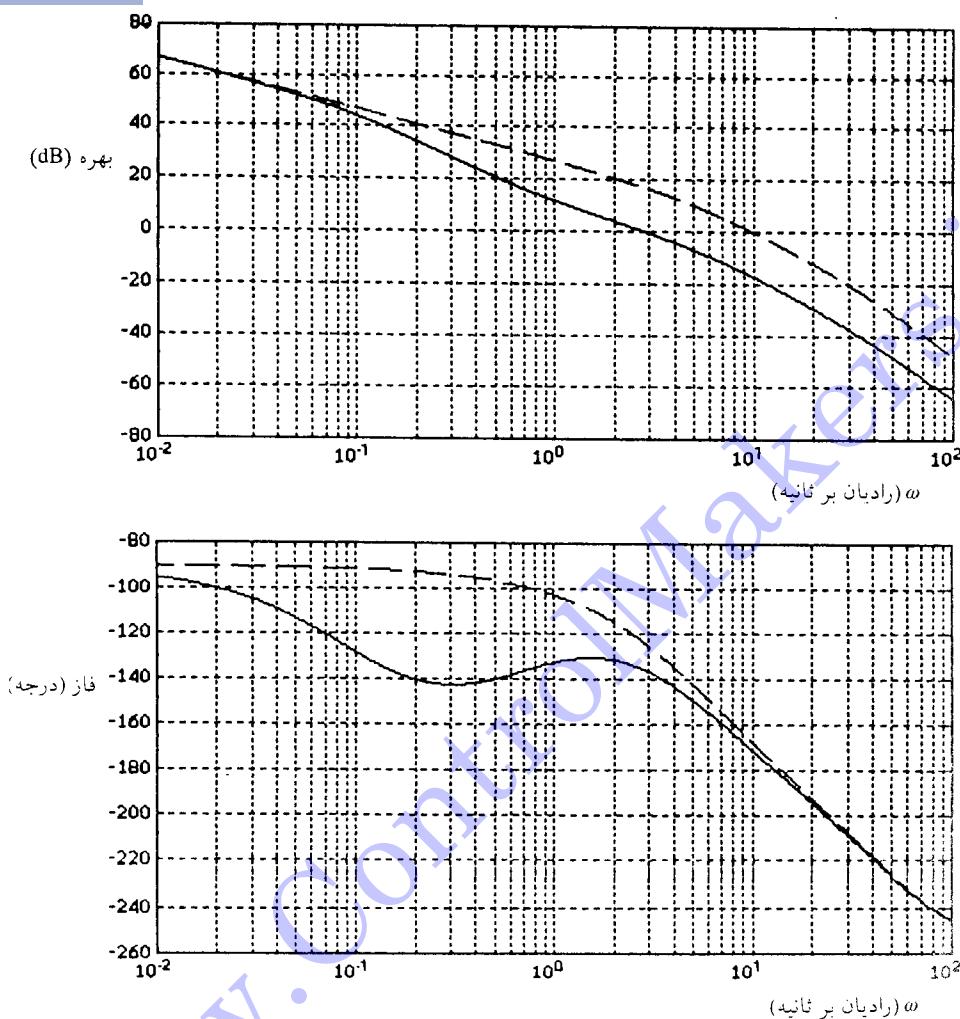
و بنابراین

$$\beta = 7$$

فرکانس شکست بعدی جبران ساز که متناظر با قطب آن است، از رابطه زیر بدست می‌آید
 $\omega = 0/696^\circ = 0.099$ (رادیان بر ثانیه)

بنابراین تابع تبدیل جبران ساز عبارتست از

$$G_c(s) = K_c \frac{14s + 1}{10s + 1} = K_c (0/14) \frac{s + 0/696}{s + 0/099}$$



شکل ۲۱-۶ نمودارهای دامنه و فاز تابع تبدیل سیستم جبران نشده و جبران شده

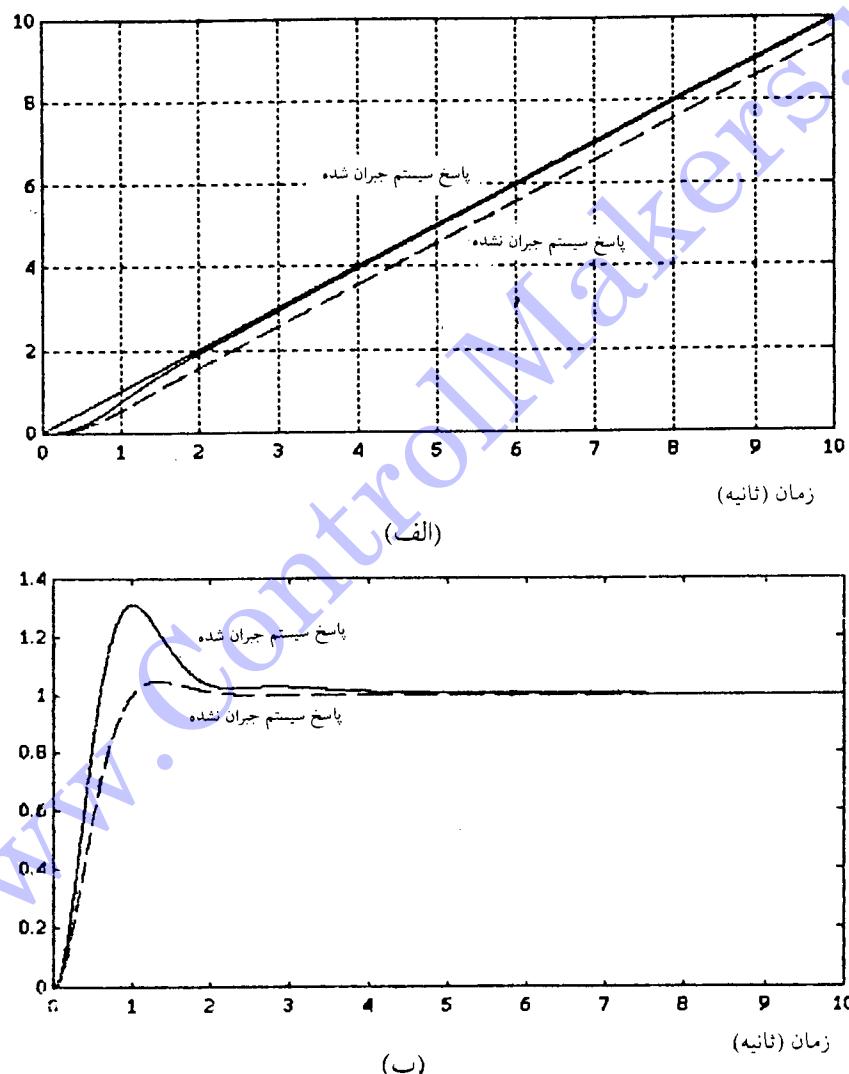
(نوجه کنید که مقدار فاز جبران ساز برابر با 180° است). برای تعیین بهره K_c داریم

$$K_c = \frac{K}{\beta} = \frac{10}{7} = 1/43$$

تابع تبدیل حلقه - باز سیستم جبران شده به صورت زیر است

$$G_c(s)G(s) = \frac{900/9(s+0.696)}{s(s+0.99)(s+0.5)(s+4)}$$

دیاگرام بود (نمودارهای دامنه و زاویه فاز) این تابع تبدیل در شکل ۳۱-۶ رسم شده‌اند. از نمودارهای شکل ۳۱-۶ داریم که حاشیه‌های بهره و فلو سیستم جبران شده به ترتیب عبارتند از $20dB$ و 45° ، که شرایط داده شده را برآورده می‌سازند. پاسخ سیستم‌های جبران شده و جبران شده نیز به ورودی پله واحد و شیب واحد در شکل ۳۲-۶ رسم شده‌اند.



شکل ۳۲-۶ خروجیهای سیستم جبران نشده و جبران شده به ورودیهای (الف) شیب واحد (ب) پله واحد

نکاتی در رابطه با جبران سازهای پس فاز

- ۱- با توجه به ماهیت پایین گذر بودن جبران سازهای پس فاز (شکل ۶-۶)، جبران سازهای پس فاز استفاده از بهره بالاتری را در فرکانس‌های پایین امکان‌پذیر می‌سازند، که موجب بهبود عملکرد حالت -ماندگار می‌شود. همچنین در گستره حساس فرکانسی بالاتر، بهره را کاهش داده و حاشیه فاز را بهبود می‌بخشد.
- ۲- فرض کنید که صفر و قطب جبران ساز پس فاز به ترتیب در $s=-z$ و $s=-p$ قرار داشته باشند. مادامیکه صفر و قطب جبران ساز در نزدیکی مبداء هستند و نسبت z/p برابر با فاکتور ضرب کننده لازم برای ثابت خطای سرعت استاتیکی است، موقعیت دقیق صفر و قطب چندان مهم نیست. با توجه به اینکه جبران ساز پس فاز یک قطب، در حوالی صفر و قطب خود، به سیستم حلقه - بسته اضافه می‌کند (جبران ساز یک درجه، درجه استاتیکی سیستم حلقه - بسته را افزایش می‌دهد)، و از آنجاییکه قطب‌های نزدیک به مبداء بسیار کند هستند و هر چه به مبداء نزدیکتر می‌شوند، کندتر می‌گردند لذا باید دقیق کرد که صفر و قطب جبران ساز، بدون جهت خیلی نزدیک مبداء قرار داده نشوند. اگرچه صفر جبران ساز اثر قطب حلقه - بسته ایجاد شده را که در نزدیکی آن است بسیار کم می‌کند ولی پاسخ بسیار کند گذرا ناشی از این قطب، موجب خرابی زمان استقرار سیستم خواهد شد.
- ۳- تضعیف ناشی از جبران ساز پس فاز، فرکانس تقاطع بهره را به یک نقطهٔ فرکانسی پایین تر منتقال می‌دهد، که در آن حاشیه فاز قابل قبول باشد. بنابراین جبران ساز پس فاز، باعث کاهش پنهانی باند سیستم می‌گردد. لذا پاسخ گذرا نیست کندتر خواهد گردید. دقیق کنید که منحنی زاویه فاز $G(j\omega)$ در نزدیکی و بالای فرکانس تقاطع بهره جدید، تغیری تغییری نمی‌کند.
- ۴- استفاده از جبران ساز پس فاز، موجب می‌گردد که در سیستم جبران شده حاشیه پایداری کاهش یابد. برای اجتناب از این پدیده نامطلوب، ثابت زمانی T را باید به اندازه کافی بزرگتر از بزرگترین ثابت زمانی سیستم انتخاب کرد.

۳-۴-۶ طراحی جبران سازهای پس - پیش فاز با استفاده از روش پاسخ فرکانسی جبران سازهای پس - پیش فاز برای بهره گرفتن از مزایای هر دو جبران سازهای پس فاز و

پیش فاز طراحی می شوند و لذا مراحل طراحی آن براساس ترکیبی از روش‌های طراحی برای جبران سازهای نامبرده می باشد.

تابع تبدیل جبران ساز پس - پیش فاز عبارتست از

$$G_C(s) = K_C \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{\left(\frac{T_1}{\beta} s + 1\right)(\beta T_2 s + 1)} \quad (6-4-6)$$

که در آن $\beta > 1$. قسمت پیش فاز جبران ساز (قسمت شامل T_1) با اضافه کردن زاویه پیش فاز و افزایش حاشیه فاز در فرکانس تقاطع بهره، منحنی پاسخ - فرکانسی را تغییر می دهد. در حالیکه قسمت پس فاز جبران ساز (قسمت شامل T_2 ، در نزدیک و بالای فرکانس تقاطع بهره تعیینی ایجاد می کند و توسط آن امکان افزایش بهره در گستره فرکانس پایین پیدا می شود، که به نوبه خود به بهبود عملکرد حالت - ماندگار منجر می گردد.

مراحل طراحی یک جبران ساز پس - پیش فاز با استفاده از روش پاسخ - کانسی در زیر آمده است:

۱- تابع تبدیل حلقه - باز سیستم جبران شده در شکل ۱۷-۶ با معادله (۶-۴-۶) عبارتست از

$$G_C(s)G(s) = K_C \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{\left(\frac{T_1}{\beta} s + 1\right)(\beta T_2 s + 1)} G(s) \quad (7-4-6)$$

K_C را چنان تنظیم کنید که شرط داده شده بروی ثابت خطای استاتیکی برآورده گردد.

۲- نمودار بود تابع تبدیل (۶) KG را رسم کنید. حاشیه بهره و حاشیه فاز سیستم جبران نشده را محاسبه کنید. سپس فرکانس تقاطع بهره جدید را چنان انتخاب کنید که با زاویه پیش فاز لازم، حاشیه فاز مطلوب بدست آورده شود. همانند مرحله ۴ طراحی جبران ساز پیش فاز بخش ۱-۴-۶، با جایگزینی $\beta = 1/\beta$ ، مقدار β را محاسبه کنید.

۳- پس از تعیین فرکانس تقاطع بهره جدید، فرکانس شکست قسمت پس فاز جبران ساز معادله (۶-۴-۶) را همانند مرحله ۳ طراحی جبران ساز پس فاز بخش ۲-۴-۶ محاسبه می کنیم. با تعیین T_2 و β بدست آمده در مرحله قبل، طراحی قسمت پس فاز تکمیل می شود.

۴- برای تعیین قسمت پیش فاز جبران ساز از منحنی دامنه نمودار بود تابع تبدیل ($j\omega$)، مقدار دامنه تابع تبدیل را در فرکانس تقاطع بهره جدید پیدا می کنیم. جبران ساز پس -

پیش فاز باید نمودار دامنه تابع تبدیل جبران نشده را به گونه ای جبران کند که اندازه دامنه در این فرکانس dB شود. از این شرط، فرکانس شکست لازم برای جبران سازی را تعیین می کنیم.

۵- با رسم نمودار بود تابع تبدیل حلقه - باز جبران شده ($G_c(j\omega)G(j\omega)$ ، دسترسی به مشخصه های عملکرد مطلوب را بررسی می کنیم. در صورت عدم دسترسی به این مشخصه ها، طراحی را دوباره انجام می دهیم.

مثال ۹-۶

تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{1}{s(s+0/6)(s+2)}$$

مطلوب است که ثابت خطای سرعت استاتیکی 15° (ثانیه)، حاشیه فاز 50° و حاشیه بهره سیستم جبران شده حداقل 15dB باشد.

برای جبران سیستم داده شده (که دارای پاسخ گذرا و ماندگار نامناسبی می باشد) از یک جبران ساز پس - پیش فاز داده شده با تابع تبدیل (۶-۴-۶) استفاده می کنیم. از شرط داده شده بر روی ثابت خطای سرعت استاتیکی، بدست می آوریم

$$\begin{aligned} K_c &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) \frac{1}{s(s+0/6)(s+2)} \\ &= \frac{K_c}{1/2} = 15 \end{aligned}$$

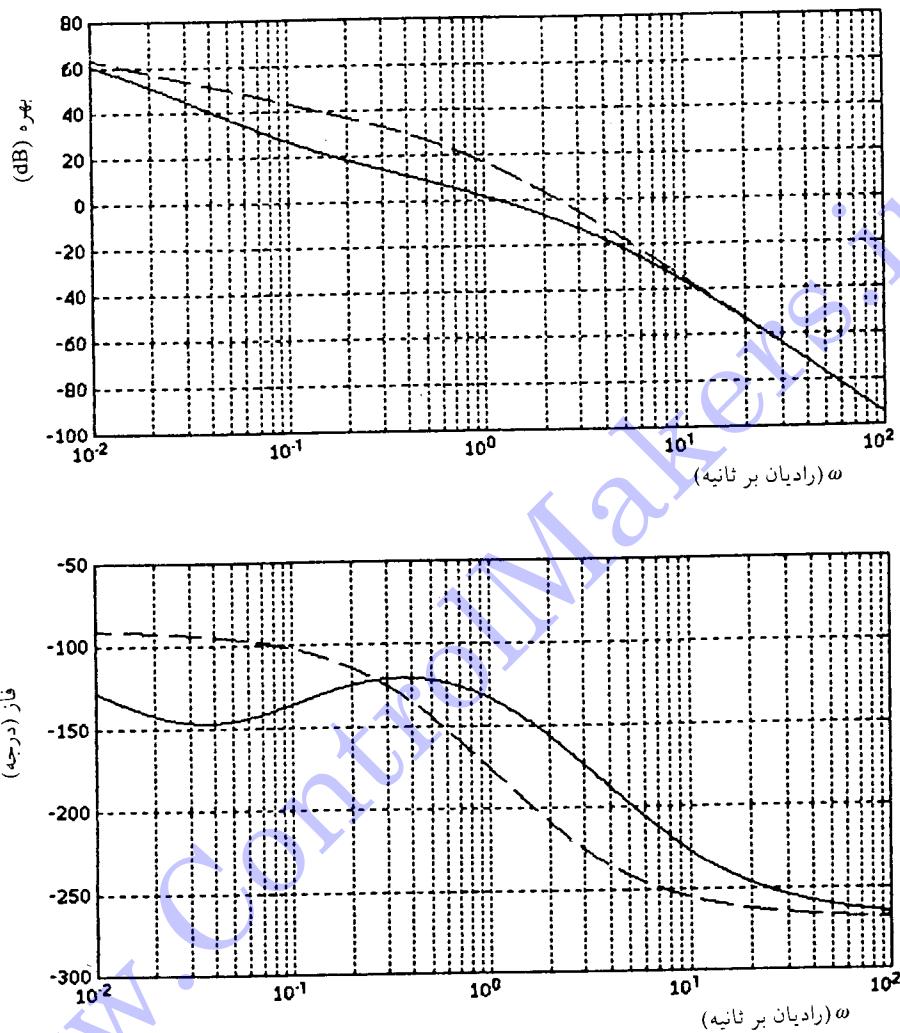
و یا

$$K_c = 18$$

دیاگرام بود سیستم جبران شده زیر

$$G_c(j\omega) = \frac{18}{j\omega(j\omega+0/6)(j\omega+2)}$$

در شکل ۳۳-۶ رسم شده است. زاویه فاز این تابع تبدیل حدوداً -230° است، که نشان می دهد زاویه پیش فاز لازم در این حالت 50° می باشد. با در نظر گرفتن خطای معمول در



شکل ۳۲-۶ نمودارهای دامنه و فاز تابع تبدیل سیستم جبران نشده و جبران شده.

جبران ساز آن را 55° فرض می‌کنیم.

نخستین قدم در طراحی یک جبران ساز پس - پیش فاز، انتخاب یک فرکانس تقاطع بهره جدید است. از نمودار زاویه فاز تابع تبدیل $G(j\omega)$ ، دلیم که زاویه فاز $G(j\omega)$ در $\omega = 1/\tau$ (رادیان بر ثانیه)، برابر با -180° است. می‌توان فرکانس تقاطع بهره جدید را $1/\tau$ (رادیان بر ثانیه) انتخاب کرد. لذا زاویه پیش فاز لازم در $\omega = 1/\tau$ (رادیان بر ثانیه) حدوداً 55° می‌باشد.

دقت کنید که این زاویه را می‌توان با یک جبران ساز پس - پیش فاز فراهم آورد.
بالاترین زاویه پیش فاز ϕ که از قسمت پیش فاز جبران ساز فراهم آورده می‌شود، رابطه زیر را برآورده می‌سازد

$$\alpha = \frac{1}{\beta} = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi}$$

از اینرو

$$\beta = 10^\circ$$

با تعیین فرکانس تقاطع بهره جدید، فرکانس شکست قسمت پس فاز از جبران ساز پس - پیش فاز را تعیین می‌کنیم. با انتخاب $\omega = 1/T_2 = 1/(11)$ (صفر قسمت پس فاز جبران ساز) یک دهه پایین فرکانس تقاطع بهره جدید، تابع تبدیل قسمت پس فاز جبران ساز به صورت زیر بدست می‌آید

$$\frac{s+0/11}{s+0/11}$$

برای طراحی قسمت پیش فاز تابع تبدیل جبران ساز، نخست مقدار دامنه تابع تبدیل را در فرکانس تقاطع بهره جدید پیدا می‌کنیم. از شکل ۳۳-۶ داریم که $G_c(j\omega) = 1/1$ برآب را ۱۵dB است. بنابراین جبران ساز پس - پیش فاز باید نمودار دامنه تابع تبدیل جبران نشده را به اندازه ۱۵dB در (رادیان بر ثانیه) $\omega = 1/1$ جبران کند. برای آورده ساختن این شرط می‌توان خط مستقیمی با شیب ۲۰dB رسم کرد، که از نقطه $(1/1, 15)$ رادیان بر ثانیه و $(0, -15)$ عبور کند. نقاط قطع این خط با خطهای ۰dB و ۲۰dB - فرکانس‌های شکست قسمت پیش فاز جبران ساز را بدست خواهند داد. بنابراین، تابع تبدیل قسمت پیش فاز جبران ساز پس - پیش فاز به صورت

زیر بدست خواهد آمد

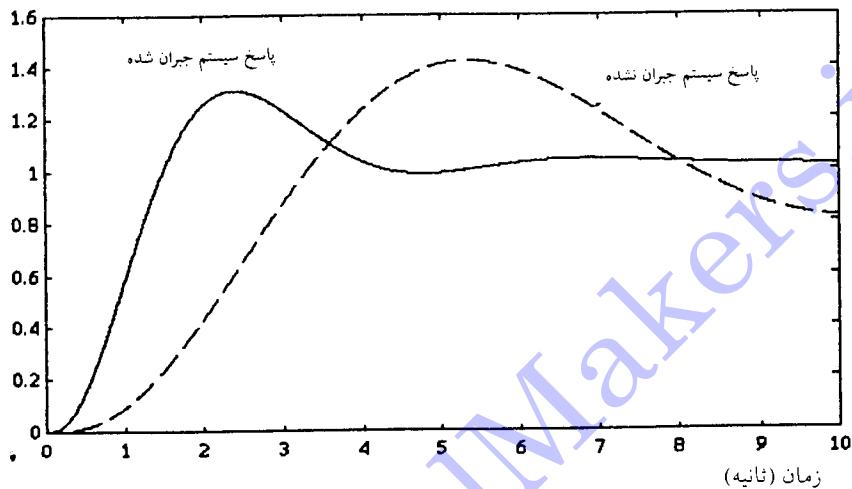
$$\frac{s+0/65}{s+6/5}$$

با ترکیب قسمتهای پس فاز و پیش فاز جبران ساز، تابع تبدیل جبران ساز عبارتست از

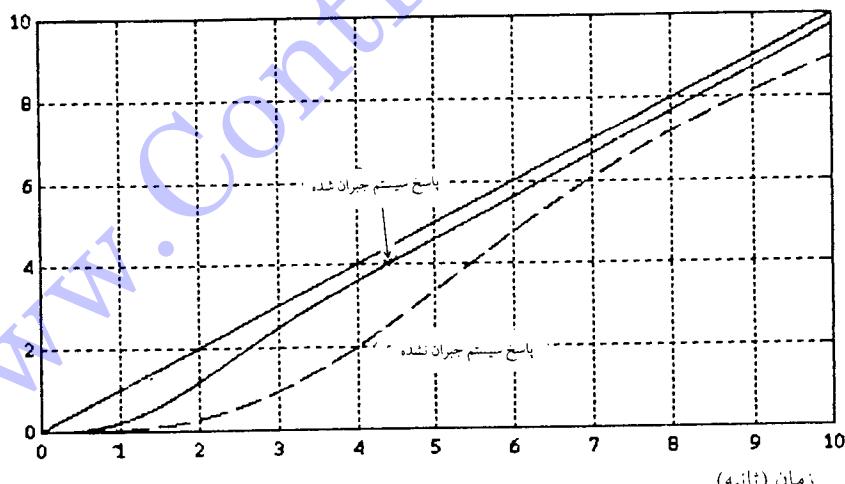
$$G_c(s) = \left(\frac{s+0/11}{s+0/11} \right) \left(\frac{s+0/65}{s+6/5} \right)$$

دیاگرام بود سیستم جبران شده $G_c(j\omega)G(j\omega)$ در شکل ۳۳-۶ رسم شده است. حاشیه‌های بهره و فاز سیستم جبران شده به ترتیب حدوداً عبارتند از ۱۵dB و ۴۵°، بنابراین کلیه

ملزومات طراحی برآورده شده است و پاسخهای پله واحد و شیب واحد سیستم‌های جبران نشده و جبران شده در شکل‌های ۳۴-۶ (الف) (ب) نشان داده شده‌اند.



(الف)



(ب)

شکل ۳۴-۶ خروجیهای سیستم جبران نشده و جبران شده به ورودیهای (الف) پله واحد (ب) شیب واحد

۴-۴-۶ جبران سازی با استفاده از چارت نیکولز

اصول طراحی جبران سازها با استفاده از چارت نیکولز، همان اصول طراحی جبران سازها با استفاده نمودارهای بود و نایکوئیست است. در اینجا نیز باید جبران سازی طراحی گردد تا چارت نیکولز را به گونه‌ای تغییر شکل دهد که مشخصه‌های عملکرد مطلوب پاسخ فرکانسی بدست آیند. با توجه به اینکه طراحی جبران سازهای پس فاز، پیش فاز و پس - پیش فاز را بطور مفصل در بخش‌های ۱-۴-۶ تا ۳-۴-۶ براساس مکان ریشه و نمودارهای بود بررسی کردیم، لذا در این بخش بدون ارایه مجدد جزئیات مراحل طراحی و جبران سازها تنها با بررسی دو مثال، کاربرد چارت نیکولز را در طراحی سیستم‌های کنترل نشان خواهیم داد. در مثال اول جبران سازی سیستم حلقه - باز با تغییر بهره به تهابی امکان پذیر است و در مثال دوم از جبران ساز پیش فاز برای طراحی جبران ساز مناسب، سود خواهیم جست.

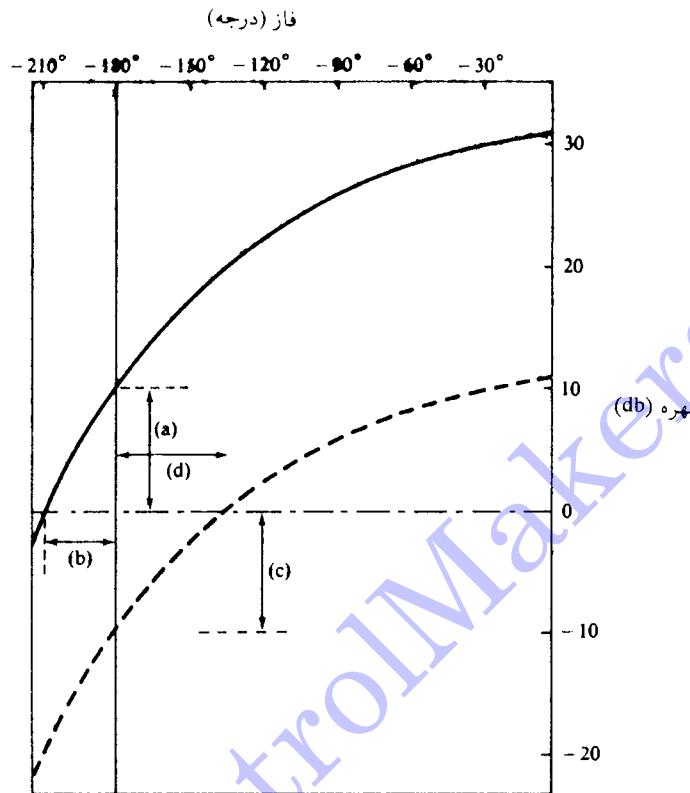
۱۰-۶ مثال

تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی عبارتست از

$$G(j\omega) = \frac{200K}{(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)}$$

نمودار بهره برحسب فاز این تابع تبدیل برای $K=1$ در شکل ۳۵-۶ رسم شده است. مطلوب آن است که سیستم حلقه - بسته دارای حاشیه فاز حداقل 20° و حاشیه بهره بین ۸ تا ۱۲ dB باشد. همانطور که از شکل ۳۵-۶ مشاهده می‌گردد، حاشیه فاز سیستم جبران نشده تقریباً باشد. همانطور که از شکل ۳۵-۶ مشاهده می‌گردد، حاشیه فاز سیستم جبران نشده تقریباً -30° و حاشیه بهره آن $10/5dB$ است. با توجه به منفی بودن حاشیه‌های بهره و فاز، سیستم حلقه - بسته با فیدبک واحد ناپایدار است. در فرکانسی که زاویه فاز 180° می‌باشد، بهره تابع تبدیل جبران نشده $10/5dB$ است. اگر این بهره را به مقدار $20dB$ -کاهش دهیم، بهره کلی سیستم $9/5dB$ در زاویه فاز 180° خواهد بود و لذا حاشیه فاز سیستم $9/5dB$ شده که در گستره تعیین شده قرار دارد.

افزایش بهره K باعث بالا بردن نمودار بهره برحسب فرکانس بروی گلیه فرکانس‌ها شده و حال آنکه کاهش بهره K باعث پایین آوردن نمودار بهره برحسب فرکانس به همان مقدار در گلیه فرکانس‌ها می‌شود. بنابراین برای آنکه نمودار شکل ۳۵-۶ را به مقدار $20dB$ کاهش دهیم



شکل ۳۵-۶ نمودار بهره بر حسب فاز برای مثال ۱۰-۶

سیستم جبران نشده، $K = 1$ (الف) حاشیه بهره (ب) حاشیه فاز

سیستم جبران شده، $K = 10$ (ج) حاشیه بهره (د) حاشیه فاز

بهره K را برابر با 10 قرار می دهیم. با محاسبه حاشیه فاز پس از این جبران سازی توسط بهره در می یابیم که زاویه فاز سیستم در dB برابر با $-135/5^\circ$ است و لذا حاشیه فاز تقریباً $44/5^\circ$ می باشد که از مقدار حداقل تعیین شده بالاتر است.

چارت نیکولز یک جبران ساز پیش فاز در شکل ۴-۶ نشان داده شده است. زاویه فاز این جبران ساز در گستره میانه فرکانسی ثابت است. برای مقادیر کوچکتر α ، مقدار ستینغ فاز ثابت شده و مقدار بهره حالت - ماندگار بر حسب dB بزرگتر می شود ($0 \rightarrow \infty$). چارت نیکولز یک جبران ساز پس فاز در شکل ۸-۶ نشان داده شده است. زاویه فاز این

جبران ساز در گستره میانه فرکانسی منفی است. برای مقادیر بزرگتر β مقدار ستینغ فاز منفی تر شده و مقدار بهره حالت - ماندگار بر حسب dB بزرگتر می شود ($\omega \rightarrow 0$).

مثال ۱۱-۶

تابع تبدیل حلقه - باز زیر را در نظر بگیرید

$$G(j\omega) = \frac{20}{j\omega(j\omega+2)(j\omega+10)}$$

چارت نیکولز این تابع تبدیل در شکل ۳۶-۶، نشان داده شده است. از چارت نیکولز داریم که حاشیه فاز تابع تبدیل جبران نشده $40^\circ / 60^\circ$ و حاشیه بهره آن $6dB / 21^\circ$ است. مطلوب است که حاشیه بهره سیستم جبران شده بین 8° تا 12° باشد و حاشیه فاز آن نیز بین 25° تا 30° باشد. همچنین شرایط حالت - ماندگار نیز تغییر محسوسی نکنند.

دقت کنید که در سیستم جبران نشده، رفتار حالت - ماندگار پاسخ رضایت‌بخش است، لیکن پاسخ گذرای آن بسیار کند است. شرایط عملکرد جدید موجات سریعتر شدن پاسخ گذرا و حفظ حالت - ماندگار را فراهم می‌آورند.

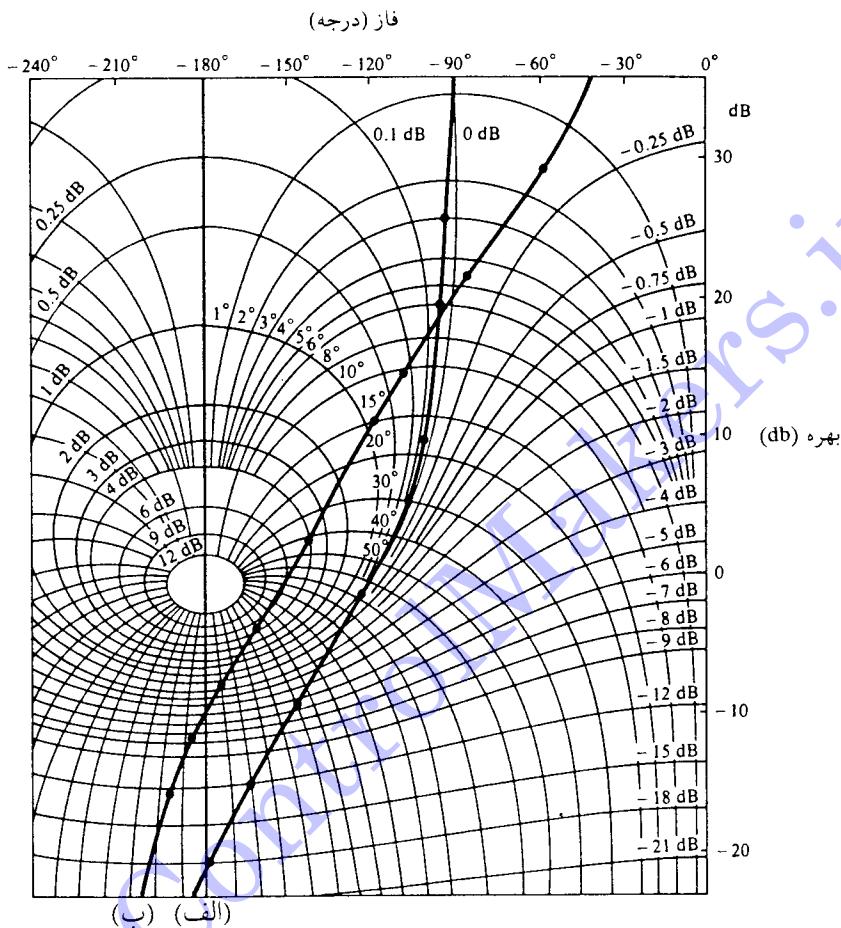
فرکانسی که در آن زاویه فاز تابع تبدیل جبران نشده، برابر با 180° است، $4/472$ رادیان بر ثانیه است و در این فرکانس باید یک افزایش $12dB$ بهره داشته باشیم، ضمن آنکه فاز تابع تبدیل تغییر چندانی در این فرکانس نکند.

برای افزایش بهره به مقدار $12/04$ ، می‌توان K_C را برابر با 4 قرار داد. برای آنکه در فرکانس‌های پایین این افزایش بهره باعث تغییر رفتار حالت - ماندگار نشود، باید آن را توسط رفتار جبران ساز در این ناحیه فرکانسی جبران کنیم. در واقع از تابع تبدیل جبران ساز پیش فاز داریم

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G_C(s) = \alpha = \frac{1}{4}$$

و لذا $\alpha = 0.25$. دقต کنید که در فرکانس‌های پایین، بهره کلی سیستم همانند قبل یک شده و در فرکانس‌های بالا بهره سیستم $12/04dB$ افزایش خواهد داشت.

اگر تغییری در زاویه فاز تابع تبدیل جبران نشده، در فرکانسی که برای آن بهره کلی $12/04dB$ بوده رخ ندهد، این فرکانس فرکانسی خواهد شد که در آن بهره کلی برای $(s) G_C(s)$ (تابع تبدیل جبران نشده با تنظیم بهره) dB خواهد بود. با بکارگیری این فرکانس و معادله



شکل ۶-۳۶ چارت نیکولز مثال ۱۱-۶ (الف) سیستم جبران نشده (ب) سیستم جبران شده

زاویه فاز، حاسیه فاز سیستم را تعیین خواهیم کرد. با حل معادله زیر

$$|G(j\omega)| = \frac{2}{\omega(\omega^2 + 4)^{1/2}(\omega^2 + 100)} = 0/25^\circ = -12/0^\circ \text{ dB}$$

داریم $\omega = 2/545$ رادیان بر ثانیه، در این فرکانس زاویه فاز تابع تبدیل را پیدا می‌کنیم

$$\angle G(j\omega) = -90^\circ \tan^{-1} \left[\frac{\omega}{2} \right] - \tan^{-1} \left[\frac{\omega}{10} \right] = -154^\circ$$

ولذا حاشیه فاز تابع تبدیل $25/4^{\circ}$ است که در گستره تعیین شده 25° تا 35° می‌باشد. با این حاشیه بهره و حاشیه فاز اهداف طراحی برآورده شده‌اند و تنها مسئله تعیین فرکانس شکست یا صفر تابع تبدیل جبران ساز است که با انتخاب T باید به گونه‌ای تعیین گردد که تقریباً هیچ تغییر فازی در $2/454 = 2/454 \text{ رادیان بر ثانیه}$ رخ ندهد. با سعی و خطا می‌توان دریافت که انتخاب $\omega = 2/454 = \frac{1}{\alpha T}$ ، تضمین خواهد کرد که هیچ تغییر فازی از ناحیه جبران ساز در $1/T = 0/0.25$ رادیان بر ثانیه رخ نمی‌دهد و از این‌رو می‌توان به عنوان نمونه $1/(0.25) = 4$ عملکرد داده شده عبارتست از

$$G_C(j\omega) = \frac{j\omega + 0.25}{j\omega + 0.1}$$

نمودار چارت نیکولز تابع تبدیل حلقه - باز جبران شده در شکل ۳۶-۶ نشان داده شده است. فرکانسی که در آن بهره dB است، تقریباً $2/453 = 2/453 \text{ رادیان بر ثانیه}$ است و حال آنکه این فرکانس $0/907 = 0/907 \text{ رادیان بر ثانیه}$ در سیستم جبران نشده بوده است. بنابراین با بکارگیری جبران ساز پیش فاز پهنه‌ای باند سیستم افزایش پیدا می‌کند و پاسخ گذرای سیستم به مقدار قابل ملاحظه‌ای بهبود یافته است. بعلاوه حاشیه‌های بهره و فاز نیز به ترتیب $9/9 \text{ dB}$ و $27/20^{\circ}$ هستند که در حد قابل قبولی می‌باشند.

مسایل

۱-۶. مدار الکترونیکی زیر با استفاده از تقویت کننده‌های عملیاتی را در نظر بگیرید:

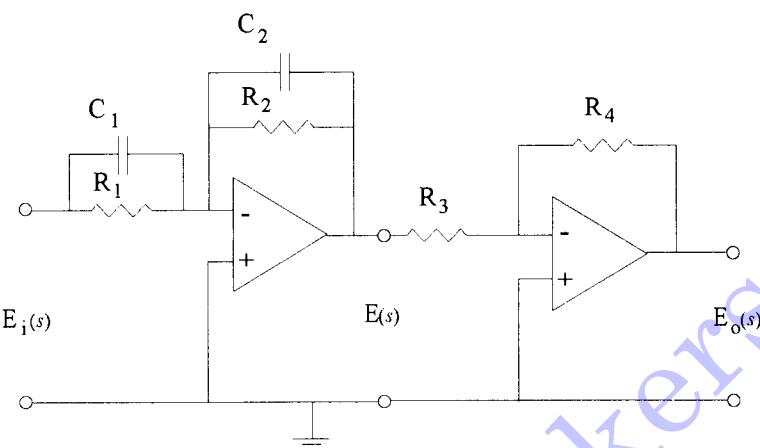
(الف) تابع تبدیل مدار را بنویسید.

(ب) نشان دهید که با انتخاب مناسب پارامترهای R_1, R_2, C_1, C_2 این مدار می‌تواند تحقق فیزیکی یک جبران ساز پیش فاز یا پس فاز باشد.

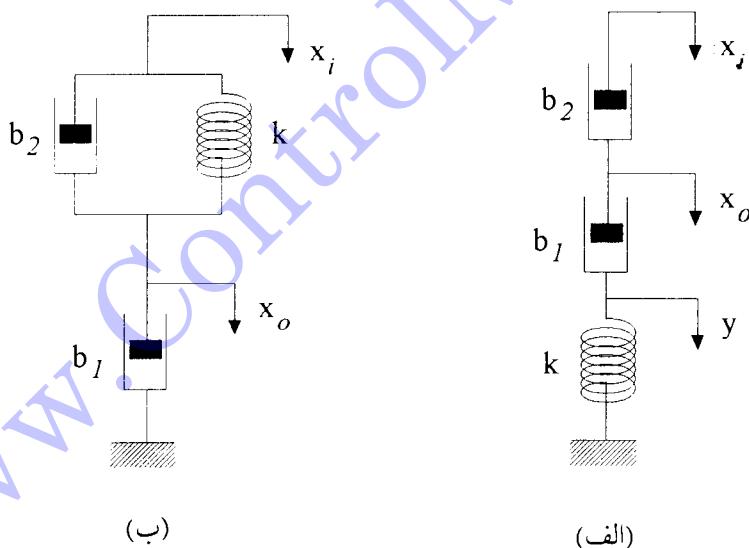
۲-۶. سیستم‌های مکانیکی زیر را در نظر بگیرید:

(الف) نشان دهید که سیستم مکانیکی شکل ۳۸-۶ (الف)، تحقق مکانیکی یک جبران ساز پیش فاز است.

(ب) نشان دهید که سیستم مکانیکی شکل ۳۸-۶ (ب)، تحقق مکانیکی یک جبران ساز پس فاز است.

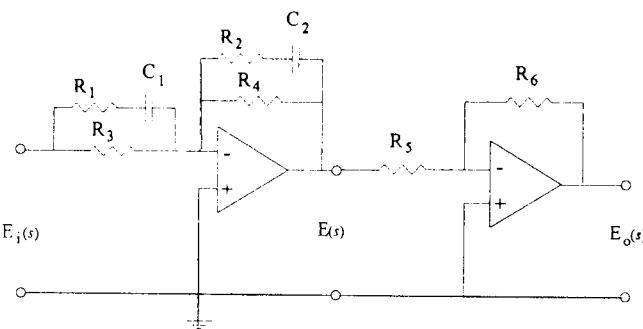


شکل ۳۷-۶



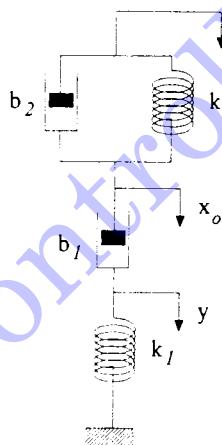
شکل ۳۸-۶

۶-۳. مدار الکترونیکی زیر با استفاده از تقویت کننده های عملیاتی را در نظر بگیرید:
نشان دهید که این مدار تحقق فیزیکی یک جبران ساز پسر - پیش فاز است.



شکل ۳۹-۶

۴-۶. مدار مکانیکی زیر را در نظر بگیرید:



شکل ۴۰-۶

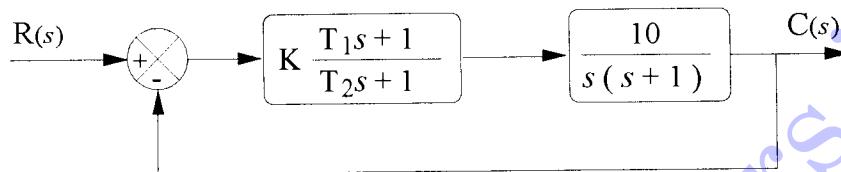
نشان دهید که این مدار تحقق مکانیکی یک جبران ساز پس - پیش فاز است.

۵-۵. تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم حلقه - بسته عبارتست از

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

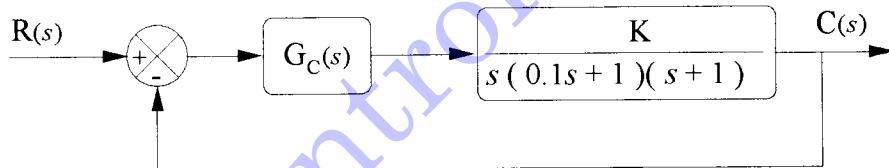
بهره K را چنان تعیین کنید که نسبت میرایی قطبهای حلقه - بسته سیستم ۵٪ باشند.

۶-۶. مقادیر K ، T_1 و T_2 سیستم نشان داده شده در شکل ۴۱-۶ را چنان پیدا کنید که، نسبت میرایی و فرکانس طبیعی غیر میرای قطبهای غالب حلقه - بسته سیستم به ترتیب، $5/0 = \omega_n$ و 3° (رادیان بر ثانیه) باشند.



شکل ۴۱-۶ سیستم کنترل مسئله ۶-۶

۷-۶. سیستم حلقه - بسته نشان داده شده در شکل ۴۲-۶ را در نظر بگیرید. یک جبران ساز پیش فاز $G_C(s)$ چنان طراحی کنید که، حاشیه بهره سیستم حداقل 8dB ، حاشیه فاز سیستم 45° و ثابت خطای سرعت K برابر $1/0$ (ثانیه) باشند.



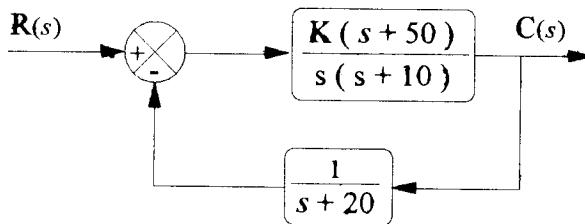
شکل ۴۲-۶ سیستم کنترل مسئله ۷-۶

۸-۶.تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی عبارتست از

$$G(s) = \frac{25}{s(1 + \frac{1}{4}s)(1 + \frac{1}{16}s)}$$

مطلوب است که حاشیه های بهره و فاز سیستم به ترتیب حداقل $1/5\text{dB}$ و 15° باشند. پایداری سیستم حلقه - باز را بررسی کرده و با طراحی یک جبران ساز مناسب پیش فاز سیستم حلقه - بسته را جبران کنید.

۹-۶. برای سیستم نشان داده شده در شکل ۴۳-۶ بهره K را چنان تعیین کنید که حاشیه فاز سیستم حلقه - بسته حداقل 30° و حاشیه بهره آن حداقل 10dB باشد.



شکل ۴۲-۶ سیستم کنترل مسئله ۹-۶

۱۰-۶. تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی عبارتست از

$$G(s) = \frac{40}{s(s+0.05s)(1+0.25s)}$$

سیستم حلقه - بسته با فیدبک واحد با یک جبران ساز سری

$$G_C(s) = \frac{0.1(1+0.1s)}{1+0.01s}$$

جبران شده است. با رسم مکان ریشه سیستم جبران نشده و سیستم جبران شده، اثر جبران سازی را بررسی کنید.

۱۱-۶. تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی عبارتست از

$$G(s) = \frac{K_v}{s(1+0.25s)(1+0.0625s)}$$

با رسم نمودار بود سیستم جبران نشده، پایداری آنرا بررسی کنید. یک جبران ساز پس - پیش فاز چنان طراحی کنید که حاشیه بهره سیستم جبران شده حداقل 50° باشد.

۱۲-۶. تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی عبارتست از

$$G(s) = \frac{4}{s(s+0.05)}$$

با رسم نمودار بود سیستم جبران نشده، یک جبران ساز پس - پیش فاز چنان طراحی کنید که نسبت میرایی قطبهای حلقه - بسته $0/5^\circ$ ، فرکانس طبیعی غیر میرای آنها 5 (رادیان بر ثانیه) و ثابت خطای سرعت استاتیکی سیستم جبران شده 1° (ثانیه) باشد.

۱۴-۶- تابع تبدیل جبران نشده سیستمی عبارتست از

$$G(s) = \frac{K}{s(0.05s + 1)}$$

با رسم نمودار بود سیستم، یک جبران ساز پس فاز، چنان طراحی کنید که ثابت خطای سرعت استاتیکی آن حداقل 1° (ثانیه) ۲۰ بوده و حاشیه فاز آن نیز 45° باشد.

۱۴-۶- تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی عبارتست از

$$G(s) = \frac{K}{s^2}$$

با بکارگیری نمودار مکان ریشه سیستم، جبران ساز پیش فازی چنان طراحی کنید که سیستم جبران شده مشخصه های زیر را برآورده سازد:

زمان استقرار حداکثر 4 ثانیه ، فراجهش حداکثر برای پاسخ پله واحد کمتر از 30%

۱۵-۶- سیستم کنترل نشان داده شده در شکل ۴۴-۶ را در نظر بگیرید. بهره های K و K_h را چنان تعیین کنید که مشخصه های طراحی زیر برآورده گردند:

۱- نسبت میرایی قطب های حلقه - بسته برابر با $5/0$

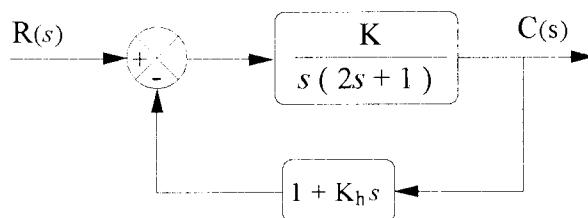
۲- زمان استقرار کوچکتر یا مساوی 2 ثانیه

۳- ثابت خطای سرعت استاتیکی بزرگتر یا مساوی 1° (ثانیه) 50

۴- $1 < K_h < 4$

۱۶-۶- تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی عبارتست از

$$G(s) = \frac{40}{s(s+2)(s+8)}$$



شکل ۱۵-۶ ۴۴-۶ سیستم کنترل مسئله

یک جبران ساز پیش فاز برای سیستم چنان طراحی کنید که حاشیه فاز آن 45° و حاشیه بهره آن 10dB باشند. این جبران ساز را با استفاده از (الف) دیاگرام بود، (ب) چارت نیکولز طراحی کنید.

۶-۱۷- تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی عبارتست از

$$G(s) = \frac{K}{s(s+5)(s+10)}$$

یک جبران ساز پس فاز برای سیستم چنان طراحی کنید که حاشیه فاز آن 45° و حاشیه بهره آن 10dB باشند. این جبران ساز را با استفاده از (الف) مکان ریشه (ب) چارت نیکولز طراحی کنید.

مراجع فصل سشم

- [6-1] Truxal J. G., *Control systems synthesis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1955.
- [6-2] Evans W. R., *Control systems synthesis by the root locus method*, Trans. AIEE, Vol. 69, pp 66, 1950.
- [6-3] Horowitz I. M., *Synthesis of feedback systems*, Academic Press, 1963.
- [6-4] MacFarlane A. G. J., *Frequency response methods in control systems*, IEEE Press, 1979.
- [6-5] Bode H. W., *Network analysis and feedback design*, New York, Van Nostrand Reinhold, 1945.
- [6-6] Ziegler J. G. and Nichols N. B., *Optimum settings for automatic controllers*, ASME Trans, 64, pp 759-768, 1942.
- [6-7] Astrom K. J. and B. Wittenmark, *Adaptive Control*, Addison-Wesley, 1995.
- [6-8] Leigh J. R., *Applied control theory*, IEE Series in Control Engineering, No. 18, 1987.
- [6-9] Marshall J. E., *Control of Time delay systems*, IEE Series in Control Engineering, No. 10., 1978.
- [6-10] Porter B., *Genetic design of control systems*, J. SICE, Vol. 34, No. 5, May 1995.

کتاب شناسی

در این فصل تنها جبران سازهای سری مورد بررسی قرار گرفته‌اند، برای آشنایی با سایر روش‌های جبران سازی (مانند جبران سازی پیشرو و فیدبک) می‌توان به مراجع [11] و [3] مراجعه کرد. مراجع [6-1]، [6-3]، [6-4] و [6-5] جزء اولین کتابهایی هستند که در زمینه طراحی سیستم‌های کنترل کلاسیک نوشته شده‌اند، لذا برای بررسی اولین روش‌های طراحی سیستم‌های کنترل می‌توان به این مراجع مراجعه نمود.

روش‌های بسیاری برای تعیین قطب و صفر جبران سازهای پس فاز، پیش فاز و پس - پیش فاز وجود دارد، یکی از سر راست‌ترین این روش‌ها در مرجع [2] آورده شده است. روش‌های مؤثر دیگری نیز برای تعیین قطبها و صفرهای جبران سازها وجود دارند، برای مثال می‌توان به روش‌های ارایه شده در مراجع [1]، [3]، [4] و [25] اشاره کرد، که عمدتاً با روش‌های ارایه شده در [2] متفاوت می‌باشند و در طراحی سیستم‌های خطی کنترل به طور مؤثری می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند. مبحث مهم جبران سازی با حذف صفر - قطب در فصل نهم [3] مورد بررسی قرار گرفته است. کنترل کننده‌های PID نیز که به صورت حالت خاصی از جبران سازها در این فصل ارایه گردیدند، خود از مهم‌ترین نوع کنترل کننده‌های صنعتی می‌باشند. برای مطالعه این کنترل کننده‌ها و طراحی آنها با مکان ریشه و نمودارهای پاسخ فرکانس به مراجع [2] و [3] مراجعه شود. روش‌های تنظیم پارامترهای این کنترل کننده‌ها در فصل هشتم [6-7]، چهارم [6-8] و همچنین مقاله [6-6] مفصل‌آورده بودند. مراجع [6-8] روش‌های مختلف طراحی کنترل کننده‌های کاربردی را به طور نسبتاً ساده‌ای ارایه کرده است. برای یک روش تنظیم هوشمند پارامترهای کنترل کننده PID به مرجع [10-6] مراجعه کنید.

طراحی جبران سازها با چارت نیکولز نیز به طور مفصل در مراجع [1] و [3] آمده است. مرجع [17]، روش‌های طراحی را به طور خلاصه فشرده با ارایه فلوچارت مناسب برای سیستم‌های زمان - پیوسته و زمان - گسسته آورده است و برای یک مراجعه سریع، و سطحی مناسب است. در مرجع [18] تحقیق فیزیکی بسیاری از کنترل کننده‌ها و جبران سازها، به صورت مدارات الکترونیکی داده شده است و لذا برای یک مطالعه کاربردی و سخت‌افزاری کنترل کننده‌ها و جبران سازها مناسب می‌باشد.

یکی از مراجعی که کاربرد نمودارهای نایکوئیست و معکوس آنها را در طراحی بطور

مختصر در نظر گرفته است [5] می باشد. برای بررسیهای ساده در طراحی به کمک نمودارهای نایکوئیست از این مرجع استفاده شود.

سیاری از سیستم های صنعتی دارای تأخیر می باشند. از اینرو طراحی سیستم های کنترل برای سیستم های تأخیر دار می تواند بسیار مهم باشد. مرجع [6-9] این مطلب را به طور مشخص مورد بحث قرار داده است.



۷

تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل در فضای حالت

اهداف فصل:

- ۱- آشنایی با مفاهیم فضای حالت
- ۲- حل معادلات حالت و خروجی
- ۳- کاربرد تبدیل لاپلاس در فضای حالت
- ۴- آشنایی با معادله مشخصه سیستم و نقش آن در تحلیل سیستم
- ۵- معرفی ایده‌های کنترل پذیری و رؤیت پذیری
- ۶- حذف صفر-قطب درتابع تبدیل و تحلیل آن در فضای حالت
- ۷- طراحی سیستم‌های کنترل در فضای حالت: جایابی قطب
- ۸- آشنایی با رؤیتگرها و تخمین متغیرهای حالت سیستم

۱-۷ مقدمه

در بخش ۲-۵ با توصیف فضای حالت سیستم‌های کنترل آشنا شدیم. معادلات حالت و خروجی یک سیستم با چند ورودی و چند خروجی در حالت کلی، عبارتند از

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

که همان معادله (۱۳-۵-۲) می‌باشد. در این معادلات $\mathbf{x}(t)$ بردار n -بعدی حالت، $\mathbf{u}(t)$ بردار m -بعدی ورودی، $\mathbf{y}(t)$ بردار l -بعدی خروجی، \mathbf{A} ماتریس $n \times n$ حالت، \mathbf{B} ماتریس $n \times m$ ورودی، \mathbf{C} ماتریس $l \times n$ خروجی و \mathbf{D} ماتریس $l \times m$ انتقال سیستم هستند. این نحوه نمایش، برای توصیف سیستم‌های پیچیده صنعتی با چند ورودی و چند خروجی بسیار مناسب است و همانطور که در این فصل خواهیم دید، بسیاری از محاسبات خسته کننده در تحلیل و طراحی این سیستم‌ها را می‌توان به سادگی در فضای حالت توسط یک کامپیوتر انجام داد.

شوری کنترل کلاسیک یا سنتی^۱، که قسمت اعظم این کتاب در فصلهای ۲ تا ۶ به آن اختصاص دارد، براساس رابطه ورودی - خروجی یاتابع تبدیل در حوزه \mathfrak{H} بنا نهاده شده است و بسیاری از این شوری‌ها برای سیستم‌های چند ورودی و چند خروجی و یا سیستم‌های مرتبه بالا صورت بسیار پیچیده‌ای به خود می‌گیرند. حال آنکه در بخش ۲-۵-۱ مشاهده شد که تابع تبدیل هر سیستمی از هر مرتبه‌ای وامی‌توان به یک دسته از n معادلات دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل کرد و به صورت معادلات فضای حالت مرتبه اول بالا نمایش داد. این نمایش بردار - ماتریسی، توصیف ریاضی سیستم‌های مرتبه بالا را بسیار ساده می‌کند و افزایش تعداد متغیرهای حالت (مرتبه سیستم یا تعداد قطبهای تابع تبدیل برای یک نمایش می‌نیمال)، تعداد ورودیها یا تعداد خروجیها هیچکدام پیچیدگی معادلات را افزایش نمی‌دهد. در واقع تحلیل سیستم‌های بسیار پیچیده چند ورودی و چند خروجی را می‌توان با روش‌های انجام داد که تنها اندکی از روشهای تحلیل سیستم مرتبه یک اسکالر پیچیده‌تر می‌باشند. (آیا

این چنین ادعایی در رابطه با تحلیلهای ارایه شده در فصلهای قبل براساس روابط وروdi و خروجی ڈامکان پذیر است؟)

در این فصل علاوه بر تحلیل، به طراحی در فضای حالت نیز خواهیم پرداخت. در فصل ششم، طراحی کلاسیک یا سنتی سیستم‌های کنترل براساس روش‌های ترسیمی مکان ریشه، نمودارهای بود، نایکوئیست و چارت نیکولز را بررسی کردیم. مشخصه‌های این طراحیها عبارتند از:

- تنها پارامترهای مهم، وروdi، خروجی و سیگنال خطأ هستند.

- طراحیها براساس تابع تبدیل حوزه انجام می‌گیرد.

- تنها به سیستم‌های خطی، تغییرناپذیر با زمان، یک وروdi و یک خروجی قابل اعمالند.

- روش‌های کلاسیک طراحی را نمی‌توان در طراحی بهینه و یا تطبیقی سیستم‌های کنترل که عمدتاً تغییرپذیر با زمان و یا غیر خطی هستند بکار بست.

- روش‌های طراحی براساس سعی و خطأ هستند و سیستم‌های کنترل طراحی شده توسط افراد مختلف یا یک فرد در دفعات متعدد با هم متفاوت هستند. لذا این سیستم‌ها یک سیستم بهینه را در حالت کلی بدست نخواهند داد.

- در طراحیهای کلاسیک سیستم‌های کنترل، شرایط اولیه سیستم نادیده گرفته می‌شود. از طرف دیگر، طراحی سیستم‌های کنترل در فضای حالت دست یابی به موقعیت مطلوب قطبها (یا معادله مشخصه) را امکان‌پذیر می‌سازد و بسادگی می‌توان سیستم‌هایی را طراحی کرد که نسبت به یک شاخص عملکرد تعیین شده بهینه باشند. در این طراحیها، عامل سعی و خطأ به حداقل می‌رسد و طراحی سیستم‌های چند متغیره نیز به همین ترتیب انجام می‌پذیرد. با توجه به اینکه روش‌های فضای حالت حوزه زمانی هستند، انجام محاسبات لازم را می‌توان بسادگی توسط یک کامپیوتر دیجیتال انجام داد. در این فصل جهت آشنایی با این طراحیها، تنها به ساده‌ترین نوع طراحی که جایای قطب با فیدبک حالت و طراحی رؤیتگر است می‌پردازیم و اشاره بسیار مختصراً نیز به کنترل بهینه خواهیم نمود. در تحلیل و طراحیهای این فصل تنها سیستم‌های خطی و تغییرناپذیر با زمان در نظر گرفته خواهد شد.

۲-۷ حل معادلات حالت و خروجی

معادله حالت و خروجی زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1-2-7)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2-2-7)$$

اگر معادله حالت (۱-۲-۷) را به ازاء یک ورودی معین و شرایط اولیه داده شده حل کنیم، پاسخ متغیرهای حالت سیستم را به ورودی اعمال شده به سیستم بدست می‌آوریم. با جایگزینی بردار حالت محاسبه شده $(t)x$ از معادله (۱-۲-۷) در معاله خروجی (۲-۲-۷) پاسخ سیستم را به ازاء همان ورودی و شرایط اولیه بدست آورده‌ایم. دقت کنید که اگر برای مثال، معادلات حالت و خروجی (۱-۲-۷) و (۲-۲-۷) معادلات توصیف کننده مدار الکتریکی در نظر گرفته شده در مثال ۳-۵-۲ باشند، برای ولتاژ اعمال شده به مدار، رفتار متغیرهای حالت که در این مثال جریان حلقه اول و ولتاژ خازن هستند را می‌توان با حل معادله (۱-۲-۷) تعیین کرد. رفتار خروجی مدار که همان ولتاژ خازن است نیز در حالت کلی از معادله (۲-۲-۷) بدست آورده می‌شود.

معادله حالت (۱-۲-۷) از دو قسمت همگن^۱، $(t)Ax$ و تابع وادارنده^۲، $(t)Bu$ تشکیل می‌شود. قبل از آنکه به حل کامل معادله حالت پردازیم، معادله اسکالر دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x}(t) = ax(t) \quad (3-2-7)$$

که در آن a یک اسکالر است و شرایط اولیه معادله دیفرانسیل $(t_0)x$ است. پاسخ معادله (۳-۲-۷) عبارتست از

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x(t_0) \quad (4-2-7)$$

جایگزینی معادله (۴-۲-۷) در معادله (۳-۲-۷) بسادگی نشان خواهد داد که معادله (۴-۲-۷) پاسخ معادله (۳-۲-۷) است. اکنون اگر معادله همگن حالت را به صورت زیر در نظر بگیریم

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (5-2-7)$$

از مقایسه معادله های (۶-۲-۵) و (۶-۲-۷)، پاسخ قسمت همگن معادله حالت ($\mathbf{x}(t) \equiv 0$)

عبارتست از

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0) \quad (6-2-7)$$

که در آن ($\mathbf{x}(0)$ بردار اولیه حالت است. مسئله اصلی در محاسبه ($\mathbf{x}(t)$) بددست آوردن تابع نمائی ماتریس A ، $\exp[At]$ است. همانطور که تابع نمائی e^{at} در معادله (۶-۲-۴) را می توان برای $t = 0$ به صورت سری بینهایت زیر محاسبه کرد

$$e^{at} = 1 + \frac{at}{1!} + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \dots + \frac{(at)^k}{k!} + \dots \quad (7-2-7)$$

تابع نمائی ماتریس A در معادله (۶-۲-۷) نیز برای $t = 0$ مانند سری بینهایت (۷-۲-۷) محاسبه می گردد. داریم

$$e^{At} = \exp[At] = 1 + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots + \frac{(At)^k}{k!} + \dots \quad (8-2-7)$$

بنابراین $\exp[At]$ نیز یک ماتریس مربع با اندازه A است. به ماتریس $\exp[At]$ ماتریس انتقال حالت^۱ یا ماتریس اساسی^۲ گفته می شود. با توجه به اهمیت ماتریس انتقال حالت، روش های زیادی نیز برای محاسبه این ماتریس وجود دارد که برای دستیابی به آنها، در صورت نیاز به مرجع اول همین فصل مراجعه شود.

روش تبدیل لاپلاس در حل معادله همگن حالت ($\mathbf{x}(0) \equiv 0$) با گرفتن تبدیل لاپلاس از معادله (۶-۲-۵) برای $t = 0$ ، بددست می آوریم

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = A\mathbf{X}(s) \quad (9-2-7)$$

و یا

$$[sI - A]\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0) \quad (10-2-7)$$

با ضرب کردن طرفین معادله (۱۰-۲-۷) در $[sI - A]^{-1}$ ، داریم

$$\mathbf{X}(s) = [sI - A]^{-1} \mathbf{x}(0) \quad (11-2-7)$$

با گرفتن عکس تبدیل لاپلاس از معادله (۱۱-۲-۷)، برای کلید $t \geq 0$ بددست می آوریم

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ [sI - A]^{-1} \right\} \mathbf{x}(0) \quad (12-2-7)$$

مقایسه معادله های (12-2-7) و (6-2-7)، نتیجه می دهد

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ [sI - A]^{-1} \right\} \quad (13-2-7)$$

معادله (13-2-7)، روش تبدیل لاپلاس برای محاسبه ماتریس انتقال حالت است.

اگر ماتریس انتقال حالت را با $\Phi(t)$ نمایش دهیم، معادله های (12-2-7) و (13-2-7)

عبارتند از

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \mathbf{x}(0) \quad (14-2-7)$$

معادله (14-2-7) را پاسخ ورودی - صفر^۱ معادله حالت (با $x_0 = 0$) می نامند.

مثال ۱-۷

پاسخ سیستم زیر

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

را برای بردار اولیه حالت $\mathbf{x}(0) = [1 \ 0]^T$ بدست آورید.

نخست ماتریس انتقال حالت را تعیین می کنیم. برای تعیین این ماتریس داریم

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix}$$

معکوس ماتریس $[sI - A]$ عبارتست از

$$[sI - A]^{-1} = \frac{1}{(s+3)(s+1)} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix}$$

ماتریس انتقال حالت را با گرفتن عکس تبدیل لاپلاس از معادله بالا و به کارگیری یک جدول

تبدیل لاپلاس، بدست می آوریم

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ [sI - A]^{-1} \right\}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 3e^{-3t} - 3e^{-t} & 2e^{-3t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

معادله (۱۴-۲-۷)، پاسخ سیستم را به شرایط اولیه داده شده می‌دهد. لذا

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

حل کامل معادلات حالت و خروجی. معادله اسکالر دیفرانسیلی زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \quad (15-2-7)$$

معادله (۱۵-۲-۷) را به صورت زیر بازنویسی کنید

$$\dot{x}(t) - ax(t) = bu(t) \quad (16-2-7)$$

با ضرب طرفین معادله (۱۶-۲-۷) در e^{-at} ، بدست می‌آوریم

$$e^{-at} [\dot{x}(t) - ax(t)] = \frac{d}{dt} [e^{-at}x(t)] = e^{-at}bu(t)$$

$$\text{انتگرالگیری از این معادله بین } 0 \text{ و } t \text{ می‌دهد} \\ x(t) = e^{at}x(0) + e^{at} \int_0^t e^{-a\tau} bu(\tau) d\tau \quad (17-2-7)$$

ولین عبارت در معادله (۱۷-۲-۷) ناشی از شرایط اولیه $x(0)$ است، و دومین عبارت در پاسخ به ورودی $(t)u$ بدست آمده است.

معادله حالت زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \quad (18-2-7)$$

که در آن $\mathbf{x}(t)$ بردار n -بعدی، $\mathbf{u}(t)$ بردار m -بعدی، A ماتریس ثابت $n \times n$ و B ماتریس ثابت $n \times m$ است. با مقایسه معادله اسکالر (۱۵-۲-۷)، و معادله بردار ماتریسی (۱۸-۲-۷)، و با استفاده از روندی مانند مراحل بالا، پس از بازنویسی معادله (۱۸-۲-۷)، و پیش ضرب کردن

طرفین معادله بازنویسی شده در e^{-At} ، داریم

$$e^{-At} [\dot{\mathbf{x}}(t) - A\mathbf{x}(t)] = \frac{d}{dt} [e^{-At}\mathbf{x}(t)] = e^{-At}B\mathbf{u}(t) \quad (19-2-7)$$

انتگرال‌گیری از طرفین معادله (۲-۷-۱۹)، بین 0 و t ، بدست می‌دهد

$$e^{-At} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \quad \text{و یا}$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (20-2-7)$$

معادله (۲۰-۲-۷)، پاسخ کامل معادله حالت سیستم به ورودی $u(t)$ با شرایط اولیه $\mathbf{x}(0)$ است. اگر $\mathbf{x}(0) = 0$ باشد، آنگاه با جایگزینی بردار اولیه حالت صفر در معادله (۲۰-۲-۷)، پاسخ حالت - صفر^۱ سیستم بدست خواهد آمد.

با جایگزینی $\mathbf{x}(t) = Cx(t)$ در معادله خروجی $y(t) = Cx(t)$ ، پاسخ سیستم (خروجی) به ورودی معین با شرایط اولیه داده شده به صورت زیر بدست می‌آید

$$y(t) = Ce^{At} \mathbf{x}(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (21-2-7)$$

روش تبدیل لاپلاس در حل معادله کامل حالت و خروجی. با گرفتن تبدیل لاپلاس از

معادله (۱۸-۲-۷)، داریم

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = A\mathbf{X}(s) + BU(s) \quad (22-2-7)$$

بازنویسی معادله (۲۲-۲-۷)، می‌دهد

$$\mathbf{X}(s) = [sI - A]^{-1} \mathbf{x}(0) + [sI - A]^{-1} BU(s) \quad (23-2-7)$$

عكس تبدیل لاپلاس معادله (۲۳-۲-۷)، عبارتست از

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ [sI - A]^{-1} \right\} \mathbf{x}(0) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ [sI - A]^{-1} BU(s) \right\} \quad (24-2-7)$$

با استفاده از انتگرال کانولوشنی و نمایش $\Phi(t)$ ، معادله (۲۴-۲-۷) می‌دهد

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau) u(\tau) d\tau \quad (25-2-7)$$

در معادله‌های (۲-۷-۲۰)، (۲-۷-۲۱) و (۲-۷-۲۵) فرض کردہ‌ایم که زمان اولیه $\mathbf{x}(0) = 0$ باشد.

برای $t \neq t_0$ نیز می‌توان به طور مشابهی از مراحل بالا برای تعیین پاسخ سیستم استفاده کرد. در این صورت

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \quad (26-2-7)$$

$$\mathbf{y}(t) = C e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \quad (27-2-7)$$

مثال ۷-۷

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

خروجی سیستم را برای ورودی پله واحد و شرایط اولیه $\mathbf{x}(0) = [1 \ 0]^T$ بدست آورید.

ماتریس انتقال حالت سیستم را از مثال ۷-۱ بدست آوردیم. داریم

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+3)(s+1)} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \Phi(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 3e^{-3t} - 3e^{-t} & 3e^{-3t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

از معادله (۲۰-۲-۷)، بدست می‌آوریم

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} + \int_0^t \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)} \\ 3e^{-3(t-\tau)} - 3e^{-(t-\tau)} & 3e^{-3(t-\tau)} - e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau \quad (1)$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{t-\tau} - e^{3\tau-3t} \\ 3e^{3\tau-3t} - e^{t-\tau} \end{bmatrix} d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 - 3e^{-t} + e^{-3t} \\ 3e^{-t} - 3e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} \\ -\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \end{bmatrix}$$

ولذا از معادله خروجی داریم

$$y(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t}$$

هم چنین از روش تبدیل لاپلاس، داریم

$$(sI - A)^{-1}BU(s) = \frac{1}{(s+3)(s+1)} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} \frac{1}{s}$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{(s+3)(s+1)} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{(s+3)(s+1)} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+3)(s+1)} \left\{ \begin{bmatrix} s+3 \\ -(s+3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

و برای خروجی سیستم بدست می‌آوریم

$$Y(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{s(s+3)(s+1)}$$

که عکس تبدیل لاپلاس می‌دهد

$$y(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t}$$

۳-۷ معادله مشخصه

در بخش ۳-۵-۲، رابطه بین تابع تبدیل و معادله فضای حالت را بیان کردیم. در آن بخش نشان داده شد که نمایش فضای حالت سیستمی داده شده به صورت زیر

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1-3-7)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2-3-7)$$

با نمایش تابع تبدیل آن

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (3-3-7)$$

بعد از گرفتن تبدیل لاپلاس از معادله‌های (۱-۳-۷) و (۲-۳-۷)، و با یکسری عملیات جبری، بدین صورت با هم مرتبط می‌باشند:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (4-3-7)$$

با استفاده از تعریف معکوس ماتریس

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{|sI - A|} \quad (5-3-7)$$

و جایگزینی از معادله (5-3-7) در معادله (4-3-7)، بدست می‌آوریم

$$G(s) = \frac{C\{\text{adj}(sI - A)\} B + |sI - A| D}{|sI - A|} \quad (6-3-7)$$

مخرج معادله (6-3-7) عبارتست از

$$|sI - A| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 \quad (7-3-7)$$

این معادله را معادله مشخصه^۱ ماتریس A می‌نامند. صفرهای این چند جمله‌ای (ریشه‌های معادله مشخصه)، مقادیر ویژه^۲ ماتریس A بوده و همان‌طور که از معادله (6-3-7) مشخص است، این مقادیر ویژه همان قطبهای تابع تبدیل G(s) هستند.

پایداری سیستم. با توجه به اینکه پایداری سیستم‌ها، از موقعیت قطبهای تابع تبدیل آنها تعیین می‌گردد و مقادیر ویژه ماتریس حالت سیستم A همان قطبهای تابع تبدیل (5) هستند، لذا برای بررسی پایداری سیستم در فضای حالت می‌توان مقادیر ویژه A را تعیین کرد. مقادیر ویژه A حقیقی یا مختلط مزدوج می‌باشند. وقت کنید که ضرایب معادله مشخصه (7-3-7)، حقیقی هستند (a_{n-1}, ..., a₀ ∈ ℝ) و از این‌رو ریشه‌های آن حقیقی و یا به صورت مختلط مزدوج می‌باشند. نتایج پایداری را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

اگر مقادیر ویژه حقیقی A همگی منفی باشند، سیستم پایدار است.

اگر مقادیر ویژه مختلط مزدوج A همگی قسمتهای حقیقی منفی داشته باشند، سیستم پایدار است.

اگر مقادیر ویژه A موهومی محض باشند، سیستم پایدار بحرانی است (پاسخ نوسانات سینوسی غیرمیرا دارد). اگر مقادیر ویژه موهومی محض A تکراری باشند (چند قطب موهومی محض در یک نقطه بروی محور موهومی داشته باشد)، سیستم ناپایدار است.

اگر حتی یکی از مقادیر ویژه در سمت راست محور موهومی قرار گرفته باشد، سیستم ناپایدار است.

مثال ۴-۷

ماتریس حالت سیستمی عبارتست از

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه سیستم عبارتست از

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda + 6 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 \\ &= (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0 \end{aligned}$$

مقادیر ویژه ماتریس A ، قطب‌های سیستم، عبارتند از

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -3$$

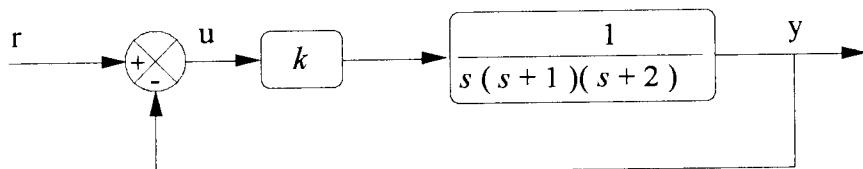
ولذا سیستم پایدار است.

مثال ۴-۸

سیستم نشان داده شده در شکل ۴-۷ را در نظر بگیرید. مطلوب است که پارامتری سیستم را با تعیین مقادیر ویژه ماتریس حالت سیستم، برای تغییرات بهره k تعیین کنیم. برای نوشتن معادلات حالت و خروجی سیستم، می‌توان نخست معادلات فضای حالت تابع تبدیل حلقه - باز را نوشت و سپس با اعمال فیدبک در معادلات حلقه - باز فضای حالت، معادلات حلقه - بسته فضای حالت سیستم از ۲ تا ۳ را بدست آورده. هم چنین می‌توان با انتخاب متغیرهای حالت مناسب، مستقیماً معادلات فضای حالت حلقه - بسته را نوشت.

تابع تبدیل حلقه - باز سیستم کنترل شکل ۴-۷ عبارتست از

$$G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$$



شکل ۷-۱ یک سیستم کنترل

معادلات فضای حالت حلقه - باز عبارتند از (بخش ۲-۵-۱، معادلات ۱۲-۵-۲ و ۱۳-۵-۲ را ببینید).

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

برای اعمال فیدبک، داریم $u = r - C\mathbf{x}$ و لذا

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (r(t) - \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t))$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k & -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

بدیهی است که ماتریس‌های ورودی B و خروجی C در پایداری سیستم نقشی ایفاء نمی‌کنند. قطب‌های سیستم مقادیر ویژه ماتریس حالت سیستم حلقه - بسته A هستند. از این‌رو، معادله مشخصه سیستم را تشکیل می‌دهیم

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ k & 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + k$$

ریشه‌های این معادله باید همگنی در سمت چپ محور موهومی قرار داشته باشند. برای بررسی موقعیت ریشه‌های معادله مشخصه، از آزمون پایداری جوری استفاده می‌کنیم:

$$\begin{array}{c|cc} \lambda^3 & 1 & 2 \\ \lambda^2 & 3 & k \\ \lambda^1 & \frac{6}{3} & k \\ \lambda^0 & k & \end{array}$$

ولذا برای پایداری داریم $k < 6$.

روش دیگر نوشتن معادلات فضای حالت آن است که تابع تبدیل حلقه - باز را به صورت نشان داده شده در شکل ۲-۷ درآوریم. با انتخاب متغیرهای حالت نشان داده شده در شکل ۲-۷، معادلات حالت و خروجی سیستم حلقه - بسته عبارتند از

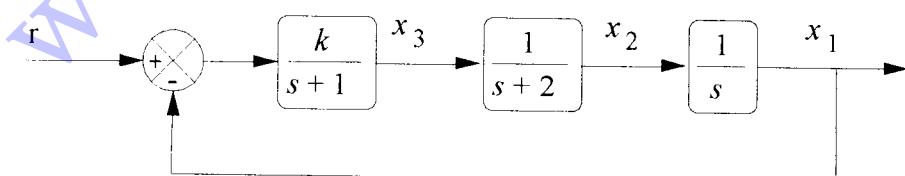
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -k & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix} r(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

این نمایش فضای حالت دیگری از همان سیستم است. معادله مشخصه این نمایش فضای حالت عبارتست از

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 & -1 \\ k & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + k$$

که همانند معادله مشخصه نمایش قبلی فضای حالت است. این نتیجه در حالت کلی نیز صادق است و به صورت زیر بیان می‌گردد:



شکل ۲-۷ سیستم کنترل شکل ۱-۷

«معادله مشخصه یک سیستم برای نمایش‌های مختلف فضای حالت آن یکسان است»، مطلب فوق کاملاً بدینه است، زیرا کلیه نمایش‌های مختلف فضای حالت یک سیستم، یک تابع تبدیل منحصر بفرد را خواهند داد و چند جمله‌ای مخرج تابع تبدیل که همان معادله مشخصه سیستم است، نیز منحصر بفرد می‌باشد. تنها نکته‌ای که باید به آن اشاره شود این است که معادلات فضای حالت در نظر گرفته شده تاکنون می‌نیمال بوده‌اند (به بخش ۵-۲ برای تعریف مدل فضای حالت می‌نیمال مراجعه کنید). در صورتیکه نمایش فضای حالتی از یک سیستم می‌نیمال نباشد، درجه چند جمله‌ای مشخصه آن بزرگتر از درجه چند جمله‌ای معادله مشخصه نمایش فضای حالت می‌نیمال خواهد بود.

۴-۷ کنترل پذیری و رؤیت پذیری

مفاهیم و ایده‌های موجود در کنترل مدرن و تحلیل و طراحی فضای حالت بر دو دسته‌اند: دسته اول مفاهیمی مانند پایداری و مشخصه‌های پاسخ حالت گذرا و ... که در کنترل کلاسیک نیز مطرح بوده‌اند و در اینجا تنها نحوه برخورد با آنها فرق کرده است، دسته دوم مفاهیمی هستند که مخصوص تحلیل و طراحی در فضای حالت می‌باشند. کنترل پذیری و رؤیت پذیری از مفاهیم دسته دوم می‌باشند. این ایده‌ها اول بار توسط کالمن^۱ مطرح گردیده‌اند.

۱-۴-۷ مفاهیم کنترل پذیری و رؤیت پذیری

معادلات حالت و خروجی یک سیستم در حالت کلی عبارتند از:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1-4-7)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (2-4-7)$$

دیاگرام بلوکی این نمایش خطی تغییرناپذیر با زمان، در شکل ۲۸-۲ فصل دوم نشان داده شده است. در این توصیف سیستم، ورودی $\mathbf{u}(t)$ و خروجی $\mathbf{y}(t)$ توسط یک رابط، حالت سیستم $\mathbf{x}(t)$ ، با هم مرتبط شده‌اند.

نمایش شکل ۲۸-۲، معادلات (۱-۴-۷) و (۲-۴-۷)، یک نمایش حلقه - باز از سیستم است. برای بستن حلقه سیستم می‌توان از پس خوراندن اطلاعات لازم در رابطه با پاسخ

سیستم توسط بردار حالت $(t)x$ استفاده کرد. ورودی کنترل را به صورت زیر تعریف کنید:

$$u(t) = -Kx(t) \quad (3-4-7)$$

که در آن K یک ماتریس $m \times n$ فیدبک با عناصر ثابت است. دقت کنید که بردار حالت n -بعدی، بردار ورودی m -بعدی و بردار خروجی n -بعدی در نظر گرفته شده‌اند. از این‌رو ماتریس فیدبک حالت K $m \times n$ می‌باشد و برای سیستم‌های یک ورودی، K یک بردار $n \times 1$ خواهد بود.

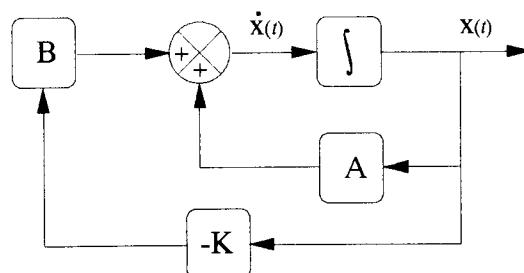
با جایگزینی معادله (3-4-7) در (1-4-7)، معادله حلقه - بسته حالت عبارتست از

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \quad (4-4-7)$$

دیاگرام بلوکی سیستم حلقه - بسته، در شکل ۳-۷ نشان داده شده است. معادله (4-4-7)، یک معادله همگن حالت است و لذا همانند معادله (۲-۲-۶)، پاسخ آن بدین صورت داده می‌شود

$$x(t) = \exp[(A - BK)(t - t_0)]x(t_0) \quad (5-4-7)$$

معادله (5-4-7) نشان می‌دهد که برای ماتریس‌های داده شده A و B و بردار حالت اولیه $(t_0)x$ می‌توان در حالت کلی با تغییر ماتریس فیدبک حالت K بر رفتار $x(t)$ تأثیر گذاشت. اما تا چه اندازه تغییر دادن K بر روی متغیرهای انتخاب کرد که بردار حالت $(t_1)x$ در زمانی مانند t_1 مقدار دلخواه $(t_1)x$ را داشته باشد و یا اینکه بردار حالت $(t)x$ به ازاء $t \rightarrow \infty$ به یک مقدار حالت - ماندگار برسد؟ تمامی این پرسشها را می‌توان در این سؤال خلاصه کرد که آیا سیستم داده شده کنترل پذیر حالت است؟



شکل ۳-۷ سیستم حلقه - بسته با فیدبک حالت

قبل از آنکه به ارایه تعریف کنترل پذیری سیستم پردازیم، سیستم اسکالر زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \quad (6-4-7)$$

معادله (6-4-7)، همان معادله (6-1)، برای حالت اسکالر است. با تعریف

$$u(t) = -kx(t) \quad (6-4-8)$$

و جایگزینی (5-4-7) در (6-4-7)، داریم

$$\dot{x}(t) = (a - bk)x(t) \quad (6-4-9)$$

و یا

$$x(t) = \exp[(a - bk)(t - t_0)] x(t_0) \quad (7-4-7)$$

معادله های (6-4-7) و (7-4-7)، به وضوح نشان می دهند که تغییر پارامتر k بر روی رفتار متغیر حالت $x(t)$ تأثیر خواهد گذاشت، اگر و فقط اگر اسکالر b مخالف صفر باشد. اگر b صفر باشد آنگاه $x(t)$ به صورت معینی که به پارامترهای ثابت a و t_0 بستگی خواهد داشت، رفتار می کند و پارامتر k هیچ تأثیری در رفتار سیستم نخواهد کرد. برای b مخالف صفر، با انتخاب k به صورت $\langle a - bk \rangle$ پاسخ سیستم پایدار و برای $\langle a - bk \rangle$ ناپایدار خواهد بود. تعریف کنترل پذیری. سیستم توصیف شده با (6-1) را کنترل پذیر حالت¹ گویند، اگر یک کنترل (t) وجود داشته باشد که حالت (t_0) را به هر حالت مطلوب (t) در زمان محدود $\langle t_1, t_2 \rangle$ انتقال دهد. اگر نتوان کنترل (t) را پیدا کرد که بردار حالت اولیه را به هر بردار حالت نهایی مطلوب انتقال دهد، سیستم را کنترل ناپذیر حالت² گویند.

بديهی است که سیستم اسکالر داده شده با (6-4-7) برای $b \neq 0$ ، کنترل پذیر و برای $b = 0$ ، کنترل ناپذیر است. در سیستم های غیر اسکالر (سیستم های داده شده با معادله های بردار - ماتریسی (6-4-7)) تعیین کنترل پذیری و یا کنترل ناپذیری به سادگی سیستم های اسکالر صورت نمی پذیرد و برای این کار آزمونهای ویژه ای وجود دارد که در بخش بعد به توضیح آنها خواهیم پرداخت.

رؤیت پذیری. سیستم اسکالر داده شده با معادله (۴-۶-۷) را در نظر بگیرید. اگر معادله

خروجی این سیستم به صورت زیر باشد

$$y(t) = c_1 x_1(t) \quad (4-6-7)$$

که در آن c_1 یک اسکالر است، آنگاه به شرط آنکه $c_1 \neq 0$ باشد، با مشاهده خروجی $y(t)$ داده شده با معادله (۴-۶-۸)، می‌توان رفتار متغیر حالت $x_1(t)$ را تعیین کرد. به این چنین سیستمی که بتوان با اندازه‌گیری خروجی و مشاهده آن، در رابطه با کلیه متغیرهای حالت اطلاعاتی کسب نمو، رؤیت پذیر گویند. برای روشنتر شدن مطلب به سیستم زیر توجه کنید

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = [c_1 \ c_2] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

در این حالت ورودی سیستم صفر است. معادله حالت و خروجی سیستم را بدین صورت بازنویسی می‌کنیم

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -2x_2(t)$$

$$y(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

بدیهی است که اگر $c_1 = 0$ باشد، با مشاهده خروجی هیچ اطلاعاتی در رابطه با متغیر حالت $x_1(t)$ بدست نمی‌آید. هم‌چنین اگر $c_2 = 0$ باشد، با مشاهده خروجی هیچ اطلاعاتی در رابطه با متغیر حالت $x_2(t)$ نیز بدست نمی‌آید. در هر دو حالت سیستم را رؤیت ناپذیر گویند. در واقع، این سیستم تنها در صورتی رؤیت پذیر است که اسکالرهای c_1 و c_2 هر دو مخالف صفر باشند. به عبارت دیگر، هر دو متغیر حالت در خروجی ظاهر می‌شوند.

در نمایش سیستم‌ها ممکن است برخی از متغیرهای حالت متناظر با متغیرهای فیزیکی قابل اندازه‌گیری در سیستم نباشند و یا اینکه بدلایلی نتوان متغیرهای حالت فیزیکی سیستم را اندازه‌گیری کرد، در این موارد باید بتوان بردار حالت سیستم را از داده‌های ورودی - خروجی

تعیین نمود، برای تعیین بردار حالت از داده‌های ورودی - خروجی، سیستم باید رؤیت پذیر باشد.

تعریف رؤیت پذیری. سیستم داده شده با معادلات (۱-۴-۷) و (۲-۴-۷) را رؤیت پذیر^۱ گویند، اگر بتوان بردار حالت سیستم $(t)x$ را بروی یک گستره محدود زمانی مانند (۱-۴-۷) مشاهده خروجی، بر روی همان گستره تعیین کرد.

دقت کنید که در تعریف و ایده کنترل پذیری ماتریس (بردار) خروجی C نقشی ایفاء نمی‌کند و هم چنین در تعریف و ایده رؤیت پذیری ماتریس (بردار) ورودی B نقشی ایفاء نمی‌کند. بنابراین کنترل پذیری به ورودی $(t)u$ ، بردار حالت $(t)x$ و ماتریس‌های A و B بستگی دارد و حال آنکه رؤیت پذیری به خروجی $(t)y$ ، بردار حالت $(t)x$ و ماتریس‌های A و C بستگی دارد. این وابستگیها در آزمونهای کنترل پذیری و رؤیت پذیری بیشتری آشکار خواهد شد.

۲-۴-۷ آزمونهای کنترل پذیری و رؤیت پذیری

آزمونهای زیادی در رابطه با تعیین کنترل پذیری و رؤیت پذیری سیستم وجود دارند. در اینجا، ساده‌ترین آنها را بدون اثبات ارایه خواهیم کرد. [برای آزمونهای دیگر و اثبات این آزمونها به مراجع همین فصل مراجعه شود].

آزمون کنترل پذیری. سیستم داده شده با معادله حالت (۱-۴-۷) را کنترل پذیر کامل حالت (یا کنترل پذیر) گویند اگر ماتریس کنترل پذیری Φ_c تعریف شده به صورت زیر

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} B & : & AB & : & \dots & : & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (9-4-7)$$

دارای رتبه کامل باشد و یا به عبارت دیگر n بردار مستقل خطی داشته باشد [برای تعاریف رتبه ماتریس و استقلال یا وابستگی خطی بردارها به مراجع همین فصل مراجعه شود]. در صورتیکه سیستم دارای یک ورودی باشد، ماتریس Φ_c یک ماتریس $n \times n$ است و شرط کنترل پذیری سیستم، ناویژه بودن ماتریس کنترل پذیری Φ_c ($|\Phi_c| \neq 0$) است.

مثال ۵-۷

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

ماتریس کنترل پذیری این سیستم عبارتست از

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} B & : & AB \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & : & 1 \\ 1 & : & -3 \end{bmatrix}$$

از آنجایکه $\text{rk}(\Phi_c) = 2$ رتبه می‌باشد، سیستم کنترل پذیر کامل حالت است.

مثال ۶-۷

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

ماتریس کنترل پذیری این سیستم عبارتست از

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} B & : & AB \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & : & 1 \\ 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

رتبه ماتریس کنترل پذیری برابر ۱ است و هم چنین $\text{rk}(\Phi_c) = 1$ است، لذا سیستم کنترل ناپذیر است.

مثال ۷-۷

ماتریس حالت سیستمی با دو ورودی عبارتست از

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

که در آن $\alpha \neq 0$ است، ماتریس کنترل‌پذیری سیستم برای ماتریس ورودی $B = [bij]$ ، عبارتست از $(i=1,2,3, j=1,2)$

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} B & : & AB & : & A^T B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \alpha b_{11} & \alpha b_{12} & \alpha^T b_{11} & \alpha^T b_{12} \\ b_{21} & b_{22} & \alpha b_{21} & \alpha b_{22} & \alpha^T b_{21} & \alpha^T b_{22} \\ b_{31} & b_{32} & \alpha b_{31} & \alpha b_{32} & \alpha^T b_{31} & \alpha^T b_{32} \end{bmatrix}$$

رتبه این ماتریس همواره برابر با ۲ است و لذا سیستم کنترل ناپذیر می‌باشد. آزمون رؤیت‌پذیری سیستم توصیف شده با معادله‌های (۱-۴-۷) و (۲-۴-۷)، رؤیت‌پذیر است اگر ماتریس رؤیت‌پذیری Φ_o^1 ، تعریف شده به صورت زیر

$$\Phi_o^1 = \begin{bmatrix} C \\ \dots \\ CA \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (10-4-7)$$

دارای رتبه کامل باشد. برای سیستم‌های با یک خروجی، آزمون رؤیت‌پذیری آن است که ماتریس رؤیت‌پذیری $n \times n$ ناویژه باشد $(|\Phi_o^1| \neq 0)$.

مثال ۸-۷

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

ماتریس رؤیت‌پذیری این سیستم عبارتست از

$$\Phi_0 = \begin{bmatrix} C \\ \dots \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

رتبه این ماتریس برابر با یک است، از این‌رو سیستم رؤیت‌نپذیر می‌باشد.

مثال ۹-۷

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس رؤیت‌پذیری این سیستم عبارتست از

$$\Phi_0 = \begin{bmatrix} C \\ \dots \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

رتبه این ماتریس برابر با ۲ است و ماتریس ناویژه است، لذا سیستم کاملاً رؤیت‌پذیر می‌باشد.

مثال ۱۰-۷

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

ماتریس رؤیت‌پذیری سیستم عبارتست از

$$\Phi_0 = \begin{bmatrix} C \\ \dots \\ CA \\ \dots \\ CA^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -6 & -7 & -1 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

رتبه این ماتریس برابر ۲ است، ولذا سیستم رؤیت‌نایپذیر می‌باشد.

نتایج بدست آمده از آزمونهای کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری کاملاً مستقل از هم هستند.

بدین معنی که سیستمی ممکن است کنترل‌پذیر و رؤیت‌پذیر بوده و یا اینکه کنترل‌نایپذیر یا رؤیت‌نایپذیر باشد، به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۱-۷

نمایش فضای حالت زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u(t) \quad (11-4-7)$$

$$y(t) = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (12-4-7)$$

به این نمایش، نمایش قطعی^۱ فضای حالت سیستم می‌گویند. اگر مقادیر ویژه ماتریس حالت سیستم (قطبهای سیستم) حقیقی و متفاوت باشند، می‌توان با تبدیل مناسب معادلات فضای حالت (۱۱-۴-۷) و (۲-۴-۷) را به صورت قطعی داده شده با معادلات (۱۲-۴-۷) و (۱۲-۴-۷)، تبدیل کرد. معادلات (۱۱-۴-۷) و (۱۲-۴-۷)، معادلنده با

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \lambda_i x_i(t) + b_i u(t) \quad (i = 1, \dots, n) \\ y(t) &= \sum_{i=1}^n c_i x_i(t) \end{aligned} \quad (13-4-7)$$

از معادله (۱۳-۴-۷) مشاهده می‌شود که سیستم در صورتی کنترل پذیر است که کلیه b_i ها مخالف صفر باشند و در صورتی رؤیت پذیر است که کلیه c_i ها مخالف صفر باشند. ماتریس کنترل پذیری سیستم عبارتست از

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} b_1 & \lambda_1 b_1 & \lambda_1^2 b_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} b_1 \\ b_2 & \lambda_2 b_2 & \lambda_2^2 b_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & \lambda_n b_n & \lambda_n^2 b_n & \dots & \lambda_n^{n-1} b_n \end{bmatrix}$$

در صورتیکه هر کدام از b_i ها صفر شوند ماتریس Φ_c ویژه خواهد شد و اگر همگی b_i ها مخالف صفر باشند، ماتریس Φ_c ناویژه می‌شود. هم چنین ماتریس رؤیت پذیری سیستم عبارتست از

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \lambda_1 c_1 & \lambda_2 c_2 & \dots & \lambda_n c_n \\ \lambda_1^2 c_1 & \lambda_2^2 c_2 & \dots & \lambda_n^2 c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} c_1 & \lambda_2^{n-1} c_2 & \dots & \lambda_n^{n-1} c_n \end{bmatrix}$$

در صورتیکه هر کدام از c_i ها صفر شوند ماتریس Φ_o ویژه خواهد شد و اگر همگی c_i ها

مخالف صفر باشند، Φ ناویژه می‌شود. موارد زیر را در نظر بگیرید:

- الف - کلیه b_i ها مخالف صفر، کلیه c_i ها مخالف صفر : سیستم کنترل پذیر و رؤیت پذیر
- ب - حداقل یک b_i مساوی صفر، c_i ها مخالف صفر : سیستم کنترل ناپذیر و ولی رؤیت پذیر
- ج - کلیه b_i ها مخالف صفر، حداقل یک c_i مساوی صفر : سیستم کنترل پذیر ولی رؤیت ناپذیر
- د - حداقل یک b_i مساوی صفر، حداقل یک c_i مساوی صفر : سیستم کنترل ناپذیر و رؤیت ناپذیر

۳-۴-۷ کنترل پذیری و رؤیت پذیری در توابع تبدیل

یک سیستم فیزیکی را در نظر بگیرید. تاکنون دو نمایش را برای توصیف این سیستم بکار گرفته‌ایم. این دو، نمایش تابع تبدیل و نمایش فضای حالت می‌باشند. در بخش ۵-۵ با بکارگیری روش تابع تبدیل به نمایش فضای حالت سیستم دست پیدا کردیم. در بخش قبل مشخصه‌های کنترل پذیری و رؤیت پذیری را براساس نمایش فضای حالت ارائه کردیم، لیکن مشخصه‌های یک سیستم فیزیکی معین، به نمایش خاص بکار گرفته شده بستگی ندارند و در اینجا به بررسی کنترل پذیری و رؤیت پذیری سیستم از دیدگاه تابع تبدیل می‌پردازیم. به دو نکته مهم جهت یادآوری توجه کنید:

- ۱- نمایش فضای حالت $\{A, B, C, D\}$ و تابع تبدیل $G(s)$ سیستم، با رابطه زیر به هم مرتبط هستند

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (14-4-7)$$

- ۲- تحقق می‌نماید: یک توصیف فضای حالت $\{A, B, C, D\}$ را یک تحقق می‌نماید گویند، و $\{A, B, C, D\}$ را یک تحقق^۱ از $G(s)$ نامند. تحقیقاتی یک تابع تبدیل منحصر بفرد نیستند.

- ۳- تحقق می‌نماید: یک توصیف فضای حالت $\{A, B, C, D\}$ را یک تحقق می‌نماید گویند، اگر تعداد متغیرهای حالت بکار گرفته شده برای توصیف سیستم حداقل باشد.

ایده تحقیق می نیمال رابطه بسیار نزدیکی با کنترل پذیری و رؤیت پذیری سیستم دارد. در واقع می توان نشان داد که اگر $\{A, B, C, D\}$ نمایش فضای حالت سیستمی باشد، هنگامیکه تابع تبدیل (s) $G(s)$ را از رابطه $(4-4-7)$ بدست می آوریم، اگر در تشکیل تابع تبدیل صفر و قطب مشترکی پیدا شوند و برای تعیین (s) $G(s)$ با درجه حداقل، مجبور به حذف صفر و قطب شویم، آن تحقق کنترل ناپذیر یا رؤیت ناپذیر (یا هر دو) خواهد بود.

مثال ۱۲-۷

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{1}{s+3}$$

یک تحقیق مرتبه ۱ این تابع تبدیل عبارتست از

$$A = -3, \quad B = 1, \quad C = 1$$

این تحقق کنترل پذیر و رؤیت پذیر است.

یک تحقیق غیر می نیمال مرتبه ۲ تابع تبدیل عبارتست از

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

با توجه به نتایج مثال ۱۱-۷، این تحقق کنترل ناپذیر و رؤیت ناپذیر است.

یک تحقیق دیگر مرتبه ۲ تابع تبدیل عبارتست از

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

این تحقق کنترل ناپذیر ولی رؤیت پذیر است.

آخرین تحقیق مرتبه ۲ تابع تبدیل عبارتست از

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

این تحقق کنترل پذیر ولی رؤیت ناپذیر است.

تابع تبدیل متناظر با تحقیق اول عبارتست از

$$G(s) = \frac{1}{s+3}$$

و تابع تبدیل متناظر با سه تحقق مرتبه دوم دیگر، عبارتست از

$$G(s) = \frac{(s+2)}{(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s+3}$$

دقت کنید که تحقق اول می‌نیمال و سایر تتحققها غیرمی‌نیمال هستند و در تتحققهای غیرمی‌نیمال حذف قطب - صفر^۱ رخ می‌دهد. این تتحققها کنترل‌ناپذیر، رؤیت‌ناپذیر (یا هر دو) می‌باشند. در واقع هر تحقق مرتبه بالاتر از یک در این مثال، تتحقق غیرمی‌نیمال خواهد بود و دو مسئله را به همراه خواهد داشت:

۱- حذف قطب - صفر در تابع تبدیل

۲- عدم کنترل‌پذیری یا رؤیت‌پذیری (یا هر دو)

از طرف دیگر هر تحقق مرتبه اول یا می‌نیمال کنترل‌پذیر و رؤیت‌پذیر است و در تشکیل تابع تبدیل و حذف صفر - قطب رخ نخواهد داد.

نتایج بدست آمده از مثال بالا را به صورت زیر خلاصه می‌کنیم:

۱- تابع تبدیل (G) نشان دهنده یک سیستم کنترل‌پذیر و رؤیت‌پذیر است، اگر حذف صفر - قطب در آن رخ ندهد.

۲- یک تحقق می‌نیمال از یک سیستم، یک تحقق کنترل‌پذیر و رؤیت‌پذیر است.

۳- تابع تبدیل (G)، نشان دهنده یک سیستم کنترل‌ناپذیر یا رؤیت‌ناپذیر یا هر دو است، اگر حذف صفر - قطب در آن رخ دهد.

۵-۷ طراحی سیستم‌های کنترل در فضای حالت

در بخش‌های ۴-۳ و ۵-۳، تأثیر موقعیت قطب‌های غالب را ببروی پاسخ حالت گذرا بررسی کردیم. اگر قطب‌های غالب در سمت راست محور موهومی باشند پاسخ سیستم ناپایدار است، اگر به صورت غیرمکرر بر روی محور موهومی باشند پاسخ سیستم نوسانی غیر میرا است، اگر نزدیک به محور موهومی در سمت چپ محور موهومی باشند پاسخ سیستم نوسانی میرا ولی بسیار کند با نوسانات زیاد می‌باشد و در صورتیکه در سمت چپ محور موهومی و دورتر از آن قرار گیرند، پاسخ سریعتر خواهد شد.

1- Pole-zero cancellation

روش طراحی که در این بخش مورخواهیم کرد، جایابی قطب^۱ با فیدبک حالت^۲ است.
 هدف از این طراحی آن است که پاسخ مطلوب سیستم حلقه - بسته را با تعیین قطبها حلقه -
 بسته در مکانهای مناسب و جایابی آنها توسط فیدبک حالت، بدست آوریم. مکان مناسب
 قطبها یا از سعی و خطأ بدست می‌آید (به عبارت دیگر با بکارگیری شبیه‌سازیهای مناسب
 موقعیتهای مختلف قطبها را امتحان کرده و یک موقعیت که بهترین پاسخ را بدست بدهد،
 تعیین می‌کنیم) و یا اینکه از اطلاعاتی که از رفتار گذراي سیستم داده شده است (مانند
 فراجهش حداکثر، زمان استقرار و ...) موقعیت مناسب قطبها را تعیین می‌کنیم. در هر صورت
 با انتخاب مکان مناسب قطبها، از فیدبک حالت برای انتقال قطبها حلقه - باز و جایابی آنها
 در مکانهای مطلوب استفاده خواهیم کرد.

۱-۵-۷ جایابی قطب با فیدبک حالت

ایده اصلی طراحی جایابی قطب آن است که موقعیت مطلوب قطبها حلقه - بسته داده
 شده‌اند، کنترل فیدبک حالت را باید چنان تعیین کنیم تا قطبها حلقه - بسته را در این مکانها
 جای دهد. توصیف فضای حالت یک سیستم در حالت کلی عبارتست از

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1-5-7)$$

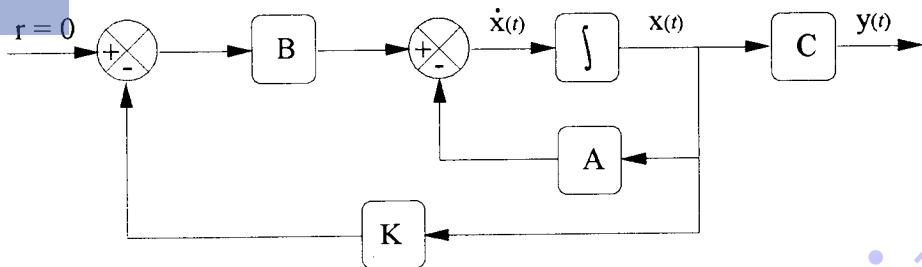
که در آن $x(t)$ بردار n -بعدی حالت و $u(t)$ بردار m -بعدی ورودی است. بردار ورودی کنترل
 $u(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$u(t) = -Kx(t) \quad (2-5-7)$$

که در آن K یک ماتریس $m \times n$ از پارامترهای فیدبک حالت است. در واقع طراحی جایابی
 قطب با فیدبک حالت، به تعیین پارامترهای این ماتریس منجر می‌شود. با جایگزینی معادله
 $(2-5-7)$ در معادله $(1-5-7)$ ، بدست می‌آوریم

$$\dot{x}(t) = [A - BK] x(t) \quad (3-5-7)$$

شکل ۴-۷ سیستم حلقه - بسته با فیدبک حالت را نشان می‌دهد. (برای ورودیهای مرجع غیر
 صفر و ایجاد حالت ردیابی با فیدبک حالت به مراجع همین فصل و بخش کتابشناسی مراجعه



شکل ۴-۷ سیستم حلقه - بسته با فیدبک حالت

$$\text{کنید.) معادله مشخصه سیستم حلقه - بسته عبارتست از} \\ |sI - A + BK| = 0 \quad (4-5-7)$$

معادله (4-5-7) نشان می‌دهد که با انتخاب مناسب ماتریس K می‌توان تمامی قطب‌های حلقه - بسته را در مکانهای مطلوب جایابی کرد. در صورتیکه سیستم تنها یک ورودی داشته باشد، K یک بردار $n \times 1$ خواهد بود. شرط لازم و کافی برای وجود K جهت جایابی کلیه قطبها، آن است که سیستم تحت کنترل، کنترل پذیر کامل حالت باشد. لذا قبل از شروع به طراحی باید کنترل پذیری سیستم را مورد بررسی قرار دهیم. مراحل طراحی فیدبک حالت را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

۱- با تشکیل ماتریس کنترل پذیری سیستم Φ داده شده با معادله (۴-۴-۷)، کنترل پذیری سیستم را بررسی کنید. در صورت کنترل پذیر بودن، جایابی تمامی قطب‌های حلقه - باز در مکانهای مطلوب امکان‌پذیر است.

۲- با تعیین قطب‌های مطلوب حلقه - بسته در $s = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ، معادله مشخصه مطلوب سیستم حلقه - بسته را بنویسید:

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

۳- معادله مشخصه سیستم حلقه - بسته (با پارامترهای تعیین نشده بهره فیدبک K) را با محاسبه دترمینان زیر بنویسید:

$$|sI - A + BK| = 0$$

۴- دو معادله مشخصه تعیین شده در مراحل ۲ و ۳ را مساوی قرار دهید، با حل معادلات

بدهست آمده از مساوی قرار دادن ضرایب توانهای متناظر که پارامترهای ماتریس K را محاسبه کنید.

مثال ۱۳-۷

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

قطبهای حلقه - باز سیستم عبارتند از

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 2$$

بدیهی است که سیستم حلقه - باز ناپایدار است و حداقل یک قطب در سمت راست محور موهومی دارد (توجه کنید که تغییر علامتی در ضرایب معادله مشخصه رخ داده است).
ماتریس کنترل پذیری سیستم عبارتست از

$$\Phi_C = [B \quad : \quad AB] \\ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

و لذا سیستم کنترل پذیر کامل حالت است. فرض کنید که محل قطبهای مطلوب حلقه - بسته در ۱ و ۴ - باشند (پایدارسازی^۱ سیستم حلقه - باز ناپایدار) در این صورت معادله مشخصه مطلوب عبارتست از

$$(s+4)(s+1) = s^2 + 5s + 4$$

معادله مشخصه سیستم حلقه - بسته با بردار فیدبک حالت $[k_1 \ k_2] = K$ ، بدین صورت

می باشد

$$|sI - A + BK| = s^2 + s(3+k_2) + k_1 - 2$$

با مساوی قرار دادن ضرایب توانهای مشابه در داریم:

$$s^0 : k_1 - 2 = 4$$

$$s^1 : k_2 + 3 = 0$$

ولذا $K = [6 \quad 2]$ بردار بهره فیدبک حالت خواهد بود.

مثال ۱۴-۷

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

ماتریس کنترل پذیری این سیستم عبارتست از

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} B & : & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

ولذا سیستم کنترل نپذیر است. اگر بخواهیم به این سیستم فیدبک حالت اعمال کنیم، داریم

$$|sI - A + BK| = s^2 + (k_1 + k_2 + 3)s + k_1 + k_2 + 2$$

که در آن $K = [k_1 \quad k_2]$. فرض کنید که معادله مشخصه مطلوب $s^2 + 5s + 6 = 0$ باشد، در این

صورت با مساوی قراردادن ضرایب توانهای مشابه در s^2 ، بدست می‌آوریم

$$k_1 + k_2 + 3 = 5$$

$$k_1 + k_2 + 2 = 6$$

بدیهی است که دستگاه معادلات بالا جوابی نخواهد داشت. از این‌رو، برای سیستم کنترل نپذیر نمی‌توان یک بردار بهره فیدبک حالت K پیدا کرد که موقعیت مطلوب قطبها را بدست دهد.

مثال ۱۵-۷

معادلات حالت و خروجی سیستمی عبارتند از

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -4/03 & -1/02 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

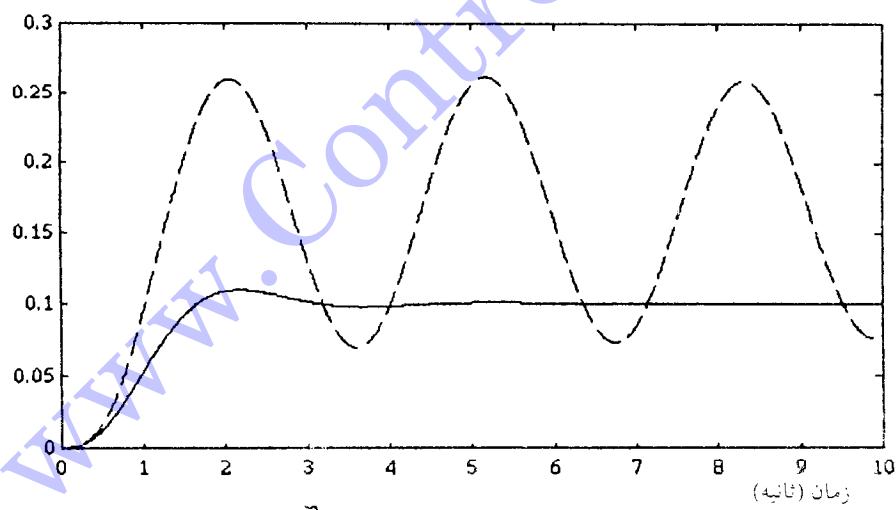
قطبهای سیستم حلقه - باز عبارتند از $\{ -1 \pm j2, -1 \pm j5, -5 \pm j5 \}$ مشاهده می شود، پاسخ پله واحد این سیستم (با توجه به نزدیک بودن قطبهای مختلط مزدوج به محور موهومی) نوسانی می باشد. برای اصلاح پاسخ زمانی سیستم، قطبهای سیستم را در $\{ -2 \pm j1, -2 \pm j4 \}$ قرار می دهیم. با تشکیل ماتریس کنترل پذیری برای این سیستم داریم که رتبه ماتریس کنترل پذیری سیستم، کامل است و لذا سیستم کنترل پذیر می باشد. معادله مشخصه حلقه - بسته مطلوب عبارتست از

$$s^3 + 4s^2 + 9s + 10 = 0$$

از مساوی قرار دادن ضرایب توانهای مشابه در s ، بردار بهره فیدبک حالت به صورت زیر بدست خواهد آمد

$$K = [4/0 \quad 4/97 \quad 2/48]$$

پاسخ پله واحد سیستم حلقه - بسته در شکل ۵-۷ نشان داده شده است. بدیهی است که مشخصه های پاسخ پله واحد سیستم حلقه - بسته، بسیار بهتر از پاسخ سیستم حلقه - باز است.



شکل ۵-۷ پاسخ سیستم های حلقه - باز و حلقه - بسته مثال ۱۵-۷، پاسخ سیستم حلقه - باز با خط چین ر پاسخ سیستم حلقه - بسته با خط پیوسته نشان داده شده است.

۲-۵-۷ طراحی رؤیتگر

در طراحی جایابی قطب با فیدبک حالت، همانطور که در شکل ۴-۷ نشان داده شده است، بردار حالت دانسته فرض شده است و همچنین فرض شده است که می‌توان این بردار را مستقیماً اندازه‌گیری کرد و ورودی کنترل را با ضریب معلومی از این بردار اندازه‌گیری شده، تشکیل داد. حال آنکه بردار حالت ممکن است صرفاً یک کمیت ریاضی باشد و از نظر فیزیکی مفهومی نداشته باشد، در اینصورت قابل اندازه‌گیری توسط متغیرهای فیزیکی سیستم نیست و نمی‌توان آن را فیدبک کرد. از طرف دیگر، اگر چه ممکن است که بردار حالت از متغیرهای فیزیکی سیستم تشکیل شده باشد، لیکن اندازه‌گیری و فیدبک کلیه این متغیرها یا بعضی از آنها عملأً امکان‌پذیر نباشد. به عنوان نمونه متغیر ممکن است در موقعیتی باشد که اندازه‌گیری آن با وسایل موجود ممکن نباشد و یا به کارگیری وسایل پیشرفته اندازه‌گیری مقرن به صرفه نباشد (برای مثال در درجه حرارت‌های بسیار بالا یا پایین، عملکردهای فوق العاده سریع و دقیق، ...) و یا اینکه ممکن است به دلیل وجود نویز شدید، اندازه‌گیری آلوده به نویز و غیر دقیق باشد. در این چنین مواردی باید از روش‌هایی برای محاسبه یا تخمين مقدار هر متغیر حالت استفاده کرد. با تخمين^۱ یا بازسازی^۲ متغیرهای حالت، از بردار حالت تخمين زده شده^۳ برای تشکیل بردار کنترل استفاده خواهد شد.

سیستم دینامیکی که بردار حالت را تخمين می‌زند، رؤیتگر^۴ نامیده می‌شود. در این بخش با بکارگیری متغیرهای قابل اندازه‌گیری ورودی و خروجی سیستم در یک الگوریتم تخمين یا فرایند بازسازی بردار حالت، بردار حالت تخمين زده شده را محاسبه می‌کنیم و نشان خواهیم داد که پس از گذشتن یک حالت گذراي سریع، مقادیر بردار حالت تخمين زده شده و بردار حالت واقعی یکی خواهند شد. با بکارگیری رؤیتگر در سیستم، دینامیک آن جزیی از دینامیک سیستم حلقه - بسته خواهد شد و لذا اثر مستقیمی بر عملکرد سیستم حلقه - بسته می‌گذارد. از این‌رو انتخاب مناسب دینامیک رؤیتگر، در طراحی جایابی قطب با فیدبک حالت بسیار مهم است.

1- Estimation

2- Reconstruction

3- Estimated

4- Observer

رؤیتگر حالت. سیستم توصیف شده با معادلات حالت و خروجی زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (5-5-7)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (6-5-7)$$

که در آن ماتریس‌های \mathbf{A} , \mathbf{B} و \mathbf{C} معلوم فرض شده‌اند، همچنین ورودی و خروجی سیستم، $\mathbf{u}(t)$ و $\mathbf{y}(t)$ نیز قابل اندازه‌گیری هستند. بردار حالت $(t)\mathbf{x}$ را بدلایلی نمی‌توان مستقیماً اندازه‌گیری گرفت. یک روش ساده بازسازی بردار حالت شبیه‌سازی معادله‌های حالت و خروجی داده شده با معادله‌های (5-5-7) و (6-5-7)، توسط یک کامپیوتر است که همان ورودی اعمال شده به سیستم را به آن نیز اعمال می‌کنیم. متغیرهای حالت $x_i(t)$ ($i=1,\dots,n$) بدست آمده از تابع شبیه‌سازی و متغیرهای حالت واقعی تنها در صورتی (با اعمال ورودی یکسان) یکسان خواهند بود که شرایط اولیه سیستم شبیه سازی شده و واقعی یکی باشند. اما در عمل سیستم واقعی تحت انواع اغتشاشات و نویزهایی قرار خواهد گرفت که شبیه‌سازی آنها عمل‌اً غیرممکن است و لذا بین خروجی سیستم واقعی و خروجی سیستم شبیه‌سازی شده تفاوتی ایجاد خواهد شد. برای درنظر گرفتن و جبران کردن این خطای ایجاد شده آن را به عنوان ورودی دیگری به سیستم شبیه‌سازی شده اعمال می‌کنیم. معادلات حالت و خروجی سیستم دینامیکی رؤیتگر عبارتند از

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)) \quad (7-5-7)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) \quad (8-5-7)$$

که در آن $(t)\hat{\mathbf{x}}$ و $(t)\hat{\mathbf{y}}$ به ترتیب بردار حالت و خروجی تخمین زده شده هستند، \mathbf{L} نیز ماتریس رؤیتگر^۱ ($n \times \ell$) است. مسئله طراحی رؤیتگر، تعیین مناسب ماتریس \mathbf{L} است. برای بررسی نقش ماتریس \mathbf{L} و نحوه تعیین آن، خطای رؤیت^۲ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\mathbf{e}(t) \equiv \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (9-5-7)$$

با کم کردن معادله (5-5-7)، از معادله (7-5-7)، بکارگیری معادله‌های (6-5-7) و (8-5-7) و تعریف خطای رؤیت، بدست می‌آوریم

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\mathbf{e}(t) \quad (10-5-7)$$

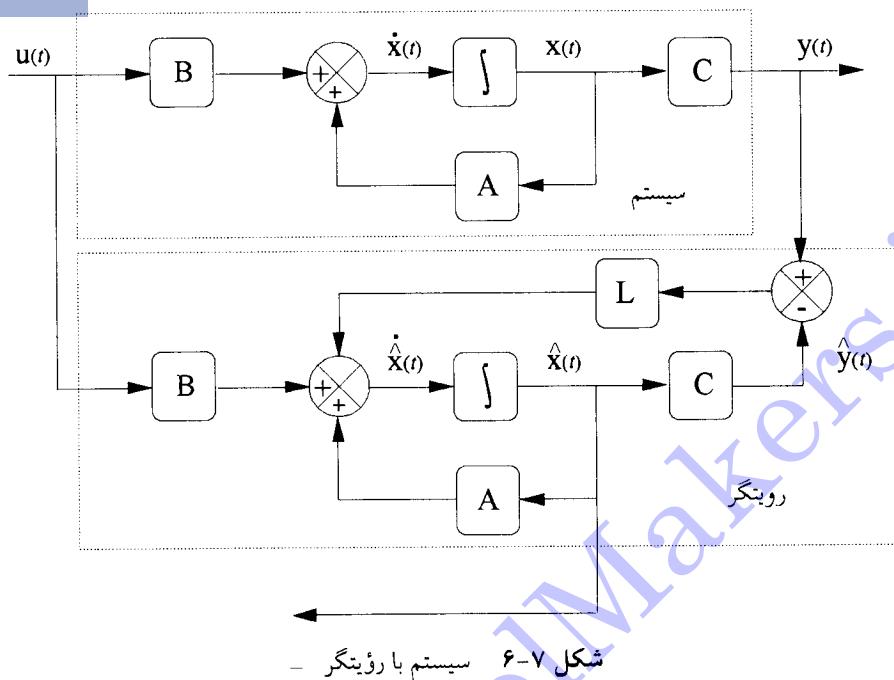
با انتخاب مناسب ماتریس L (توجه کنید در صورتیکه سیستم تنها یک خروجی داشته باشد، L یک بردار $n \times 1$ است)، می‌توان مقادیر ویژه $A-LC$ را در سمت چپ محور موهومی قرار داد. بنابراین مقدار حالت - ماندگار (t) برای هر شرط اولیه‌ای صفر است

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (11-5-7)$$

از معادله (10-5-7)، داریم که معادله خطای ورودی نداشته و تنها با شرایط اولیه تحریک می‌شود، بنابراین خطای رؤیتگر با ورودی سیستم تعیین نمی‌شود. مقدار حالت - ماندگار خطای برابر صفر است. توجه کنید که صرفنظر از ورودی اعمال شده به سیستم، خطای رؤیت همواره پس از گذراندن یک حالت گذرا صفر خواهد شد. در عمل باید ماتریس L را به گونه‌ای انتخاب کنیم که مقادیر ویژه $A-LC$ در سمت چپ مقادیر ویژه حلقه - بسته قرار گیرند. به عبارت دیگر، ماتریس L باید به گونه‌ای انتخاب گردد تا خطای تخمین با سرعت قابل قبولی صفر گردد و بر عملکرد سیستم حلقه - بسته اثر قابل ملاحظه‌ای نگذارد. می‌توان نشان داد که (برای جزئیات به مراجع همین فصل و بخش کتاب‌شناسی آن مراجعه کنید) شرط لازم و کافی برای جایابی قطب‌های رؤیتگر (تعیین مقادیر ویژه ماتریس $C-A-LC$)، توسط ماتریس L ، رؤیت پذیری سیستم است. به عبارت دیگر، بتوان با مشاهده خروجی حالتها را تخمین زد. شما کلی یک سیستم با رؤیتگر در شکل 7-6 نشان داده شده است. در رؤیتگر طراحی شده تمامی متغیرهای حالت، همانطور که در شکل 7-6 نشان داده شده است، تخمین زده می‌شوند. به رؤیتگری که تمامی متغیرهای حالت را تخمین می‌زند، رؤیتگر مرتبه کامل¹ می‌گویند.

۳-۵-۷ سیستم حلقه - بسته فیدبک حالت با رؤیتگر

در فرایند جایابی قطب با فیدبک حالت در بخش ۱-۵-۷، فرض شده بود که بردار حالت واقعی ($x(t)$ برای اندازه‌گیری و فیدبک در دسترس است. در بخش ۲-۵-۷، با فرض در دسترس نبودن بردار حالت روشنی را برای تخمین و بازسازی بردار حالت توسط رؤیتگر ارایه کردیم. در این بخش با فرض در دسترسی نبودن بردار حالت واقعی، یک رؤیتگر را در سیستم



کنترل فیدبک حالت به کار می‌گیریم و از بردار حالت تخمین زده شده ($\hat{\mathbf{x}}(t)$) به جای بردار حالت واقعی ($\mathbf{x}(t)$) در سیستم کنترل استفاده می‌کنیم. فرایند طراحی در این صورت به دو مرحله تقسیم می‌شود:

مرحله اول: تعیین یک ماتریس بهره فیدبک حالت K , برای جایابی مطلوب قطبهای سیستم.

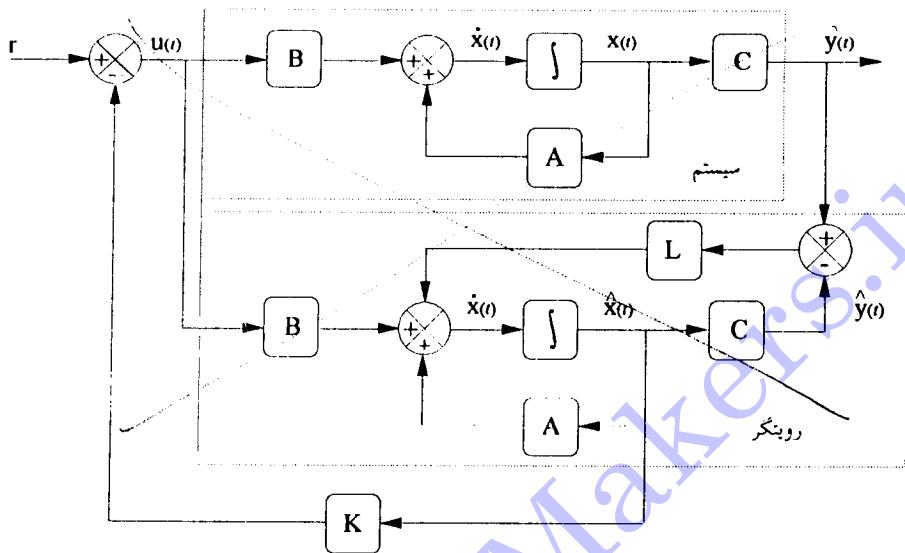
مرحله دوم: تعیین یک ماتریس بهره رویتگر L , برای جایابی مطلوب قطبهای رویتگر. برای مطالعه اثرات بکارگیری ($\hat{\mathbf{x}}(t)$) به جای ($\mathbf{x}(t)$) همانطور که در شکل ۶-۷ نشان داده شده است، سیستم کاملاً کنترل پذیر و رویت پذیر داده شده با معادلات حالت و خروجی زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (12-5-7)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (13-5-7)$$

برای کنترل فیدبک حالت، با حالت رویت شده ($\hat{\mathbf{x}}(t)$) داریم

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) \quad (14-5-7)$$



شکل ۷-۷ سیستم کنترل فیدبک حالت با رؤیتگر

با این کنترل از جایگزینی معادله (۱۴-۵-۷)، در معادله (۱۲-۵-۷)، بدست می‌آوریم

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BK\hat{x}(t) \quad (15-5-7)$$

با اضافه کردن $-BKx(t) + BKx(t)$ به طرف راست معادله (۱۵-۵-۷)، و بازنویسی آن بدست می‌آوریم

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + BK(x(t) - \hat{x}(t)) \quad (16-5-7)$$

از معادله (۹-۵-۷)، داریم

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + BKe(t) \quad (17-5-7)$$

با ترکیب معادله‌های (۱۷-۵-۷) و (۱۰-۵-۷) داریم

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (18-5-7)$$

معادله (۱۸-۵-۷)، دینامیک سیستم حلقه - بسته با کنترل فیدبک حالت و رؤیتگر را

توصیف می‌کند. معادله مشخصه سیستم حلقه - بسته عبارتست از

$$\begin{vmatrix} sI-A+BK & -BK \\ 0 & sI-A+LC \end{vmatrix} = 0$$

و یا

$$|sI-A+BK| |sI-A+LC| = 0 \quad (19-5-7)$$

معادله (19-5-7)، نشان می‌دهد که قطب‌های حلقه - بسته سیستم کنترل فیدبک حالت با رؤیتگر از مجموع قطب‌های ناشی از طراحی جایابی قطب و قطب‌های ناشی از طراحی رؤیتگر تشکیل می‌شود. این بدان معنی است که طراحی رؤیتگر و جایابی قطب با فیدبک حالت، به طور جداگانه‌ای انجام می‌شوند. بنابراین دو مرحله فرایند طراحی به طور کامل مستقل از یکدیگر انجام می‌پذیرند.

قطب‌های مطلوب حلقه - بسته، به گونه‌ای تعیین می‌گردند تا مشخصه‌های عملکرد سیستم حلقه - بسته برآورده شوند. قطب‌های رؤیتگر نیز به گونه‌ای تعیین می‌گردند تا پاسخ رؤیتگر بسیار سریعتر از پاسخ سیستم باشد. یک قاعده سرانگشتی برای تعیین محل قطب‌های رؤیتگر آن است که آنها را به گونه‌ای انتخاب کنیم که پاسخ رؤیتگر حداقل ۲ تا ۵ برابر سریعتر از پاسخ سیستم باشد. بالاترین سرعت رؤیتگر با پارامترهایی مانند نویز و مسئله حساسیت در سیستم‌های کنترل عملی محدود می‌شود.

مثال ۱۶-۷

سیستم کاملاً رؤیت‌پذیر زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

برای تخمین بردار حالت سیستم، بردار بهره رؤیتگر L را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$$

که در آن α_1 و α_2 پارامترهایی هستند که در طراحی رؤیتگر تعیین می‌گردند. معادله مشخصه سیستم دینامیکی رؤیتگر عبارتست از

$$\begin{aligned} |sI - A + LC| &= \begin{vmatrix} s+3+\alpha_1 & -1 \\ \alpha_2 & s+2 \end{vmatrix} \\ &= s^2 + (\alpha_1 + 5)s + (6 + 2\alpha_1 + \alpha_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

پارامترهای α_1 و α_2 را از مساوی قراردادن معادله مشخصه سیستم دینامیکی رؤیتگر، با معادله مشخصه مطلوب رؤیتگر بدست می‌آوریم. اگر بخواهیم قطبها رؤیتگر در ۱- و ۶- قرار گیرند، معادله مشخصه مطلوب عبارتست از

$$(s+6)(s+1) = s^2 + 7s + 6$$

با مساوی قرار دادن ضرایب توانهای مشابه در s داریم $-4 = \alpha_1$ و $-2 = \alpha_2$. معادله دینامیکی رؤیتگر از معادله $(7-5s-7)$ و $(8-5s-7)$ ، عبارتست از

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}(t) \end{aligned}$$

و یا با جایگزینی $y(t) = Cx(t)$ ، داریم

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} y(t)$$

با توجه به مثال بالا، مراحل طراحی یک رؤیتگر نیز همانند مراحل طراحی جایابی قطب با فیدبک حالت است. این مراحل عبارتند از:

- ۱- با تشکیل ماتریس رؤیت‌پذیری Φ داده شده با معادله $(10-4s-7)$ ، رؤیت‌پذیری سیستم را بررسی کنید. در صورت رؤیت‌پذیر بودن، طراحی رؤیتگر (جایابی قطبها رؤیتگر) امکان‌پذیر است.

- ۲- قطبها مطلوب رؤیتگر را تعیین کنید. این قطبها باید به گونه‌ای انتخاب شوند که سرعت پاسخ رؤیتگر حداقل ۲ تا ۵ برابر سریعتر از پاسخ سیستم باشد. معادله مشخصه مطلوب رؤیتگر را با این قطبها بدست آورید.

۳- معادله مشخصه رؤیتگر را با محاسبه دترمینان زیر بنویسید:

$$|sI - A + LC| = 0$$

که در آن L یک ماتریس $n \times n$ است (n تعداد متغیرهای حالت و ℓ تعداد خروجیها است).

۴- دو معادله مشخصه تعیین شده در مراحل ۲ و ۳ را مساوی قرار دهید. با حل معادلات بدست آمده از مساوی قرار دادن ضرایب متناظر ℓ پارامترهای a_{ij} ($i=1,\dots,n, j=1,\dots,\ell$) در ماتریس L را بدست آورید.

مثال ۱۷-۷

معادله‌های حالت و خروجی سیستمی عبارتند از

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

قطبهای این سیستم در $+1$ و $+2$ قرار دارند و لذا سیستم حلقه - باز ناپایدار است. اگر بخواهیم از فیدبک متغیرهای حالت برای پایدارسازی سیستم استفاده کنیم، نخست باید کنترل‌پذیری سیستم را تعیین نمود. با فرض در دسترس نبودن متغیرهای حالت برای فیدبک، باید از یک رؤیتگر جهت تخمین متغیرهای حالت و فیدبک آنها استفاده کرد و لذا تعیین رؤیت‌پذیری سیستم نیز الزامی است. ماتریس‌های کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری سیستم

عبارتند از

$$\Phi_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین سیستم کنترل‌پذیر و رؤیت‌پذیر است. قطبهای سیستم حلقه - بسته مطلوب را در $\{-3, -4\}$ و قطبهای رؤیتگر را در $\{-13, -13\}$ در نظر می‌گیریم. برای تعیین ماتریس بهره فیدبک دو معادله مشخصه مطلوب و حلقه - بسته را مساوی قرار می‌دهیم، از این‌رو

$$\left| \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (k_1, k_2) \right| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 2+k_1 & s-3+k_2 \end{vmatrix}$$

$$= s^2 + s(-3+k_2) + 2+k_1$$

$$= s^2 + 4s + 12$$

ولذا $k=10$ است.

برای تعیین ماتریس بهره رؤیتگر نیز به طریق مشابهی، دو معادله مشخصه مطلوب رؤیتگر و معادله مشخصه رؤیتگر را مساوی قرار می‌دهیم، از این‌رو

$$\begin{aligned} \left| \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| &= \begin{vmatrix} s+l_1 & -1 \\ 2+l_2 & s-3 \end{vmatrix} \\ &= s^2 + s(l_1 - 3) + 2 + l_2 \\ &= s^2 + 2s + 169 \end{aligned}$$

ولذا $L = [23 \ 167]^T$ است.

شکل‌های ۸-۷ (الف) و (ب)، به ترتیب رفتار متغیرهای حالت $(t)_1 x$ و $(t)_2 \hat{x}$ را نشان می‌دهند. همانطور که از این شکل‌ها مشاهده می‌گردد، متغیرهای حالت تخمین زده شده $(t)_1 \hat{x}$ و $(t)_2 \hat{x}$ در کمتر از ۱ ثانیه به مقادیر واقعی متغیرهای حالت همگرا می‌شوند. شرایط اولیه تخمین $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T = (0) \hat{x}$ است. در شکل ۸-۷ (ج)، خروجی سیستم حلقه - بسته واقعی و خروجی سیستم حلقه - بسته با فیدبک تخمین متغیرهای حالت نشان داده شده است. همانطور که مشخص است، سیستم حلقه - باز ناپایدار در هر دو حالت پایدارگردیده است و بعد از گذشت یک زمان حالت گذرا با همگرا شدن متغیر حالت تخمین زده شده به حالت واقعی خروجیها نیز به هم همگرا شده‌اند.

مسائل

۱-۷. معادلات حالت و خروجی سیستم‌های زیر را در نظر بگیرید:

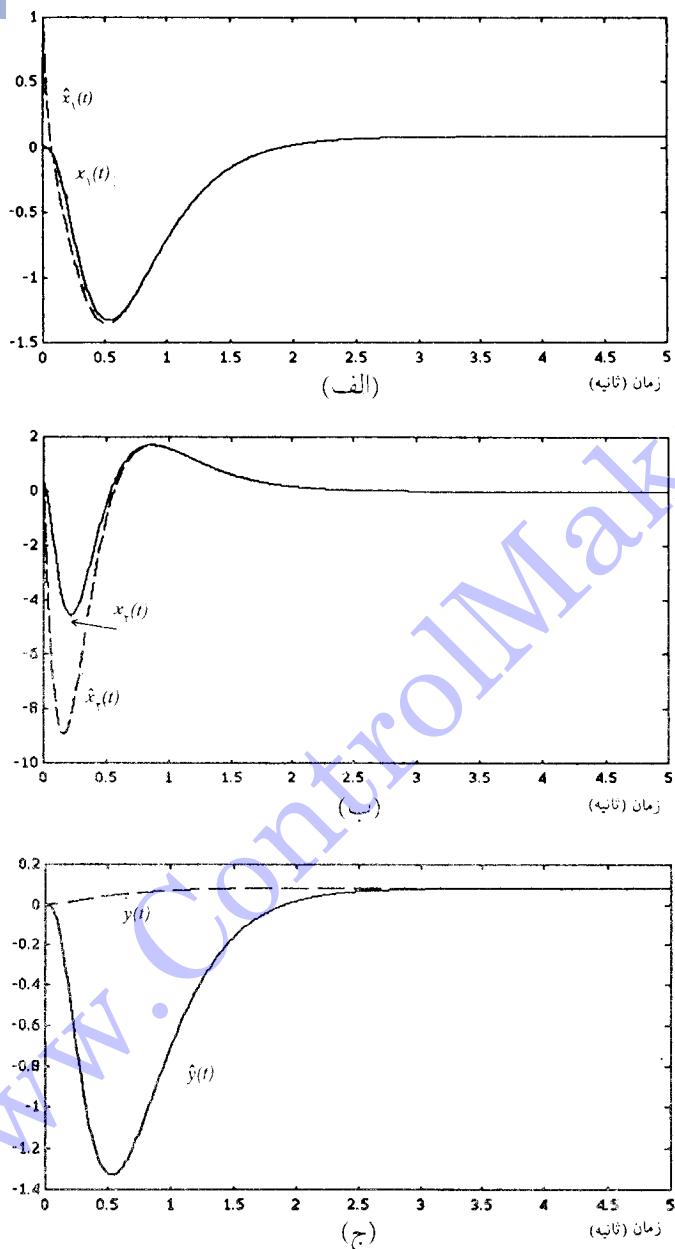
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{الف})$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{ب})$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

برای شرایط اولیه صفر و ورودی پله واحد، پاسخ متغیرهای حالت و خروجی سیستم را با بکارگیری معادلات (۷-۲۰) و (۷-۲۱-۲۰)، بدست آورید.



شکل ۸-۷ (الف) رفتار اولین متغیر حالت واقعی و تخمین زده شده. (ب) رفتار دومین متغیر حالت واقعی و تخمین زده شده. (ج) خروجیهای سیستم با رویتگر و بدون رویتگر.

۲-۷. پاسخ معادلات حالت و خروجی سیستم‌های زیر را بدست آورید:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)\end{aligned}\quad (\text{الف})$$

شرایط اولیه سیستم $(0) x_1 = 1$ و $(0) x_2 = 0$ باشند و $u(t)$ نیز ورودی پله واحد است.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 15 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (\text{ب})$$

شرط اولیه سیستم $1 = x_2(0) = x_1(0) = 0$ است.

۳-۷. سیستم توصیف شده با معادله حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B u(t)$$

پاسخ بردار حالت را به ورودی‌های اعمال شده در زمان $t = 0$ ، بدست آورید:

(الف) ورودی شبیه واحد.

(ب) ورودی ضربه واحد.

۴-۷. پاسخ معادلات حالت زیر را با استفاده از روش تبدیل لاپلاس بدست آورید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (\text{الف})$$

با شرایط اولیه $\mathbf{x}(0) = [1 \ 1]^T$ و ورودی پله واحد.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{ب})$$

با شرایط اولیه صفر و ورودی $u(t) = e^{-t}$ برای $t \geq 0$.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (\text{ج})$$

با شرایط اولیه $x_1(0) = 0$ و $x_2(0) = 1$.

۵-۷. سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\alpha + \beta) \frac{dx}{dt} + \alpha \beta x = u$$

که در آن α و β ثابت و u ورودی ضربه واحد است. شرایط اولیه سیستم عبارتند از

$$x(0-) = \frac{dx(0-)}{dt} = 0$$

پاسخ سیستم را با استفاده از روش

(الف) تبدیل لاپلاس

(ب) فضای - حالت

بدست آورید.

۶-۷- ماتریس‌های حالت سیستم‌هایی در زیر داده شده‌اند. با نوشتен معادله مشخصه این سیستم‌ها و محاسبه مقادیر ویژه آنها، پایداری این سیستم‌ها را بررسی کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -12 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

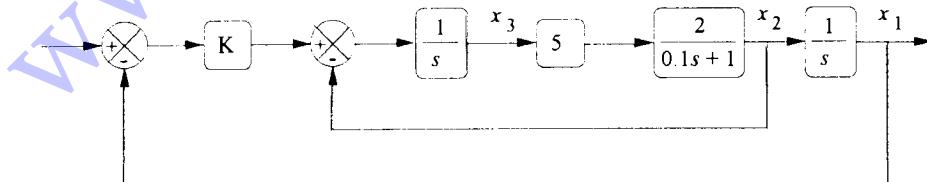
۷-۷- دیاگرام بلوکی یک سیستم کنترل موقعیت در شکل ۷-۹ نشان داده شده است. با نوشتен معادلات حالت آن، پایداری سیستم را به ازاء تغییرات بهره K تعیین کنید.

۸-۷- کنترل پذیری سیستم‌های زیر را تعیین کنید:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1/5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{الف})$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{ب})$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{ج})$$



۹-۷- سیستم کنترل موقعیت مسئله ۷

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{d})$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{e})$$

۹-۷- تابع تبدیل سیستمی عبارتست از

$$G(s) = \frac{K(s+a)(s+b)}{(s+a)(s+b)(s+c)(s+d)}$$

کنترل‌پذیری این سیستم را بررسی کنید.

۱۰-۷- رؤیت‌پذیری سیستم‌های زیر را تعیین کنید:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{الف})$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{ب})$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{c})$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (d)$$

$$y(t) = [1 \ 1 \ 1] \mathbf{x}(t)$$

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (e)$$

(ه) سیستم داده شده در (د) با معادله خروجی

۱۱-۷. معادلات حالت و خروجی زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [-1 \ 1 \ 0] \mathbf{x}(t)$$

کنترل پذیری و رؤیت پذیری سیستم را به ازاء مقادیر مختلف α بررسی کنید.

۱۲-۷. سیستم داده شده با معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

(الف) نشان دهید که سیستم ناپایدار است.

(ب) نشان دهید که با فیدبک حالت مناسب می توان سیستم را پایدار کرد.

(ج) بهره فیدبک حالت مناسبی که قطب‌های حلقه - بسته را در $\{-4\}$ قرار دهید، تعیین کنید.

۱۳-۷. سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

پس از آزمون کنترل پذیری، در صورت امکان با فیدبک حالت قطبهای سیستم حلقه -

بسته را در $\{-1, -2, -3, -4\}$ قرار دهید.

۱۴-۷- سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

(الف) به ازاء چه مقادیری از α سیستم رؤیت ناپذیر است.

(ب) برای $\alpha = 0$ ، رؤیتگری طراحی کنید که خطای تخمین آن با قطبهای ۱ و ۲ به سمت صفر میل کند.

۱۵-۷- سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \beta \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

(الف) به ازاء چه مقادیری از α و β سیستم کنترل پذیر و رؤیت پذیر است.

(ب) برای $\alpha = \beta = 0$ ، قطبهای سیستم حلقه - بسته را با فیدبک حالت در $\{-1, -2\}$ و قطبهای رؤیتگر را در $\{-5, -6\}$ قرار دهید.

۱۶-۷- پاسخ سیستم‌های داده شده در مسائل ۱۲-۷، ۱۳-۷، ۱۴-۷، ۱۵-۷ را برای شرایط

اولیه دلخواه و ورودی پله واحد توسط یک برنامه کامپیوترا مناسب رسم کنید.

مراجع فصل هفتم

[٧-١] علی خاکی صدیق ، اصول کنترل مدرن ، انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۷۴

[7-2] Blackman P.F, *Introduction to state-variable analysis*, Macmillan, 1977

[7-3] Ogata K., *State space analysis of control systems*, Prentice-Hall, 1977

[7-4] Borrie John A., *Modern control systems*, Prentice-Hall, 1986

[7-5] Friedland B., *Control system design*, McGraw-Hill, 1987

[7-6] Brogan William L., *Modern control theory*, Prentice-Hall, 1991

[7-7] Rosenbrock H. H., *State-space and multivariable theory*, Nelson, 1970

[7-8] Kailath, T., *Linear systems*, Prentice-Hall, 1980

[7-9] Chen C.T., *Introduction to linear system theory*, Holt, Rinehart and Winston, 1970

کتاب شناسی

در زمینه تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل در فضای حالت، مراجع فراوانی وجود دارند. برای آشنایی بیشتر با مفاهیم اولیه فضای حالت، روش‌های پایه در تحلیل و طراحی فضای حالت و درک عمیق‌تر مفاهیم ارایه شده در این فصل به مرجع [۱-۷] مراجعه شود. تقریباً کلیه کتابهای مقدماتی در رابطه با تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل، فصل یا فصلهایی در ارتباط با تحلیل و طراحی فضای حالت دارند. مراجع [۲]، [۳] و [۴]، این مفاهیم را به صورت مقدماتی بیان کرده‌اند. مرجع [۷]، با بکارگیری مسائل حل شده فراوان پاره‌ای از مفاهیم فضای حالت را به طور ساده، توضیح داده است. مراجع [۷-۲] تا [۷-۵]، به طور تخصصی به بیان تحلیل و طراحی فضای حالت پرداخته‌اند. این مراجع، بیشتر به صورت مفهومی و مهندسی به مسئله فضای - حالت پرداخته‌اند. در [۷-۳]، نرمافزارهای مناسبی نیز برای تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل به روش فضای - حالت آورده شده است. جبر خطی یک وسیله بسیار مناسب و لازم برای بررسی تئوریک مفاهیم فضای - حالت است. مراجع [۱-۷] و [۷-۶] فصلهایی در ارتباط با مقدمات جبر خطی و آشنایی با آن آورده‌اند. برای بررسی دقیق ریاضی و ارایه اثباتهای قضایای فضای حالت و برخورد عمیق تئوریک با آن، به مراجع [۵-۷] تا [۹-۷] می‌توان مراجعه کرد. مرجع [۲۶] فضای حالت را در حوزه دیجیتال مورد بررسی قرار داده است. در این مرجع، فضای حالت زمان - پیوسته نیز به مقدار قابل توجهی توضیح داده شده است.

واژه‌نامه انگلیسی - فارسی

A

Acceleration input	ورودی شتاب	Cofactor	کوفاکتور
Accelerometer	شتات سنج	Coil	کویل
Adaptive control	کنترل تطبیقی	Compensation	جبران سازی
Aileron	شپیر	Compensator	جبران ساز
Analytic function	تابع تحلیلی	Conditional frequency	فرکانس شرطی
Angle condition	شرط زاویه	Conditionally stable	پایدار شرطی
Angle deficiency	نقص زاویه	Conductors	هادیها
Array	آرایه	Constant M-Circle	دایره M - ثابت
Armature control	کنترل آرمیچر	Constant M-Locus	مکان M - ثابت
Asymptote	مجانب	Continued fractions	کسرهای متناولی
Asymptotic stability	پایداری مجانبی	Continuous-time	زمان - پیوسته
Auxillary equation	معادله کمکی	Control action	عمل کنترلی

B

Back emf	برگشتی emf	Controller	کنترل کننده
Bandwidth	پهنای باند	Control signal	سیگنال کنترلی
Block diagram	دیاگرام بلورکی	Control surfaces	سطح کنترلی
Bode	بورد	Conventional	سترنی
Bode plots	نمودارهای بورد	Corner frequency	فرکانس گوش
Branch	شاخه	Counter clockwise	در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت
Break-away point	نقطه در شکست	Critical	بحارانی
Break frequency	فرکانس شکست	Critically damped	میرای بحارانی
Break-in point	نقطه بر شکست	Curvilinear	منحنی الخط

C

Cascade	متواالی	.Cutoff frequency	فرکانس قطع
Causal	علی	Cutoff rate	نرخ قطع
Characteristic equation	معادله مشخصه	Damped natural frequency	فرکانس طبیعی میرا شده
Clockwise	در جهت حرکت عقربه‌های ساعت	Damping	میرایی
Closed-loop	حلقه - بسته		

D

Damping ratio	نسبت میرایی	Field control	کنترل میدان
Decade	دهه	Final value theorem	قضیه مقدار نهایی
Decibel	دسیبل	Flux	فلوی
Delay time	زمان تأخیر	Flyball governer	گاوارنر توپ گردان
Desired output	خروجی مطلوب	Forcing function	تابع وادارنده
Digital control	کنترل دیجیتال	Forward path	مسیر پیشرو
Direct polar plot	نمودار قطبی مستقیم	Free response	پاسخ آزاد
Direct transmission	انتقال مستقیم	Frequency response	پاسخ فرکانسی
Discrete-time	زمان - گسته	Full order observer	رؤیتگر مرتبه کامل
Design	طراحی	Functional dependence	وابستگی تابعی
Disturbance signal	سیگنال اختشاش	G	
Dominant poles	قطبهای غالب	Gain	بهره
Dynamic	دینامیک	Gain crossover frequency	فرکانس تقاطع بهره
E		Gain margin	حاشیه بهره
Eigenvalue	مقدار ویژه	H	
Elevator	بالابر	Heaviside	هوی ساید
Encirclement	دور زدن	Highpass filter	فیلتر بالاگذار
Energy-storage	نگهدارنده - انرژی	Homogeneous part	قسمت همگن
Error	خطا	Hurwitz	هرویتز
Error coefficient	ضریب خطأ	Hurwitz criteria	معیار هرویتز
Estimated	تخمین زده شده	I	
Estimation	تخمین	Impulse function	تابع ضربه
External description	توصیف خارجی	Independent state variable	
External disturbances	اختشاشات خارجی		متغیر حالت ناوابسته
F		Inductance	هدایت
Fundamental matrix	ماتریس اساسی	Initial state	حالت اولیه
Feedback	فیدبک - فیدبک کردن	Initial value theorem	قضیه مقدار اولیه
Feedback compensation	جبرانسازی فیدبک	Input matrix	ماتریس ورودی
Feedback control	کنترل فیدبک	Input node	گره ورودی
Feedforward control	کنترل پیش خور	Input-output data	داده های ورودی - خروجی

Insignificant poles	قطبهای کم اثر	N	
Intelligent	هوشمند	Natural frequency	فرکانس طبیعی
Intelligent control	کنترل هوشمند	Negative feedback	فیدبک منفی
Internal description	توصیف داخلی	Nichols chart	چارت نیکولز
Inverse Nyquist plot	نمودار معکوس نایکوئیست	Node	گره
Inverse unstable	معکوس ناپایدار	Noncausal	غیرعلی
L		Nonlinear	غیرخطی
Laplace transform	تبدیل لاپلاس	Nonminimum phase	غیر مینیمم فاز
Linear	خطی	Nonsingular	ناویژه
Load	بار	Nontouching loops	حلقه‌های مجذرا
Load disturbances	اغتشاشات بار	N-th order system	سیستم مرتبه nام
Load impedance	امپدانس بار	Nyquist	نایکوئیست
Log magnitude	لگاریتم دامنه	Nyquist contour	مسیر نایکوئیست
Loop	حلقه	Nyquist plot	نمودار نایکوئیست
Loop gain	بهره حلقه	O	
Low pass filter	فیلتر پایین‌گذار	Observability	ماتریس رؤیت‌پذیری
M		Observable	رؤیت‌پذیر
Magnitude	دامنه	Observation error	خطای رؤیت
Magnitude condition	شرط دامنه	Observer	رویتگر
Mason's gain formula	فرمول بهره میسن	Observer matrix	ماتریس رؤیتگر
Maximum overshoot	فراجهش حد اکثر	Octave	اوکتاو
Minimal realization	تحقیق می‌نیمال	Offset	افست
Minimum phase	مینیمم فاز	Open-loop	حلقه- باز
Mixed node	گره مخلوط	Operating point	نقطه کار
Modern control	کنترل مدرن	Order	مرتبه
Motor shaft	شفت موتور	Output node	گره خروجی
Multiplicity	تعدد	Output matrix	ماتریس خروجی
Multivariable control	کنترل چند متغیره	Overdamped	میرای شدید
		Overshoot	فراجهش

P

Parabolic error constant

ثابت خطای سهموی

Parabolic function

تابع سهموی

Parallel

موازی

Path

مسیر

Path gain

بهره مسیر

Peak resonance

تشدید ستینغ

Peak time

زمان ستینغ

Phase

فاز

Phase crossover frequency فرکانس تقاطع فاز

Phase lag

پس فاز

Phase lag-lead

پس - پیش فاز

Phase lead

پیش فاز

Phase margin

حاشیه فاز

Phase shift

انتقال فاز

Phasor diagram

دیاگرام فازور

Physical variables

متغیرهای فیزیکی

Pitch

فراز

Plant

دستگاه

Polar plot

نمودار قطبی

Pole

قطب

Pole placement

جایابی قطب

Pole-zero cancellation

حذف قطب - صفر

Polynomial function

تابع چند جمله‌ای

Process

فرایند

Proper

سره، معمول

Proportional-Derivative

تนาوبی مشتقی

Proportional-Integral

تนาوبی انتگرال

R

Ramp error constant

ثابت خطای شیب

Ramp function

تابع شیب

Random

تصادفی

Random noise

نویز تصادفی

Realization

تفق

Reconstruction

بازسازی

Reduced-order observer

رؤینگر مرتبه کاهش یافته

Reference input

وروی مرجع

Regulator

رگلاتور

Relative damping ratio نسبت میرایی نسبی

Resonant frequency فرکانس تشدید

ستینغ تشدید

Resonant peak

پاسخ

Response

زمان صعود

Rise time

مقابوم

Robust

مسیرهای ریشه

Root contours

مکان ریشه

Root locus

آرایه روٹ

Routh array

معیار روٹ

Routh criteria

سکان

Rudder

S

Semilog paper

کاغذ نیمه لگاریتمی

Sensitivity

حساسیت

Series

سری

Series compensation

جبهانسازی سری

Servo

سرو

Servomechanism

سرور مکانیزم

Set-point

نقطه نشانده

Settling time	زمان استقرار	T	
Signal flow graph	نمودار گذر سیگنال	Take-off point	نقطه خروج
Singular	ویژه	Time constant	ثابت زمانی
Sink	سینک	Time delay	تأخیر زمانی
Sinusoidal function	تابع سینوسی	Time delayed	تأخیر دار
Solenoid	سولونوئید	Time domain	حوزه زمان
Source	منبع	Time invariant	تغییر ناپذیر با زمان
Spiral	حلزونی	Time varying	تغییر پذیر با زمان
Spirule	اسپیرول	Thrust	پیشانه
Stability	پایداری	Tolerance	تolerانس
Stabilization	پایدارسازی	Torsional spring constant	ثابت فر پیچشی
State	حالت	Torque	گشتاور
State controllable	کنترل پذیر حالت	Transfer function	تابع تبدیل
State feedback	فیدبک حالت	Transient response	پاسخ گذرا
State matrix	ماتریس حالت	Transmittance	انتقال
State space	فضای حالت	U	
State transition matrix	ماتریس انتقال حالت	Uncertainty	نامعینی
State uncontrollable	کنترل ناپذیر حالت	Undamped	میراثنده
State variable	متغیر حالت	Underdamped	میرای ضعیف
State vector	بردار حالت	Unit ramp input	ورودی شبیه واحد
Steady-state error	خطای حالت ماندگار	Unit step	پله واحد
Steady-state response	پاسخ حالت ماندگار	Unknown system	سیستم ناشناخته
Step-error constant	ثابت خطای پله	Unstable	ناپایدار
Step function	تابع پله	V	
Strictly proper	اکیدا سره، اکیدا معمول	Velocity input	ورودی سرعت
Summing point	نقطه جمع	Z	
Super position principle	اصل جمع آثار	Zero	صفر
System identification	شناسایی سیستم	Zero input response	پاسخ ورودی صفر
System order	مرتبه سیستم	Zero state response	پاسخ حالت صفر
System type	نوع سیستم	Ziegler-Nichols	زیگلر - نیکولز

واژه‌نامه فارسی - انگلیسی

آ

Steady-state response	پاسخ حالت ماندگار	Array	آرایه
Frequency response	پاسخ فرکانسی	Routh array	آرایه روث
Transient response	پاسخ گذرا	Spirule	اسپیرول
Zero input response	پاسخ ورودی صفر	Super position principle	اصل جمع آثار
Stabilization	پایدارسازی	Load disturbances	اختشاست بار
Conditionally stable	پایدار شرطی	External disturbances	اختشاست خارجی
Stability	پایداری	Offset	افست
Asymptotic stability	پایداری مجانی	Strictly proper	اکیدا سره، اکیدا معمول
Phase lag-lead	پس - پیش فاز	Load impedance	امپدانس بار
Phase lag	پس فاز	Transmittance	انتقال
Unit step	پله واحد	Phase shift	انتقال فاز
Bandwidth	پهنای باند	Direct transmission	انتقال مستقیم
Thrust	پیشرانه	Octave	اوکتاو
Phase lead	پیش فاز	Load	بار
ت			
Step function	تابع پله	Reconstruction	بازسازی
Transfer function	تابع تبدیل	Elevator	بالابر
Analytic function	تابع تحلیلی	Critical	بحراتی
Polynomial function	تابع چند جمله‌ای	State vector	بردار حالت
Parabolic function	تابع سهموی	Back emf	برگشتی emf
Sinusoidal function	تابع سینوسی	Bode	برد
Ramp function	تابع شبیب	Gain	بهره
Impulse function	تابع ضربه	Loop gain	بهره حلقه
Forcing function	تابع وادارنده	Path gain	بهره مسیر
Time delayed	تأخير دار		
Time delay	تأخير زمانی	Response	پاسخ
Laplace transform	تبدیل لابلاس	Free response	پاسخ آزاد
Realization	تحقق	Zero state response	پاسخ حالت صفر

Initial state	حالت اولیه	Minimal realization	تحقیق می‌نیمال
Pole-zero cancellation	حذف قطب - صفر	Estimation	تخمین
Sensitivity	حساسیت	Estimated	تخمین زده شده
Spiral	حلزونی	Peak resonance	تشدید ستیغ
Loop	حلقه	Random	تصادفی
Open-loop	حلقه - باز	Multiplicity	تعدد
Closed-loop	حلقه - بسته	Time varying	تغییرپذیر با زمان
Nontouching loops	حلقه‌های مجزا	Time invariant	تغییرناپذیر با زمان
Time domain	حوزه زمان	Tolerance	تلرانس
	خ	Proportional- Integral	تناسبی انتگرال
Controlled output	خروجی کنترل شده	Proportional- Derivative	تناسبی مشتقی
Desired output	خروجی مطلوب	External description	توصیف خارجی
Error	خطا	Internal description	توصیف داخلی
Steady-state error	خطای حالت ماندگار		ث
Observation error	خطای رؤیت	Step-error constant	ثابت خطای پله
Linear	خطی	Parabolic error constant	ثابت خطای سهمی
	د	Ramp error constant	ثابت خطای شیب
Input-output data	داده‌های ورودی - خروجی	Time constant	ثابت زمانی
Magnitude	دامنه	Torsional spring constant	ثابت فنر پیچشی
Constant M-Circle	دایره M - ثابت		ج
Clockwise	در جهت حرکت عقربه‌های ساعت	Pole placement	جایابی قطب
	در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت	Compensator	جبран ساز
Counter clockwise		Compensation	جبران سازی
Plant	دستگاه	Series compensation	جبرانسازی سری
Decibel	دسی‌بل	Feedback compensation	جبرانسازی فیدبک
Encirclement	دور زدن		چ
Decade	دهه	Nichols chart	چارت نیکولز
Block diagram	دیاگرام بلکی		ح
Phasor diagram	دیاگرام فازور	Gain margin	حاشیه بهره
Dynamic	دینامیک	Phase margin	حاشیه فاز
		State	حالت

ش	ر
Branch	شاخه
Accelerometer	شتاپ سنج
Magnitude condition	شرط دامنه
Angle condition	شرط زاویه
Motor shaft	شفت موتور
System identification	شناسایی سیستم
Aileron	شپر
ص	
Zero	صفر
ض	
Error coefficient	ضریب خطأ
ط	
Design	طراحی
ع	
Causal	علی
Control action	عمل کنترلی
غ	
Nonlinear	غیرخطی
Noncausal	غیرعلی
Nonminimum phase	غیر مینیمم فاز
ف	
Phase	فاز
Overshoot	فراجیش
Maximum overshoot	فراجیش حد اکثر
Pitch	فراز
Process	فرایند
Resonant frequency	فرکانس تشدید
Gain crossover frequency	فرکانس تقاطع بهره
Phase crossover frequency	فرکانس تقاطع فاز
Regulator	رگلاتور
Observable	رؤیت پذیر
Observer	رؤیتگر
Full order observer	رؤیتگر مرتبه کامل
Reduced-order observer	رؤیتگر مرتبه کاهش یافته
Settling time	زمان استقرار
Continuous-time	زمان - پیوسته
Delay time	زمان تأخیر
Peak time	زمان ستیغ
Rise time	زمان صعود
Discrete-time	زمان - گسسته
Ziegler-Nichols	زیگلر - نیکولز
س	
Resonant peak	ستیغ تشدید
Servo	سرو
Servomechanism	سرو مکانیزم
Proper	سره، معمول
Series	سری
Control surfaces	سطح کنترلی
Rudder	سکان
Conventional	سترنی
Solenoid	سولئونوئید
N-th order system	سیستم مرتبه n ام
Unknown system	سیستم ناشناخته
Disturbance signal	سیگنال اختشاش
Control signal	سیگنال کنترلی
Sink	سینک

Digital control	کنترل دیجیتال	Conditional frequency	فرکانس شرطی
Feedback control	کنترل فیدبک	Break frequency	فرکانس شکست
Controller	کنترل کننده	Natural frequency	فرکانس طبیعی
Modern control	کنترل مدرن		فرکانس طبیعی میرا شده
Field control	کنترل میدان	Damped natural frequency	
State uncontrollable	کنترل ناپذیر حالت	Cutoff frequency	فرکانس قطع
Intelligent control	کنترل هوشمند	Corner frequency	فرکانس گوش
Cofactor	کوفاکتور	Mason's gain formula	فرمول بیرون میسین
Coil	کویل	State space	فضای حالت
Flyball governer	گاورنر توب گردان	Flux	فلوی
Node	گره	State feedback	فیدبک حالت
Output node	گره خروجی	Feedback	فیدبک - فیدبک کردن
Mixed node	گره مخلوط	Negative feedback	فیدبک منفی
Input node	گره ورودی	High pass filter	فیلتر بالاگذار
Torque	گشتاور	Low pass filter	فیلتر باین گذار
	ل		ق
Log magnitude	لگاریتم دامنه	Homogeneous part	قسمت همگن
	م	Initial value theorem	قضیه مقدار اولیه
Fundamental matrix	ماتریس اساسی	Final value theorem	قضیه مقدار نهایی
State transition matrix	ماتریس انتقال حالت	Pole	قطب
State matrix	ماتریس حالت	Dominant poles	قطبهای غالب
Output matrix	ماتریس خروجی	Insignificant poles	قطبهای کم اثر
Observability	ماتریس رؤیت پذیری	Semilog paper	کاغذ نیمه لگاریتمی
Observer matrix	ماتریس رؤیتگر	Continued fractions	کسرهای متواالی
Input matrix	ماتریس ورودی	Armature control	کنترل آرمیجر
State variable	متغیر حالت	State controllable	کنترل پذیر حالت
	متغیر حالت ناوابسته.	Feedforward control	کنترل پیش خور
Independent state variable		Adaptive control	کنترل تطبیقی
Physical variables	متغیرهای فیزیکی	Multivariable control	کنترل چند متغیره

Nyquist	نایکریست	Cascade	متداولی
Cutoff rate	نرخ قطع	Asymptote	مجاہب
Damping ratio	نسبت میرایی	Order	مرتبه
Relative damping ratio	نسبت میرایی نسبی	System order	مرتبه سیستم
Break-away point	نقطه در شکست	Path	مسیر
Angle deficiency	نقص زاویه	Forward path	مسیر پیش رو
Break-in point	نقطه بر شکست	Nyquist contour	مسیر نایکریست
Summing point	نقطه جمع	Root contours	مسیرهای ریشه
Take-off point	نقطه خروج	Auxillary equation	معادله کمکی
Operating point	نقطه کار	Characteristic equation	معادله مشخصه
Set-point	نقطه نشانه	Inverse unstable	معکوس نایابدار
Energy-storage	نگهدارنده - انرژی	Routh criteria	معیار روث
Polar plot	نمودار قطبی	Hurwitz criteria	معیار هرویتز
Direct polar plot	نمودار قطبی مستقیم	Robust	مقارم
Signal flow graph	نمودار گذر سیگنال	Eigenvalue	مقدار ویژه
	- نمودار معکوس نایکریست	Root locus	مکان ریشه
Inverse Nyquist plot	-	Constant M-Locus	مکان M - ثابت
Nyquist plot	نمودار نایکریست	Source	منبع
Bode plots	نمودارهای بود	Curvilinear	منحنی الخط
System type	نوع سیستم	Parallel	مرازی
Random noise	نویز تصادفی	Undamped	میراثنده
	و	Critically damped	میرایی بحرانی
Functional dependence	وابستگی تابعی	Overdamped	میرای شدید
Velocity input	ورودی سرعت	Underdamped	میرای ضعیف
Acceleration input	ورودی شتاب	Damping	میرایی
Unit ramp input	ورودی شب واحد	Minimum phase	منیم فاز
Reference input	ورودی مرجع		ن
Singular	ویژه	Unstable	نایابدار
	و	Uncertainty	نامعینی
Conductors	هادیها	Nonsingular	ناویژه



Intelligent
Heaviside

هوشمند
هروی ساید

Inductance
Hurwitz

هدایت
هرویتز

www.ControlMakers.ir