فصل ۹

تبدیل لاپلاس و تحلیل مدار به کمک آن

مقدمه

قبل از شروع این فصل بسیار مهم و کاربردی، بد نیست کمی توضیحات مقدماتی بدهم که ذهن شما کاملاً آماده شود. ببینید بعضی وقت‌ها حل برخی از مسایل در حوزه (یا همان شهر) زمان بسیار دشوار است. اما همین مسئله وقتی که به حوزه (شهر) فرکانس منتقل می‌شود، بسیار راحت می‌شود. (و البته گاهی هم بالعکس است.) پس اگر ما ابزاری داشته باشیم که به کمک آن بتوانیم مدارمان را از حوزهٔ t به حوزهٔ S ببریم، زندگی شیرین می‌شود. خیالتان راحت؛ چنین ابزاری را داریم؛ نام یکی از ابزارهای کارآمد، «آقای لاپلاس» است؛ از آقای لاپلاس ممنونیم و تبدیل ارزشمند او را ارج می‌نهیم.

۹ـ۱ تبدیل لاپلاس

از دو پنجره به سرزمین لاپلاس نگاه می‌کنیم؛ یکی افق ریاضی[۱] و دیگری نگاه مداری

ابتدا نگاه ریاضی:

ایدهٔ اصلی آن است که برای هر تابع در حوزهٔ زمان $f(t)$، یک تابع در حوزهٔ فرکانس $F(s)$ متناظر می‌شود و بالعکس.

۱ـ که البته شما آن را به خوبی فرا گرفته‌اید...

www.ControlMakers.ir

منظور همان رابطهٔ:

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}.\,dt \qquad (۱\_۹)$$

است؟

بله، ولی در درس مدار ما به خواص و قضایای تبدیل لاپلاس کار داریم[۱]، خواصی همچون:

الف) یکتایی: یعنی به ازای هر تابع $f(t)$ ، یک و فقط یک تابع $F(s)$ به عنوان تبدیل لاپلاس آن وجود دارد و بالعکس.

ب) خطی بودن؛ یعنی:

$$\mathscr{L}\{k_1 f_1 + k_2 f_2\} = k_1 F_1 + k_2 F_2 \qquad (۲\_۹)$$

ج) انتقال در حوزهٔ فرکانس:

$$e^{-at} f(t) \quad \underset{\mathscr{L}^{-1}}{\overset{\mathscr{L}}{\rightleftarrows}} \quad F(s+a) \qquad (۳\_۹)$$

د) انتقال در حوزهٔ زمان:

$$f(t-a)\,u(t-a) \quad \underset{\mathscr{L}^{-1}}{\overset{\mathscr{L}}{\rightleftarrows}} \quad e^{-as} F(s) \qquad (۴\_۹)$$

هـ)مشتق‌گیری در حوزهٔ زمان:

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \quad \underset{\mathscr{L}^{-1}}{\overset{\mathscr{L}}{\rightleftarrows}} \quad S^n F(s) - S^{n-1} f(0) - S^{n-2} f'(0) - \cdots - \frac{d^{n-1} f(0)}{dt^{n-1}} \qquad (۵\_۹)$$

مثلاً:

$$f'(t) \quad \underset{\mathscr{L}^{-1}}{\overset{\mathscr{L}}{\rightleftarrows}} \quad S\,F(s) - f(0) \qquad (۶\_۹)$$

۱ـ یادتان باشد که سیگنال‌های مورد بررسی در درس مدار به ازای $t \geq 0$ تعریف شده‌اند.

www.ControlMakers.ir

و یا:

$$f''(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} S^2F(s)-sf(0)-f'(0) \qquad (۹\_۷)$$

و) انتگرال‌گیری در زمان:

$$\int_0^t f(t).dt \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} \frac{1}{S}F(s) \qquad (۹\_۸)$$

ز) مشتق‌گیری در فرکانس:

$$(-1)^n t^n f(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} \frac{d^n F(s)}{ds^n} \qquad (۹\_۹)$$

مثلاً:

$$-tf(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} F'(s) \qquad (۹\_۱۰)$$

ح) انتگرال‌گیری در فرکانس:

$$\frac{f(t)}{t} \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} \int_0^s F(s)ds \qquad (۹\_۱۱)$$

ط) تغییر مقیاس زمانی:

$$f(at) \underset{a>0}{\underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}}} \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \qquad (۹\_۱۲)$$

و حالا دو قضیهٔ فوق‌العاده مهم[۱]!

۱ـ این دو قضیه بیشتر از درس مدار، در درس کنترل خطی حایز اهمیت است.

www.ControlMakers.ir

www.ControlMakers.ir

ی) قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی:

$$\lim_{t\to 0} f(t) \underset{\text{مقدار اولیه}}{=} \lim_{S\to\infty} sF(s) \qquad (۹\_۱۳)$$

$$\lim_{t\to \infty} f(t) \underset{\text{مقدار نهایی}}{=} \lim_{S\to 0} sF(s) \qquad (۹\_۱۴)$$

خیلی جالب است ها! یعنی رفتار تابع $f(t)$ در دو کرانهٔ صفر و بی‌نهایت، همچون رفتار S برابر تبدیل لاپلاس آن $(sF(s))$ در دو کرانهٔ بی‌نهایت و صفر است؛ به قول استاد در مفهوم این حرف باید تأمل کرد؛ من یه جورایی احساس می‌کنم که بوی خوبی در کلاس می‌آید! بوی مطبوع رابطه صفره و رابطه بی‌نهایته. فکر کنم دارم فلسفه آن‌ها را درک می‌کنم که چرا آن اتفاقات جالب در حوزهٔ زمان رخ می‌داد. حالا می‌فهمم که چرا لحظهٔ کلیدزنی $(t=0)$ این‌قدر آشوبناک $(s\to\infty)$ است! و حس خوبی دارم از اینکه در زمان حالت دایمی $(t\to\infty)$، مدار لبریز از آرامش $(s=0)$ است. من عاشق این نگاه‌های فلسفی در مهندسی‌ام!

ک) تبدیل لاپلاس توابع نیمه‌متناوب[۱]:

اگر $f(t)$ تابع نیمه‌متناوب با دورهٔ تناوب T و ایجادشده از تکرار $f_1(t)$ باشد، داریم:

$$f(t) \overset{\mathscr{L}}{\underset{\mathscr{L}^{-1}}{\rightleftarrows}} \frac{1}{1-e^{-Ts}} F_1(s) \qquad (۹\_۱۵)$$

که در آن:

$$F_1(s) = \mathscr{L}\{f_1(t)\} \qquad (۹\_۱۶)$$

پس وجود فاکتور $\frac{1}{1-e^{-Ts}}$ در حوزه فرکانس، بیانگر تناوب در حوزهٔ زمان با پریود T است.

۱ـ چرا که تابع ما در $t \geq 0$ تعریف شده است.

www.ControlMakers.ir

حالا جدول تبدیل لاپلاس توابع مهم را نگاه کنید[۱]:

$F(s)$	$f(t)$
1	$\delta(t)$
$\frac{1}{s}$	$u(t)$
$\frac{1}{s^2}$	$r(t)$
$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!}u(t)$
$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$	$e^{-at}\frac{t^n}{n!}u(t)$
$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}u(t)$
(زوج) $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	(فرد) $\sin(\omega t).u(t)$
(فرد) $\frac{s}{s^2+\omega^2}$	(زوج) $\cos(\omega t).u(t)$
(زوج) $\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	(فرد) $\sinh(\omega t).u(t)$
(فرد) $\frac{s}{s^2-\omega^2}$	(زوج) $\cosh(\omega t).u(t)$
s^i	$\delta^{(i)}(t)$ مشتق مرتبه i ام ضربه
ضرب $F \times g$	کانولوشن $f*g$
کانولوشن $F * g$	ضرب $f \times g$
⋮	⋮

شکل (۱.۹) تبدیل لاپلاس توابع مهم

و بالاخره:

۱ـ و همین الان لطفاً حفظ کنید. (البته اگر حفظ نیستید!)

www.ControlMakers.ir

عکس تبدیل لاپلاس:

گاهی اوقات مثلاً هنگام تحلیل مدار به کمک تبدیل لاپلاس، هنگامی که از شهر زمان (t) به شهر فرکانس (s) رفته‌ایم و مدار را با سادگی دوچندان حل کرده‌ایم، حالا پاسخ زمانی را می‌خواهیم، پس باید مجدداً به شهر زمان برگردیم. به این عمل، عکس تبدیل لاپلاس می‌گوییم.

در قدم اول سعی بر آن است که با قضایا و جدول گفته‌شده، $\mathscr{L}^{-1}$ بگیریم، در غیر این صورت از روش‌هایی مانند «**تجزیه به کسرهای جزئی**»[1] بهره می‌گیریم.

اگر جسارت نباشد، یک سؤال دارم؛ آیا بررسی تبدیل لاپلاس از نقطه‌نظر ریاضی در درس مدار آن هم برای کنکور کارشناسی ارشد، تا به این حد لازم است؟

به‌جای آنکه مستقیماً پاسخ سؤال شما را بگویم، از شما دعوت می‌کنم به تمرین‌های زیر که سؤالات کنکور ارشد درس مدار است، توجه کنید:

۱ـ اگر $V(s)=\dfrac{-36s^2-24s+2}{12s^3+17s^2+6s}$ باشد، مقدار $\dfrac{dv}{dt}(0^+)$ چقدر است؟

۱) $\dfrac{3}{4}$ ۲) $\dfrac{7}{4}$ ۳) $\dfrac{5}{4}$ ۴) $\dfrac{9}{4}$

من حل می‌کنم ! به کمک قضیهٔ مقدار اولیه داریم:

$$\frac{dV}{dt}(0^+)=\lim_{S\to\infty} s\,\mathscr{L}\left\{\frac{dv}{dt}\right\}$$

پس حالا $\mathscr{L}\left\{\dfrac{dv}{dt}\right\}$ را می‌خواهیم، آن هم معلوم است دیگر:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{dv}{dt}\right\}=sV(s)-v(0^+)$$

و حالا $V(0)$ لازم است که یک‌بار دیگر از قضیه مقدار اولیه بهره می‌گیریم:

$$v(0^+)=\lim_{S\to\infty} sV(s)=\lim_{S\to\infty}\frac{-36s^3+\cdots}{12s^3+\cdots}=-3$$

۱ـ من حدس می‌زنم در n درس، بحث تجزیه به کسرهای جزئی را خوانده‌اید؛ پس برای پرهیز از طولانی شدن کلام، مرور آن را به خودتان واگذار می‌کنم.

حالا مقدار اولیه را در رابطه $\mathscr{L}\left\{\frac{dv}{dt}\right\}$ جایگذاری می‌کنیم:

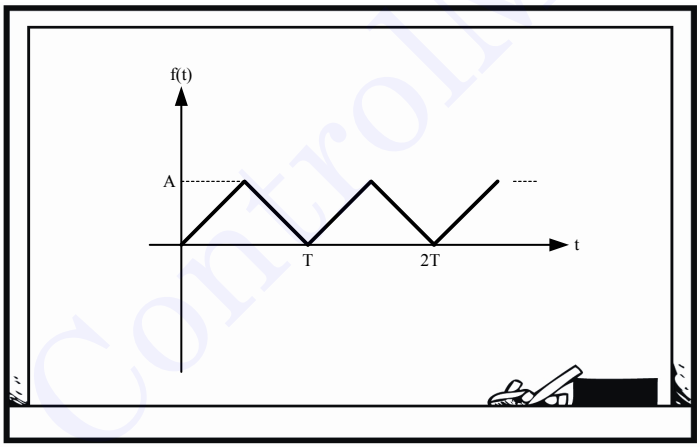
$$\mathscr{L}\left\{\frac{dv}{dt}\right\}=\frac{27s^2+20s}{12s^3+17s^2+6s}$$

و بالاخره:

$$\frac{dv}{dt}(0^+)=\lim_{s\to\infty}\frac{27\,s^3+\cdots}{12\,s^3+\cdots}=\frac{27}{12}=\frac{9}{4}$$

آفرین؛ خیلی عالی بود؛ به‌خصوص اینکه برای حل مسئله «از آخر» شروع کردی؛ یعنی اول دیدی که نیاز به $\mathscr{L}\left(\frac{dv}{dt}\right)$ هست و بعد فهمیدی که نیاز به $v(0)$ داریم و... من به این رویکرد در حل مسئله به شدت علاقه‌مندم! یعنی «حل از آخر» که در کلاس «الکترومغناطیس» هم مفصلاً به آن می‌پردازیم و اصولاً در مهندسی «حل از آخر» شاهکار است ... پس تکرار کنید: «حل از آخر»، «حل از آخر»، «حل از آخر»...

۲ـ تبدیل لاپلاس موج متناوب شکل زیر را بیابید.



شکل (۲.۹) شکل موج تمرین ۲

اگر آن تکهٔ تکرارشونده را $f_1(t)$ بنامیم، به کمک توابع معروف پله و شیب داریم:

$$f_1(t)=\frac{2A}{T}r(t)-\frac{4A}{T}r\left(t-\frac{T}{2}\right)+\frac{2A}{T}r(t-T)$$

و اگر از این بخش، تبدیل لاپلاس بگیریم:

$$F_1(s)=\frac{2A}{T}\left(\frac{1}{s^2}-2\frac{1}{s^2}e^{-\frac{T}{2}s}+\frac{1}{s^2}e^{-Ts}\right)$$

و به کمک اتحاد اول[1] :

$$F_1(s)=\frac{2A}{T}\frac{1}{s^2}\left(1-e^{-\frac{T}{2}s}\right)^2$$

و سرانجام به کمک رابطهٔ (۹ـ۱۵):

$$F(s)=\frac{2A}{T}\frac{1}{s^2}\left(1-e^{-\frac{T}{2}s}\right)^2\times\frac{1}{1-e^{-Ts}}$$

و با اتحاد مزدوج دوران دبیرستان:

$$F(s)=\frac{2A}{T}\frac{1}{s^2}\frac{1-e^{-\frac{T}{2}s}}{1+e^{-\frac{T}{2}s}}$$

۳ـ عکس تبدیل لاپلاس بگیرید.

$$F(s)=\frac{1}{s(s^2+9)}\quad,\quad G(s)=\frac{1}{s^2+s-2}$$

بسیار ساده است دیگر:

$$\frac{1}{s^2+9}=\frac{1}{3}\frac{3}{s^2+9}\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}\frac{1}{3}\sin 3t$$

$$\frac{1}{s}\frac{1}{s^2+9}\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}\int_0^t\frac{1}{3}\sin 3t\,dt=\frac{1}{9}(1-\cos 3t)$$

و در مورد دومی، ابتدا تجزیه به کسرهای جزئی:

$$G(s)=\frac{1}{s^2+s-2}=\frac{1}{(s-1)(s+2)}=\frac{\frac{1}{3}}{s-1}+\frac{-\frac{1}{3}}{s+2}$$

و بنابراین:

$$g(t)=\frac{1}{3}\left(e^{+t}-e^{-2t}\right)u(t)$$

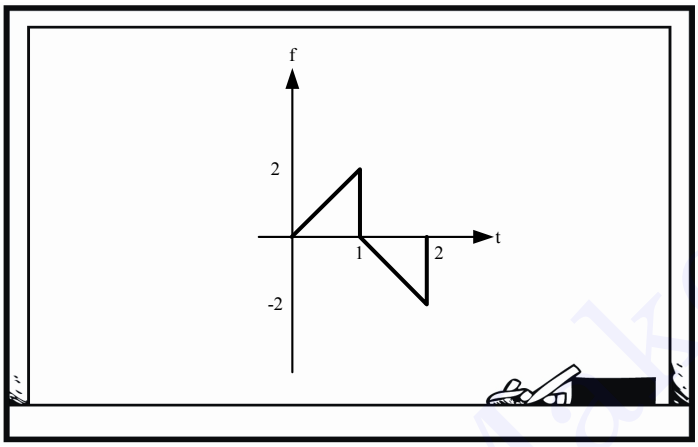
1ـ یاد باد آن روزگاران، یاد باد ! تا چشم به هم بزنید، دوران دانشگاه همان‌قدر برایتان قدیمی می‌شود که دوران دبیرستان هم‌اکنون در نظرتان هست و چه‌بسا قدیمی‌تر و...

www.ControlMakers.ir

۴ـ تبدیل لاپلاس شکل (۹ـ۳) را این‌گونه می‌توان نوشت:

$$F(s)=F_1(s)+F_2(s)\,e^{-s}+F_3(s)e^{-2s}$$

که در آن F_1 و F_2 و F_3 توابع گویایی از s هستند. این توابع به چه صورت‌اند؟



شکل (۳.۹) شکل موج تمرین ۴

باز بسیار ساده است؛ ابتدا تابع $f(t)$ را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(t)=2r(t)-2u(t-1)-4r(t-1)+2r(t-2)+2u(t-2)$$

با توجه به خواص تبدیل لاپلاس:

$$F(s)=\underbrace{\frac{2}{s^2}}_{F_1}+\underbrace{\left(-\frac{2}{s}-\frac{4}{s^2}\right)}_{F_2}e^{-s}+\underbrace{\left(\frac{2}{s}+\frac{2}{s^2}\right)}_{F_3}e^{-2s}$$

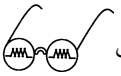
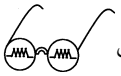
۲ـ۹ تحلیل مدار به کمک تبدیل لاپلاس

حال برویم سراغ کاربردهای تبدیل لاپلاس در تحلیل مدار که اصل کار ماست. ببینید، سبک مرسوم مراجع و دیگر کتاب‌ها در استفاده از تبدیل لاپلاس آن است که ابتدا معادلهٔ دیفرانسیل مدار را (در حوزهٔ زمان) می‌نویسند و سپس معادله دیفرانسیل را به کمک تبدیل

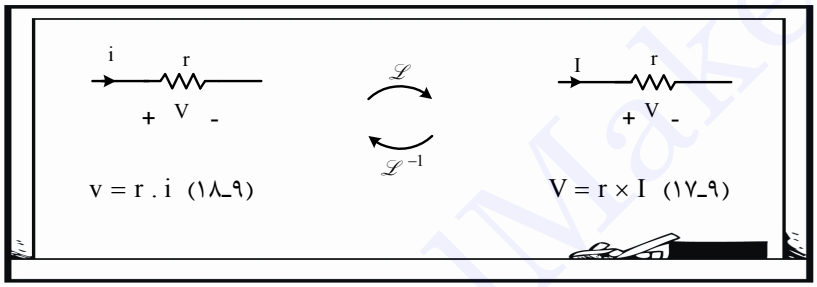
لاپلاس حل می‌کنند. به این ترتیب که با تبدیل لاپلاس گرفتن از معادلهٔ دیفرانسیل، به یک معادلهٔ جبری در حوزهٔ s می‌رسیم و پس از حل آن و عکس لاپلاس گرفتن به پاسخ مدار در حوزه زمان می‌رسیم.

اما من این روش را نمی‌پسندم!

به نظر من این بهتر است که کل هیکل! مدار را به حوزهٔ s ببریم و حالا دیگر یک مدار مقاومتی (و به عبارت شیک‌تر امپدانسی) خواهیم داشت، پس دیگر خبری از معادله دیفرانسیل نخواهد بود و کار ساده‌تر می‌شود.

این حرف‌ها شما را به یاد چه چیزی می‌اندازد؟ آفرین درست است؛ به یاد همان عینک مشهور! ، یعنی عینک مقاومت‌بین؛ دوباره همه چیز را به چشم مقاومتی می‌بینیم؛ اما راستش را بخواهید، کارایی این  خیلی بیشتر از مدل قبلی‌اش است. با این  کارهایی می‌کنیم که بیا و ببین! آرم عینک قبلی $j\omega$ بود و آرم این عینک S است!

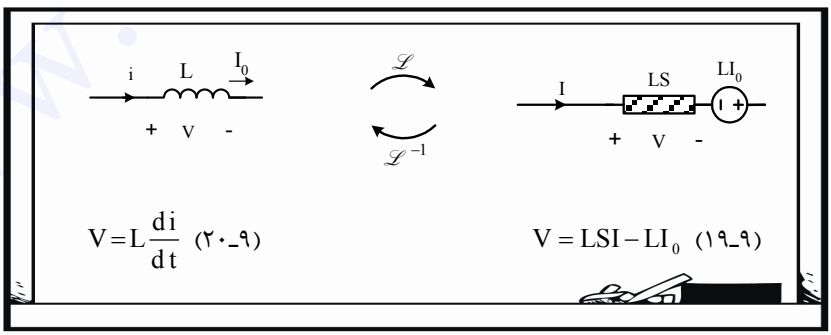
پس بیایید ببینیم که تک‌تک عناصر هنگامی‌که از حوزهٔ t به حوزهٔ s می‌روند، چه بلایی بر سرشان می‌آید:



شکل (۴.۹) مقاومت در حوزهٔ زمان و فرکانس[۱] و معادلات آن‌ها

و برای **سلف** :

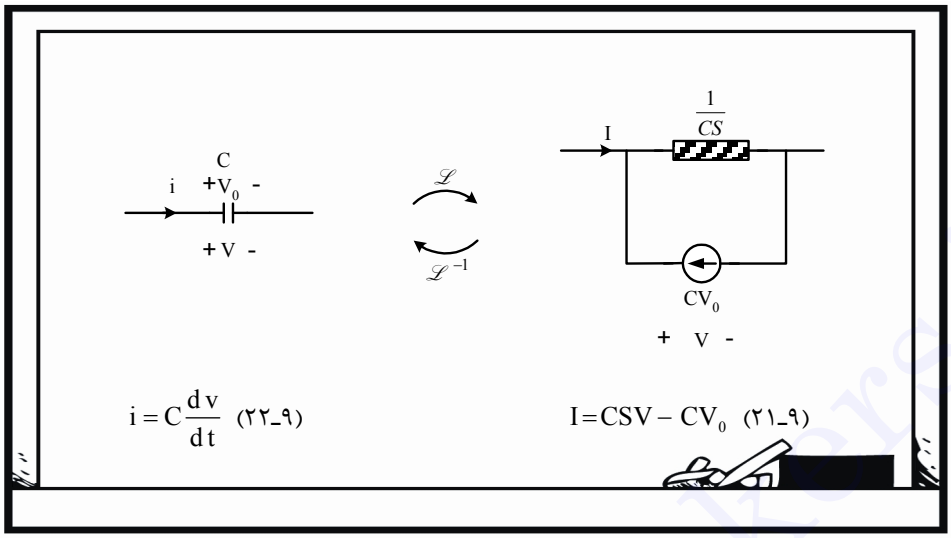
من عرض می‌کنم، به این شکل می‌شود:



شکل (۵.۹) سلف در حوزهٔ زمان و فرکانس و معادلات آن‌ها

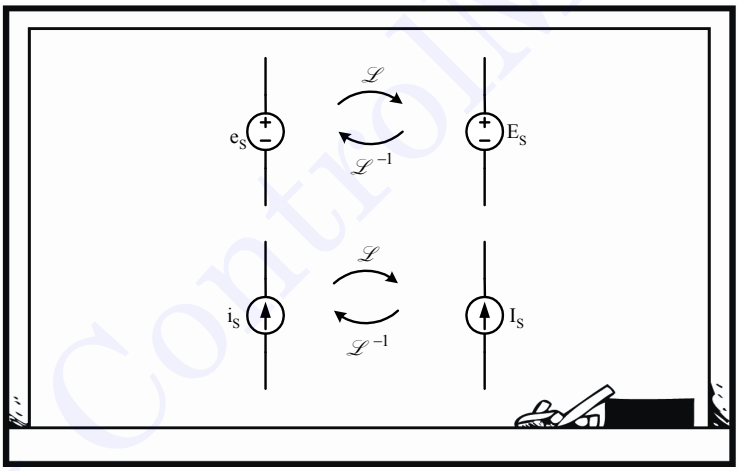
۱ـ گاهی می‌گویم مقاومت‌ها نسبت به فرکانس هیچ حساسیتی ندارند مثل !!!

و برای جناب خازن:



شکل (۶.۹) خازن در حوزهٔ زمان و فرکانس و معادلات آن‌ها

و در مورد منابع هم که واضح است:



شکل (۷.۹) منابع در حوزهٔ زمان و فرکانس

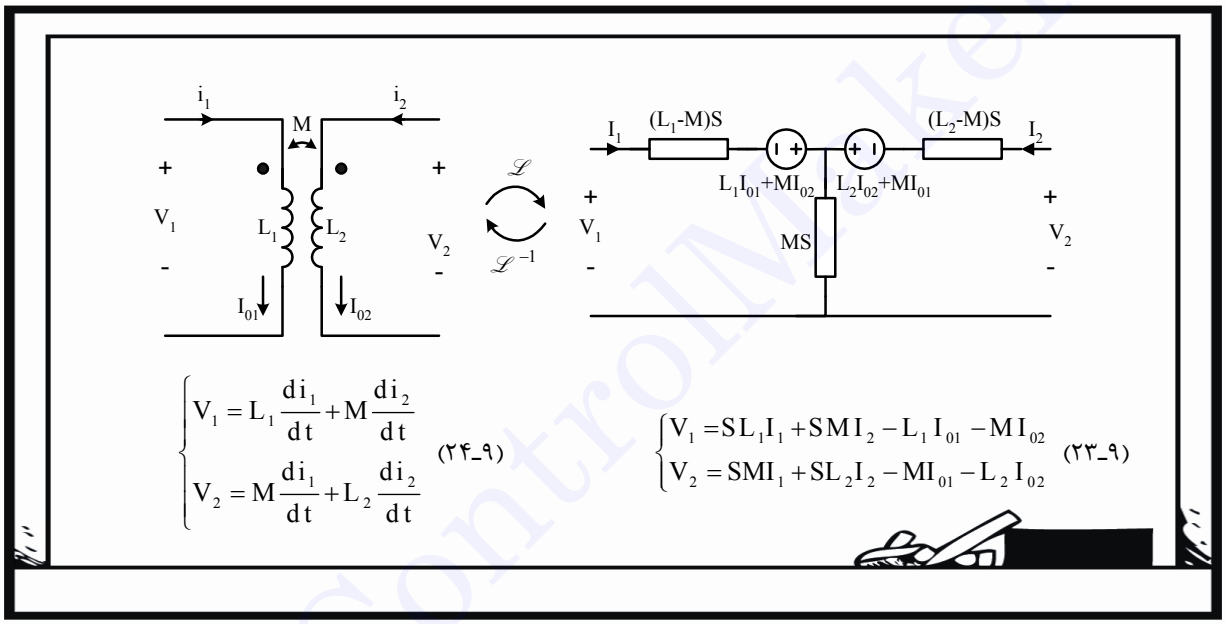
که واضح است E_s و I_s به ترتیب تبدیل لاپلاس e_s و i_s هستند. آیا علت این دوگانی واضح است؟

بله دیگر از معادلات (۹_۱۹) و (۹_۲۱) که لاپلاس بگیریم به معادلات (۹_۲۰) و (۹_۲۲) می‌رسیم.

www.ControlMakers.ir

پس این روش کار ما را ساده‌تر هم می‌کند. مثلاً اگر سلف‌های تزویج عنصر ما باشند!

باز هم واضح است که:



$$\begin{cases} V_1 = L_1\dfrac{di_1}{dt} + M\dfrac{di_2}{dt} \\ V_2 = M\dfrac{di_1}{dt} + L_2\dfrac{di_2}{dt} \end{cases} \quad (۲۴\text{-}۹)$$

$$\begin{cases} V_1 = SL_1I_1 + SMI_2 - L_1I_{01} - MI_{02} \\ V_2 = SMI_1 + SL_2I_2 - MI_{01} - L_2I_{02} \end{cases} \quad (۲۳\text{-}۹)$$

شکل (۸.۹) سلف‌های تزویج در حوزهٔ زمان و فرکانس و معادلات آن‌ها

یک سؤال!

www.ControlMakers.ir

در جایی یک جدول به شکل زیر دیدم:

عنصر	امپدانس Z (Ω)	ادمیتانس Y ($\mho$)
r	r	$\frac{1}{r}$
L	LS	$\frac{1}{LS}$
C	$\frac{1}{CS}$	CS

شکل (۹.۹) جدول تبدیل عناصر حوزه زمان به حوزهٔ فرکانس

چرا این موضوع کمی با آنچه گفته شد، متفاوت است؟

این جدول دقیقاً همان گفته‌های قبلی است، با این توضیح که در اینجا فرض ما استراحت اولیه یا حالت صفر است.

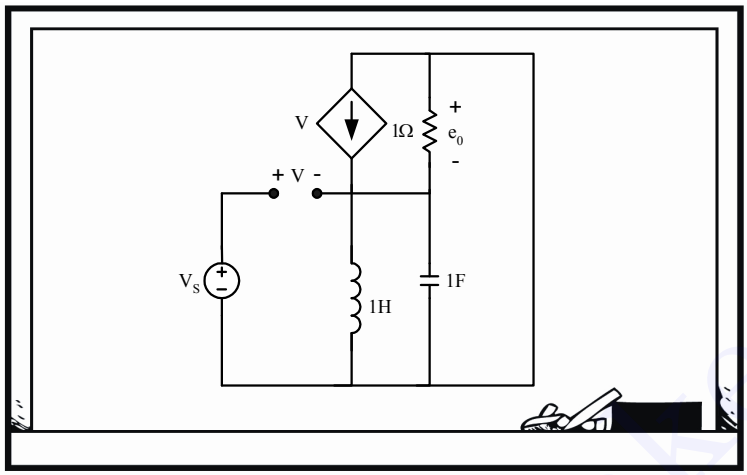
پس خلاصه می‌کنم:

به کمک تبدیلات عناصر از حوزهٔ t به حوزهٔ s (که در اصل این نیز یک **عینک** عالی است) کل مدار به حوزهٔ s می‌رود. معادلات جبری است[۱]، حالا پاسخ در حوزهٔ s با روش‌های تحلیل مدارهای مقاومتی معلوم است و در صورت لزوم، پاسخ در حوزهٔ زمان را نیز پیدا می‌کنیم. به حدی این کار لذت‌بخش است که نگو و نپرس؛ و در هر آزمونی همیشه سؤال‌های فراوانی هست که به کمک آقای لاپلاس خیلی ساده و جذاب حل می‌شوند.

۱ـ با این مزیت بر روش فازوری که در آنجا معادلات به صورت جبر مختلط بود، ولی در اینجا به صورت جبر حقیقی.

www.ControlMakers.ir

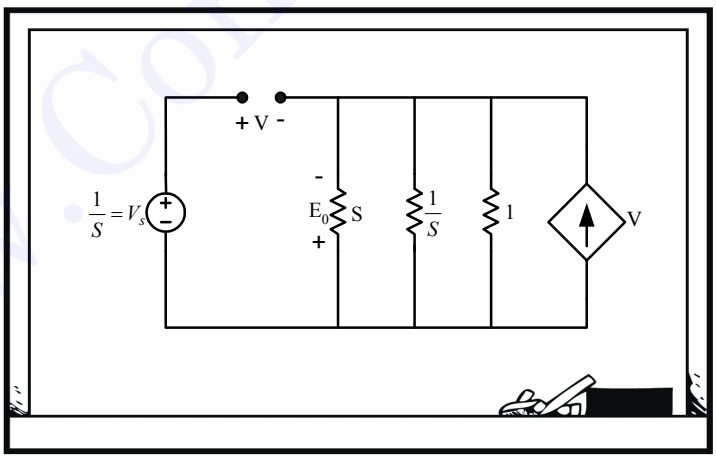
۵ـ پاسخ پله $e_0(t)$ کدام است؟



شکل (۱۰۹) مدار تمرین ۵

ابتدا مدار را به حوزهٔ S می‌بریم. ضمناً این سیم سمت راست مدار را که بیخودی کِش آمده است! به حالت اولیه برمی‌گردانیم،

آن‌گاه مدار این‌جوری می‌شود:



شکل (۱۱۰۹) ساده‌شدهٔ مدار تمرین ۵

با یک KCL خواهیم داشت:

$$KCL \quad : \quad \left(\frac{1}{S}+S+1\right)E_0 + V = 0$$

www.ControlMakers.ir

و ازطرفی:

$$V = V_S + E_0 = \frac{1}{S} + E_0$$

پس:

$$E_0 = \frac{-1}{(S+1)^2}$$

و با عکس تبدیل لاپلاس:

$$e_0(t) = -te^{-t}u(t)$$

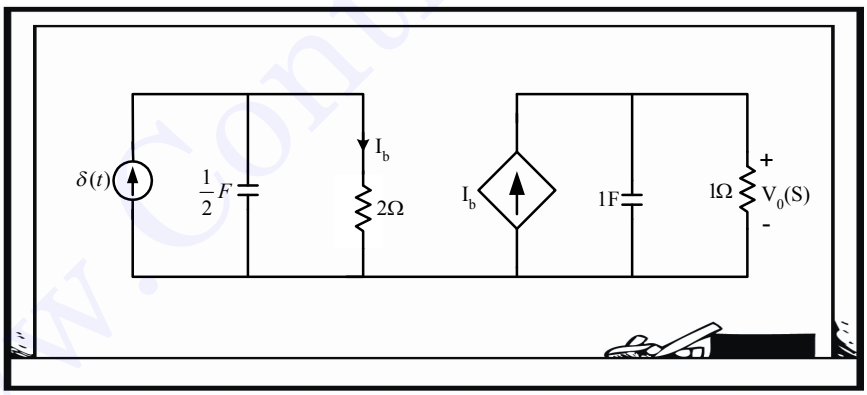
یعنی مدار در حالت میرای بحرانی بود. خدا وکیلی اگر می‌خواستیم این مدار را در حوزهٔ t حل کنیم خیلی دشوارتر بود، مگه نه؟

بله، ولی اگر از کلک بسیار قشنگ «شرایط اولیه مشتق» کمک بگیریم، از این هم ساده‌تر می‌شود! به یک زبان دیگر حرفم را تکرار می‌کنم:

یک حرف حسابی!: خُب ما در حل این مسئله در قدم اول سراغ لاپلاس رفتیم، چراکه درس این جلسهٔ ما لاپلاس است؛ اما اگر این مسئله در کنکور ارشد بیاید[1]، باید خودمان تشخیص بدهیم که لاپلاس میان‌بُر بسیار خوبی است. بعضی وقت‌ها باید فریاد بی‌صدای مسئله را بشنویم که می‌گوید:

«مرا از روش لاپلاس حل کنید [2] !»

۶ـ پاسخ ضربه $V_0(t)$ را در مدار زیر تعیین کنید.



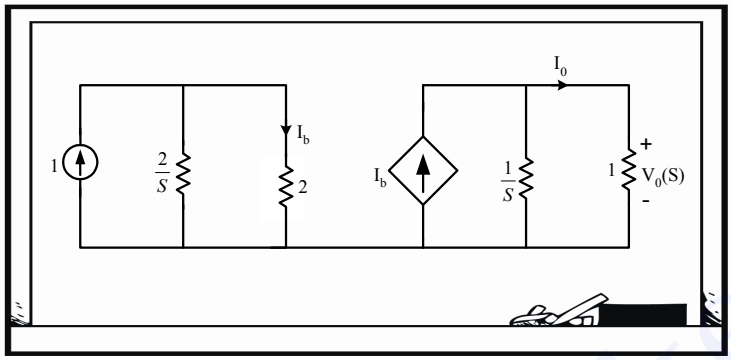
شکل (۱۲.۹) zمدار تمرین ۶

۱ـ که البته آمده بوده است.

۲ـ هنوز آن گوش باز را فراموش نکرده‌اید که ؟ !

www.ControlMakers.ir

هیکل مدار ! را به حوزهٔ S می‌بریم، داریم:



شکل (۱۳.۹) مدار تمرین ۶ در حوزهٔ S

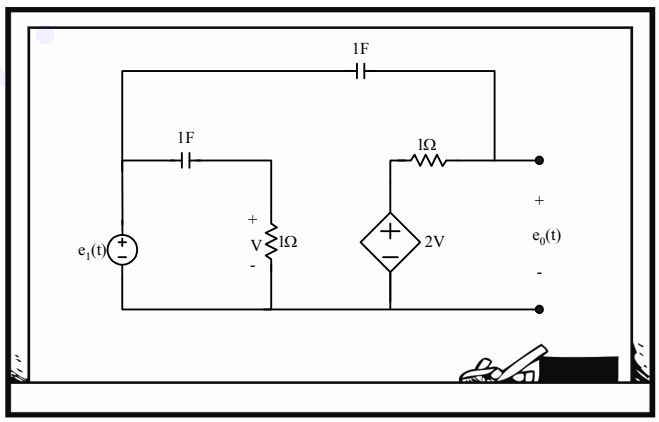
با دوبار تقسیم جریان داریم:

$$I_b = \frac{\frac{2}{s}}{\frac{2}{s}+2} \times 1 = \frac{1}{s+1}$$

$$V_0 = 1 \times I_0 = \frac{\frac{1}{s}}{\frac{1}{s}+1} \times \frac{1}{s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$v_0(t) = t e^{-t} u(t)$$

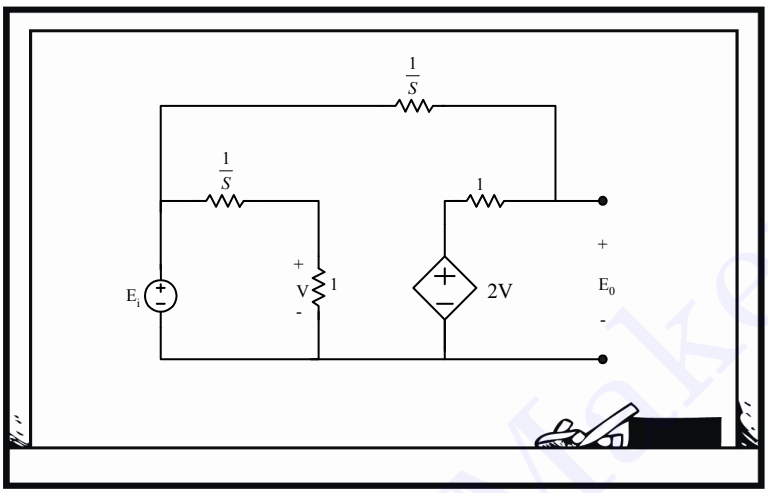
۷ـ در شبکهٔ مقابل $H(s) = \frac{E_0(s)}{E_i(s)}$ کدام است؟



شکل (۱۴.۹) مدار تمرین ۷

www.ControlMakers.ir

باز مدار را در حوزهٔ S رسم می‌کنیم:



شکل (۱۸.۹) مدار تمرین ۷ در حوزهٔ S

حالا ابتدا با یک تقسیم ولتاژ، ولتاژ V را پیدا می‌کنیم:

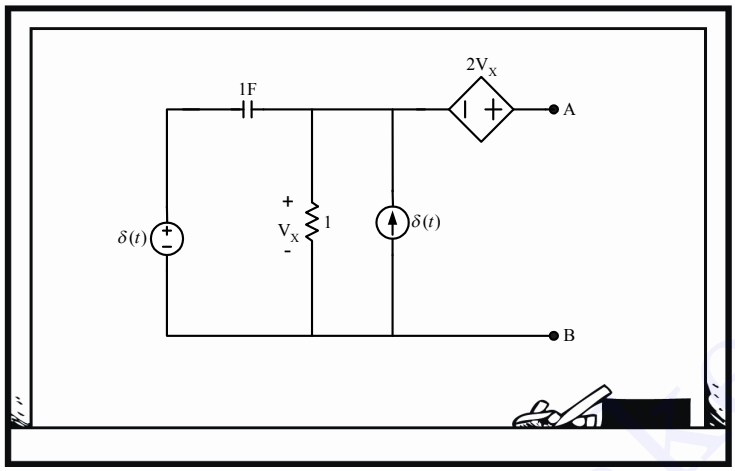
$$V = \frac{1}{1+\frac{1}{s}} E_i = \frac{s E_i}{s+1}$$

و سپس با یک KCL در گرهٔ راستی حل مسئله تمام است.

$$KCL : s(E_0 - E_i) + E_0 - 2\frac{s E_i}{s+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{E_0}{E_i} = \frac{s^2+3s}{(s+1)^2}$$

www.ControlMakers.ir

۸ـ مدار معادل تونن دیده‌شده در سرهای A و B در حوزهٔ فرکانس به چه صورت است؟



شکل (۱۶.۹) مدار تمرین ۸

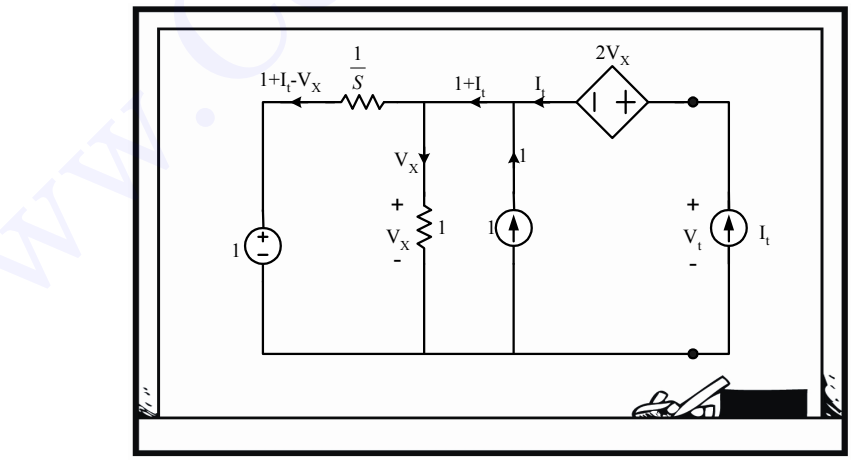
۱) $E_{oc}=3 \quad , \quad Z_{eq}=\frac{3}{s+1}$

۲) $E_{oc}=\frac{3}{s} \quad , \quad Z_{eq}=\frac{3s}{s+1}$

۳) $E_{oc}=\frac{3}{s} \quad , \quad Z_{eq}=\frac{3}{s+1}$

۴) $E_{oc}=3 \quad , \quad Z_{eq}=3s+3$

به نظر کار ساده‌ای است، مدار را با لاپلاس نگاه می‌کنیم.



شکل (۱۷.۹) مدار تمرین ۸ در حوزهٔ S

www.ControlMakers.ir

حال پس از KCL بازی، به این KVL ها نگاه کنید:

$$KVL \quad : \quad V_t = 2V_x + V_x = 3\,V_x$$

$$KVL \text{ در حلقه چپی} \quad : \quad 1=\frac{1}{S}\left(V_x - I_t - 1\right) + V_x$$

$$S\left(1-V_x\right)+1-V_x = -I_t \quad \Rightarrow \quad (S+1)V_x = (S+1) + I_t$$

$$V_t = 3\,V_x = \underbrace{\left(\frac{3}{s+1}\right)}_{Z_{eq}} I_t + \underbrace{3}_{E_{oc}} \qquad (۲۵\_۹)$$

پس با توجه به رابطه بالا گزینه ۱ درست می‌شود.

آیا وقت کم است یا من اجازه دارم مطلبی را بگویم؟

نه به هیچ وجه وقت کم نیست! اصلاً مگر ما هولیم که زودتر جلو برویم، به نظر من «یک چاه نفت از صدها چاه آب ارزشمندتر است[۱].»

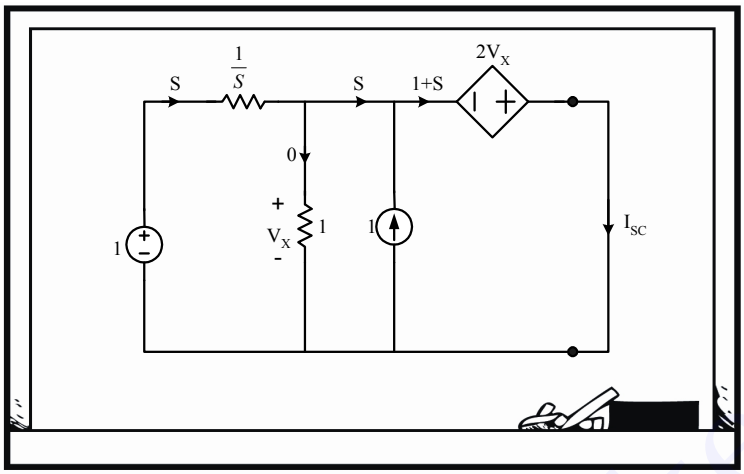
پس بفرمایید:

جسارتاً می‌خواهم بگویم ما باید از داشته‌های ذهنی قبلی‌مان همه‌جا استفاده کنیم. آیا یادتان هست در بحث مدار معادل می‌گفتیم که وقتی در یک تست، e_{oc} و R_{eq} را می‌خواهند، به‌جای یافتن تک‌تک آن‌ها، بهتر است یک‌ضرب i_{sc} را پیدا کنیم و بعد بگوییم گزینه‌ای درست است که در آن $\frac{e_{oc}}{R_{eq}}$ برابر i_{sc} یافته‌شده بشود...

۱ـ برای همین توصیه می‌کنم به‌جای مطالعهٔ سطحی تا می‌توانید با متهٔ ذهنتان به مطالب عمق بدهید.

www.ControlMakers.ir

خُب حالا هم می‌رویم سراغ I_{sc} :



شکل (۹ـ۱۸) مدار تمرین ۸ به سبک دانشجوی sharp !

با یک KVL ساده داریم:

$$2V_x + V_x = 0 \quad \Rightarrow \quad V_x = 0$$

پس جریان خازن $\frac{1}{s}$ برابر است با $S \times 1$ که روی شکل مشخص شده و حالا با KCL بازی روی شکل معلوم است که:

$$I_{sc} = S + 1$$

پس فقط گزینه ۱ می‌تواند درست باشد.

۹ـ۳ کاربرد تبدیل لاپلاس در تحلیل سیستم‌های خطی

مشاهده کردید که تبدیل لاپلاس در تحلیل مدارها کمک‌های جدی به ما می‌کند؛ به‌علاوه این تبدیل قابلیت‌های فراوان دیگری هم دارد، تا آنجا که می‌توان گفت درس کنترل خطی بدون آقای لاپلاس و S مثل پنجاه بدون پنج است! و ازآنجاکه درس «مدار» درحقیقت «مادر» دروس مهندسی برق است، بد نیست که همین جا اشاراتی به سایر کاربردهای تبدیل آقای لاپلاس در تحلیل سیستم‌ها ـ خصوصاً خطی ـ کنیم؛ حالا یک نوع دیگر از مسایل را می‌بینیم.

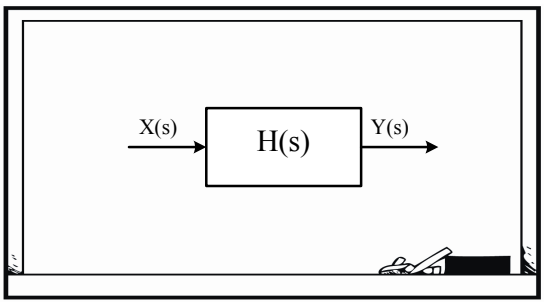
می‌دانیم که تابع شبکه در حوزهٔ فرکانس به این صورت قابل تعریف است:

$$\text{تابع شبکه } H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\text{تبدیل لاپلاس پاسخ حالت صفر}}{\text{تبدیل لاپلاس ورودی}} \qquad (۹ـ۲۶)$$

که البته رابطه‌اش با پاسخ ضربه (در حوزهٔ زمان) نیز به وضوح پیداست:

$$H(s) = \mathscr{L}\{h(t)\} = \text{تبدیل لاپلاسِ پاسخِ ضربه} \qquad (۹ـ۲۷)$$

www.ControlMakers.ir



شکل (۱۹.۹) بلوک دیاگرام یک سیستم فوقِ ساده!

به عبارت دیگر جای ضرب و کانولوشن در حوزه‌های زمان و فرکانس عوض می‌شود؛ یعنی:

$$\mathscr{L}\{x(t)*h(t)\} = X(s)\times H(s)=Y(s) \qquad (۲۸\_۹)$$

یک کاربرد خیلی جالب در اینجا آن است که:

تبدیل لاپلاس پاسخ کامل برابر است با تبدیل لاپلاس پاسخ حالت صفر به علاوهٔ تبدیل لاپلاس پاسخ ورودی صفر؛ و این نکته در حل بعضی از مسئله‌ها، چقدر کاربرد دارد! مثال بعد را به دقت حل کنید تا منظورم را بهتر درک کنید.

۹ـ پاسخ حالت صفر یک مدار LTI به ورودی $\delta(t)$ برابر $e^{-t}u(t)$ است. درصورتی‌که در شرایط اولیهٔ معین، پاسخ کامل شبکهٔ مذکور به ورودی $2u(t)$ برابر تابع زیر است:

$$y(t)=2(1-e^{-t})u(t)+5e^{-2t}u(t)$$

پاسخ کامل تحت همان شرایط اولیه به ورودی $2e^{-3t}u(t)$ برابر کدام است؟

چون نکته‌اش را حضرت‌عالی فرمودید، مشکل حل است؛ با داشتن پاسخ ضربه، پاسخ پله (یعنی انتگرالش) معلوم است.

پاسخ پله $s(t)=\int_0^t h(t)dt=(1-e^{-t})u(t)$

پس خروجیِ ناشی از ورودیِ $2u(t)$ برابر است با:

خروجی ناشی از **فقط** ورودی $2u(t)$ $= 2(1-e^{-t})u(t)$

پس از رابطهٔ $y(t)$ داده‌شده در صورت مسئله و مقایسه‌اش با رابطه اخیر معلوم است که بخش $5e^{-2t}u(t)$ اثر شرایط اولیه است که با تغییر ورودی، تغییر نمی‌کند. حال اثر ناشی از ورودیِ $2e^{-3t}u(t)$ را می‌جوییم:

$$X(s)=\frac{2}{s+3} \quad , \quad H(s)=\frac{1}{s+1} \quad \Rightarrow \quad Y=\frac{2}{(s+1)(s+3)}$$

با تجزیه به کسرهای جزئی چنین به دست می‌آید:

$$Y=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+3} \quad \Rightarrow \quad y(t)=(e^{-t}-3e^{-3t})u(t)$$

پس پاسخ کامل برابر است با:

$$X(s)=\left(e^{-t}-e^{-3t}+5e^{-2t}\right)u(t)$$

مسئلهٔ قشنگی بود؛ یه جورایی شبیه مسایل درس سیگنال و سیستم بود. این طور که پیداست در درس «مدار» ما باید همه چیز بلد باشیم؛ اصلاً یکی از خوبی‌های این درس همین است.

باز یک نوع دیگر از مسایل در بحث لاپلاس[۱] :

۱۰ـ پاسخ شبکه‌ای به ورودی پله واحد به صورت زیر است:

$$u_0(t)=\left(1-e^{-t}-te^{-t}\right)u(t)$$

پاسخ حالت دایمی شبکهٔ مذکور به ورودی زیر چیست؟

$$u_i(t)=2\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)u(t)$$

ابتدا تابع تبدیل را به دست می‌آوریم:

$$H(s)=\frac{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2}}{\frac{1}{s}}=\cdots=\frac{1}{(s+1)^2}$$

و سپس تبدیل لاپلاس ورودی $u_i(t)$ را نیز پیدا می‌کنیم:

$$U_i(s)=\cdots\cdots$$[۲]

این که کار دشواری نیست، فقط کمی طولانی است؛ باید ابتدا $\cos(a+b)$ را بسط بدهیم و سپس از تک‌تک جملات لاپلاس بگیریم و حاصل به دست‌آمده را در $H(s)$ ضرب کنیم و سپس از نتیجهٔ نهایی عکس لاپلاس بگیریم. پس من شروع می‌کنم!

این بار دیگر من موافق نیستم. ببینید وقتی واضح است که حل یک مسئله تا این حد طولانی می‌شود، در آزمونی که «**مدیریت زمان**» خیلی مهم است از خیرش بگذرید[۱] !

۱ـ اصولاً لاپلاس از پر مسئله‌ترین و پرکاربردترین بخش‌های درس مدار است.

۲ـ این نقطه‌چین‌ها به معنی صبر چند دقیقه‌ای سر کلاس (یا در خانه!) است.

www.ControlMakers.ir

اما حالا این روش را نگاه کنید:

کلمهٔ کلیدی در این مسئله پاسخ **حالت دایمی** است؛ اگر به ورودی نگاه کنید، فرکانس ورودی معلوم است دیگر:

$$\omega = 1$$

پس می‌توان در تابع تبدیل به‌جای s مقدار $j\omega = j$ را گذاشت و به پاسخ فرکانسی رسید:

$$H(j\omega) = H(j1) = \frac{1}{(j+1)^2} = \frac{1}{2j} = \frac{1}{2} \angle -90^\circ$$

پس خروجی معلوم است دیگر:

$$|Y| = |H| \times |X| = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$$\angle Y = \angle H + \angle X = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

پاسخ مثل آب خوردن پیدا شد:

$$y(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

خوشتان آمد؟ حالا نوبت شماست.

۱۱ـ پاسخ ضربه یک مدار LTI برابر است با:

$$h(t) = \left(\frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-\frac{t}{2}}\right) u(t)$$

پاسخ حالت دایمی این مدار به ورودی $e_s(t) = 2\cos t$ برابر است با:

۱) $\frac{2}{\sqrt{5}}\cos t$ ۲) $\frac{2}{5}\cos t$ ۳) $\frac{2}{5}\cos(t+90)$ ۴) هیچ‌کدام

با همین روش خوشگلی که گفته شد، ابتدا تابع تبدیل را پیدا می‌کنیم؛ یعنی اول راه از حوزهٔ S کمک می‌گیریم:

$$H(s) = \frac{2}{3}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{6}\frac{1}{s+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{s}{2}}{(s+2)\left(s+\frac{1}{2}\right)}$$

۱ـ شوخی نمی‌کنم؛ یکی از نکات خیلی مهم در یک آزمون تستی آن است که دانشجو بفهمد چه تست‌هایی را فعلاً نباید سراغشان برود! بعضی‌ها تا روز کنکور معنی این جمله را نمی‌فهمند که: «برای هر تست حدود ۳ دقیقه وقت داریم!» ولی من مطمئنم که شماها خیلی خوب معنی این جمله را می‌فهمید! خیلی بهتر از سایرین!

www.ControlMakers.ir

حالا به حوزهٔ فازور $(j\omega)$ می‌رویم، چون فرکانس ورودی $\omega = 1$ است، پاسخ فرکانس به راحتی به دست می‌آید:

$$H(j1) = \frac{\frac{j}{2}}{(j+2)\left(j+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{j}{2}}{5\frac{j}{2}} = \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \angle 0$$

و درنتیجه برای خروجی داریم:

$$\text{خروجی}\ \ y(t) = \frac{1}{5} \times 2\cos(t+0) = \frac{2}{5}\cos t$$

حالا یک نفر این حرف آخر را جمع‌بندی کند.

در تحلیل در حالت دایمی سینوسی با ورودی

$$\text{ورودی}\ \ X(t) = A\cos(\omega_i t + \theta)$$

و با داشتن $H(s)$، اگر در تابع تبدیل $H(s)$ به‌جای S مقدار:

$$S = j\omega_i$$

را قرار دهیم، پاسخ فرکانسی $H(j\omega_i)$ و درنتیجه $|H|$ و $\angle H$ را نیز داریم؛ حالا خروجی معلوم است دیگر:

$$y(t) = B\cos(\omega_i t + \varphi)$$

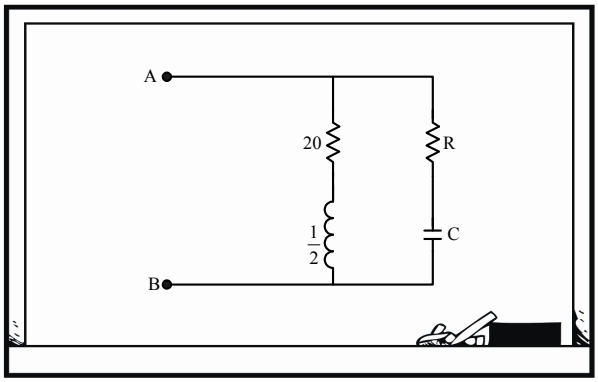
به طوری‌که:

$$B = A \times |H(j\omega_i)|$$
$$\varphi = \theta + \angle H(j\omega_i)$$

البته به شرط آنکه مسئله از ما پاسخ دایمی سینوسی را بخواهد ولی اگر پاسخ گذرا را بخواهد، باید تا آخر مسئله از حوزه S برویم.

باز یک‌جور مسئله دیگر:

۱۲ـ R و C را چنان تعیین کنید که امپدانس Z_{AB} مستقل از فرکانس باشد.



شکل (۲۰.۹) مدار تمرین ۱۲

این هم برای راهنمایی:

Z_{AB} را به صورت تابعی کسری از S پیدا کنید؛ حالا برای حذف S (که همان شرط مستقل از فرکانس بودن است) کاری کنید که چندجمله‌ای صورت ضریبی از مخرج شود!

بفرمایید:

سکوت

چرا کسی جواب را نمی‌گوید؟

آخر با راهنمایی شما، تمام شد دیگر؛ کاری برای ما نماند!

نه نه! اشتباه نکنید؛ شما سر جلسهٔ کنکور خیلی از مسایل را بلد هستید، اما نمی‌توانید به جواب آخر برسید، لازمهٔ کار مهارت است که با ممارست حاصل می‌شود. یک‌بار دیگر هم گفته‌ام، دست‌هایتان را داغ کنید. (رجوع به شکل)

www.ControlMakers.ir

پس می‌گوییم:

$$Z_{AB}=\frac{\left(R+\frac{1}{CS}\right)\left(20+\frac{S}{2}\right)}{R+\frac{1}{CS}+20+\frac{S}{2}}$$

$$Z_{AB}=\frac{0.5RCS^2+(20RC+0.5)S+20}{0.5CS^2+(20C+RC)S+1}$$

برای مستقل از S بودن باید چنین داشته باشیم:

$$\frac{0.5RC}{0.5C}=\frac{20RC+0.5}{20C+RC}=\frac{20}{1}$$

درنتیجه R و C به راحتی به دست می‌آیند:

$$R=20\Omega \quad , \quad C=\frac{1}{800}F$$

آفرین، تازه کار تمام شد. راستی فهمیدید که چه اتفاقی افتاد؟ شاید شما گرم بودید و متوجه نشدید! به بهانهٔ این مثال یک مبحث زیبا آموختیم! و آن هم چیزی نبود جز «مدارهای مستقل از فرکانس»؛ من اصولاً این نوع آموزش را خیلی دوست دارم؛ اسمش را آموزش در حین مسئله[1] می‌گذارند.

لطفاً قبل از اینکه به بهانهٔ مسئلهٔ بعدی یه چیز جدیدی یاد بگیریم، به من یه‌کم فرصت بدهید! ببینید وقتی می‌گوییم امپدانس ورودی مستقل از فرکانس یا S است، یعنی اگر S برابر با صفر یا ∞ یا یا ... باشد، Z_{in} تغییری نمی‌کند؛ حالا من یک پیشنهاد دارم؛ بیایید مقادیر $Z_{in}(0)$ و $Z_{in}(\infty)$ را با یکدیگر مساوی بگذاریم؛ با توجه به شکل (۹ـ۲۰) نتیجه این‌گونه می‌شود:

$$\begin{cases} Z_{in}(0)=20 \\ Z_{in}(\infty)=R \end{cases} \Rightarrow \quad R=20\Omega$$

استاد استدلالم درست بود؟

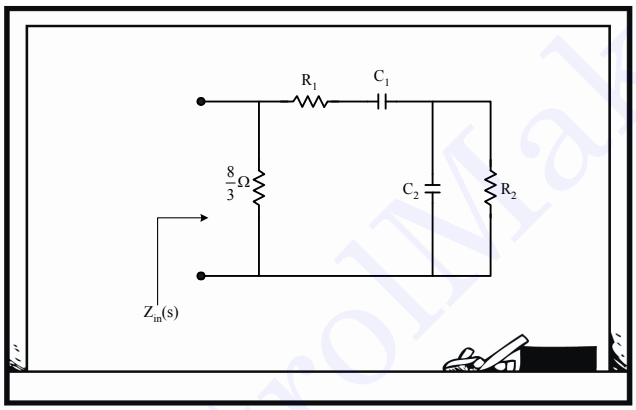
۱ـ یا به قولی همان Learning by doing خودمان!

www.ControlMakers.ir

بله و حرفت آن‌قدر قشنگ بود که من به احترام حرفت، دو سه تا مسئلهٔ جالب می‌گویم که با نکته‌ای که شما کشف کرده‌ای، فوق‌العاده زیبا می‌شود.

۱۳ـ در مدار داده‌شده، امپدانس ورودی $Z_{in}(s)$ دارای قطب‌های $S=-1$ و $S=-3$ و صفرهای $S=-2$ و $S=-4$ است. مقدار مقاومت R_1 در این شبکه چقدر است؟

۱) $\frac{64}{5}$ ۲) $\frac{8}{5}$ ۳) 1 ۴) $\frac{8}{3}$

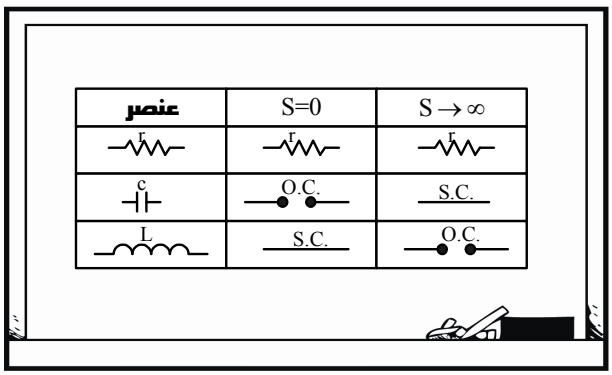


شکل (۲۱.۹) مدار تمرین ۱۳

حتماً این مسایل هم **لِم** خاصی دارد ! بله؟

آری، مشابه حرف قشنگ دوستت؛ در این‌گونه مسایل، ابتدا تابع تبدیل (مربوط به امپدانس، ادمیتانس یا ...) را می‌نویسیم، سپس به مدار و تابع تبدیل یک‌بار در $S=0$ و یک‌بار در $S\to\infty$ نگاه می‌کنیم و آن‌ها را معادل قرار می‌دهیم. فقط یادتان هست که:

www.ControlMakers.ir



شکل (۲۲.۹) عناصر مداری در کرانه‌های فرکانس $(S=0 \quad , \quad S\to\infty)$

پس راحت شد دیگه:

$$Z(s)=K\frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)}$$

$$\text{at} \quad S=0 \rightarrow \begin{cases} Z(0)=\frac{8}{3} & \text{از نگاه مداری} \\ Z(0)=K\frac{8}{3} & \text{از نگاه فرمولی} \end{cases}$$

پس:

$$K=1$$

و همچنین:

$$S\to\infty \rightarrow \begin{cases} Z(\infty)=\frac{8}{3}\,||\,R_1 & \text{از نگاه مداری} \\ Z(\infty)=1 & \text{از نگاه فرمولی} \end{cases}$$

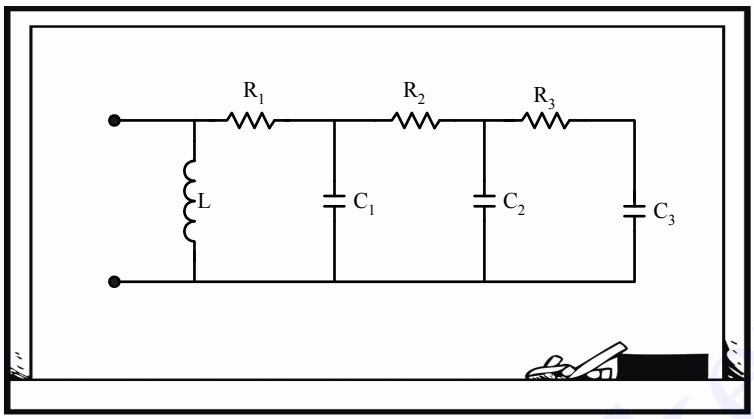
$$\frac{3}{8}+\frac{1}{R_1}=1 \rightarrow R_1=\frac{8}{5}\Omega$$

پس گزینه ۲ درست است.

باز یکی دیگر!

www.ControlMakers.ir

۱۴ـ کدام‌یک از توابع شبکه در گزینه‌های زیر می‌تواند تابع امپدانس برای مدار شکل (۹ـ۲۳) باشد؟



شکل (۹ـ۲۳) مدار تمرین ۱۴

۱) $Z(s)=\dfrac{s^3+4s^2+5s}{s^4+2s^3+5s^2+7s+1}$

۲) $Z(s)=\dfrac{(s+1)(s+5)(s+9)}{s(s+2)(s+11)}$

۳) $Z(s)=\dfrac{s^4+5s^3+2s^2+3s}{5s^4+6s^3+9s^2+2s+1}$

۴) $Z(s)=\dfrac{5s^4+6s^3+2s^2+s+3}{s^3+9s^2+2s+1}$

در $S=0$ و $S\to\infty$ امپدانس مدار را داریم:

$Z(\infty)=R_1=$ یک عدد

$Z(0)=0=$ صفر!

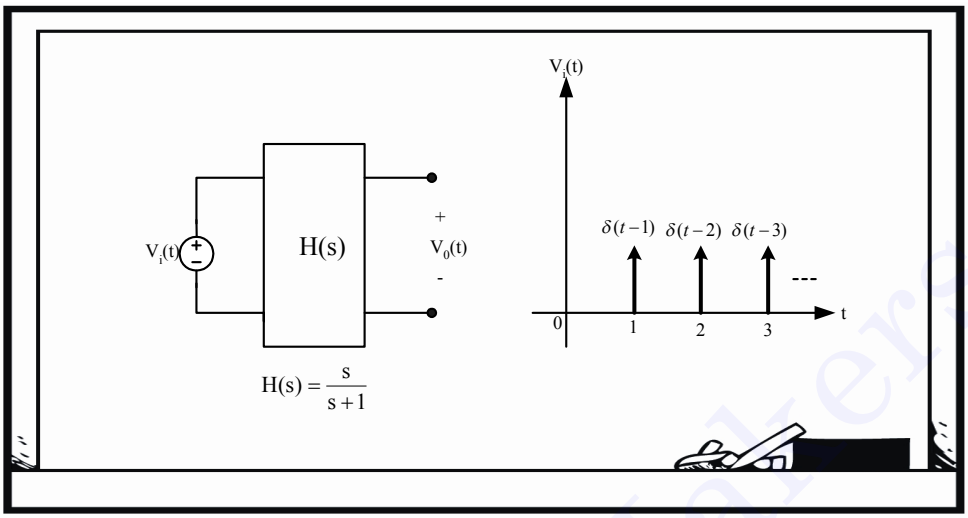
از $Z(\infty)$ به‌دست‌آمده می‌فهمیم که درجهٔ صورت باید برابر درجهٔ مخرج باشد و از صفر بودن $Z(0)$ متوجه می‌شویم که صورت مضربی از S است، پس گزینهٔ ۳ درست می‌شود.

و یک مسئله هم به عنوان حسن ختام بحث لاپلاس[۱] :

۱ـ هرچند از بحث لاپلاس هر چه مسئله حل کنید باز هم کم است؛ برای همین مسئله‌های آخر فصل را خوب خوب بجوید.

www.ControlMakers.ir

۱۵ـ پاسخ شبکهٔ شکل (۹ـ۲۴) به ورودی $V_i(t)$ داده‌شده، کدام است؟



شکل (۲۴.۹) شبکه و ورودی در تمرین ۱۵

۱) تکرار پریودیک $(1-1.58e^{-t})u(t)$ با پریودِ یک

۲) تکرار پریودیک $(1-1.58e^{-t})u(t)+0.58e^{-(t-1)}u(t-1)$ با پریودِ یک

۳) تکرار پریودیک $1-0.58e^{-t}u(t)-0.58e^{-(t-1)}u(t-1)$ با پریودِ یک

۴) هیچ‌کدام

می‌دانیم که:

$$H(s)=\frac{s}{s+1}=1-\frac{1}{s+1}$$

و با عکس لاپلاس داریم:

$$h(t)=\delta(t)-e^{-t}u(t)$$

رابطهٔ بالا می‌گوید اگر به شبکه ضربه بدهیم، مقدار $\delta(t)-e^{-t}u(t)$ را می‌دهد؛ و حالا که قطار ضربه داده‌ایم، یعنی:

$$V_i(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\delta(t-i)$$

پس خروجی طبق قضیه جمع آثار برابر است با:

$$V_0(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\delta(t-i)-e^{-(t-i)}u(t-i)\right]$$

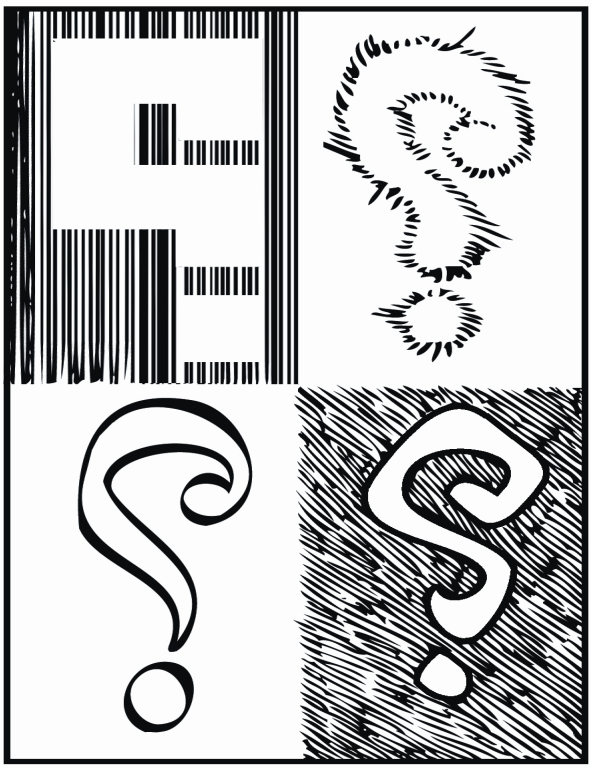
ازطرفی این با هیچ‌کدام از سه گزینهٔ اول نمی‌خواند، از طرف دیگر ظاهر گزینه‌ها نشان می‌دهد که یکی از ۱ یا ۲ یا ۳ درست است، چه کنیم؟

ببین دوست خوب من، جواب شما صد در صد درست است، پس چرا مشکوکی؟ همان که گفتی، گزینهٔ هیچ‌کدام درست است.

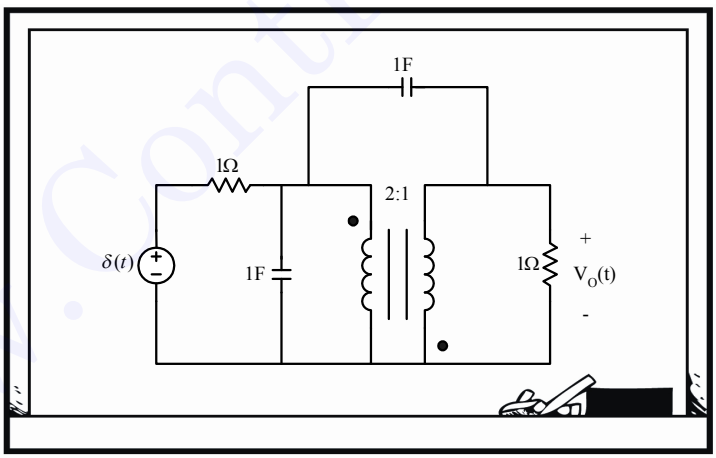
خسته نباشید؛ فصل خوبی بود. تبدیل یک تابع از حوزهٔ زمان به حوزهٔ فرکانس رمزی بود که از اول خلقت وجود داشت؛ آقای لاپلاس و آقای فوریه و... این رمز را کشف کردند و مهندسی امروز بسیار مدیون امثال آن‌هاست... .

www.ControlMakers.ir

تمرینات فصل نهم



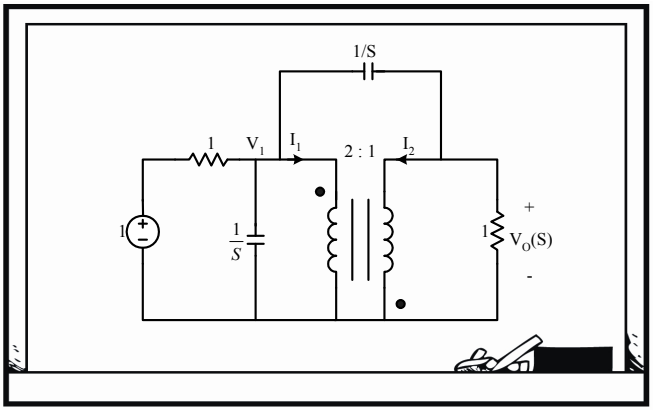
۱ـ پاسخ ضربه مدار شکل مقابل کدام است؟ (مهندسی برق ۷۹)



۱) $\frac{-2}{13}e^{-\frac{5}{13}t}u(t)$ ۲) $\frac{-4}{13}e^{-\frac{5}{13}t}u(t)$ ۳) $\frac{2}{13}e^{-\frac{5}{13}t}u(t)$ ۴) $\frac{4}{13}e^{-\frac{5}{13}t}u(t)$

فکر کنم KCL راه مناسبی باشد چون به خاطر خازن، انتقال که نمی‌توانیم بدهیم.

www.ControlMakers.ir



$$KCL1: I_1 + SV_1 + (V_1 - 1) + (V_1 - V_o)S = 0$$

$$KCL2: V_o + I_2 + (V_o - V_1)S = 0$$

$$\frac{V_1}{V_o} = -2 \quad و \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{2}$$

با جایگذاری روابط بالا در KCL 2 داریم:

$$I_2 = -V_o - V_oS - 2V_oS = -V_o - 3V_oS$$

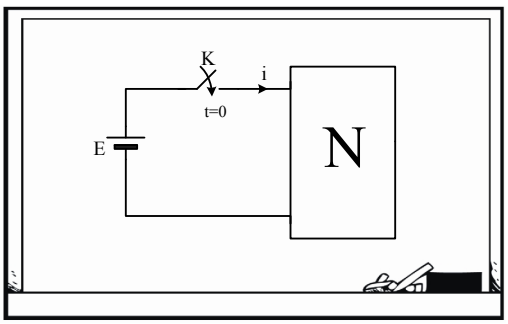
با جایگذاری در KCL 1 داریم:

$$\frac{-V_o - 3V_oS}{2} - 2V_oS + (-2V_o - 1) + (-2V_o - V_o)S = 0 \quad \Rightarrow \quad V_o(S) = \frac{-2}{13S + 5}$$

$$\Rightarrow V_o(t) = \frac{-2}{13}\frac{1}{S + \frac{5}{13}} = \frac{-2}{13}e^{-\frac{5}{13}t}$$

پس گزینه ۱ درست است.

۲ـ امپدانس ورودی یک‌قطبی شکل زیر برابر است با $Z(S) = \frac{s^2 + s + 2}{2s^2 + s + 1}$. اگر با بسته شدن کلید در لحظهٔ $t = 0$، جریان i در لحظهٔ $t = 0^+$ برابر 6 آمپر باشد، مقدار E چند ولت است؟ (یک‌قطبی N در حالت صفر فرض شود.) (مهندسی برق ۷۸)



۱) 3 ۲) 6 ۳) 9 ۴) 12

می‌دانیم که:

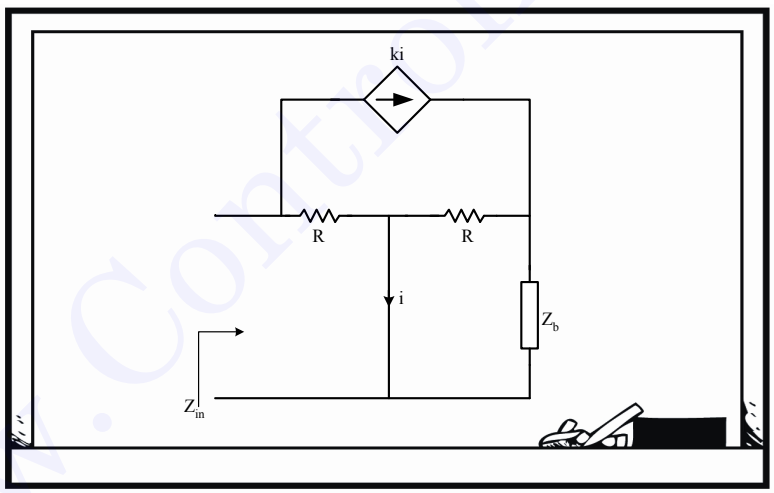
$$I(S)=\frac{V(S)}{Z(S)}=\frac{E/S}{\frac{s^2+s+2}{2s^2+s+1}}=\frac{E}{S}\,\frac{2s^2+s+1}{s^2+s+2}$$

حالا می‌توانیم از قضیه مقدار اولیه استفاده کنیم:

$$i(0^+)=\lim_{s\to\infty} S\,I(S)=2E=6 \Rightarrow E=3V$$

پس گزینه ۱ درست است.

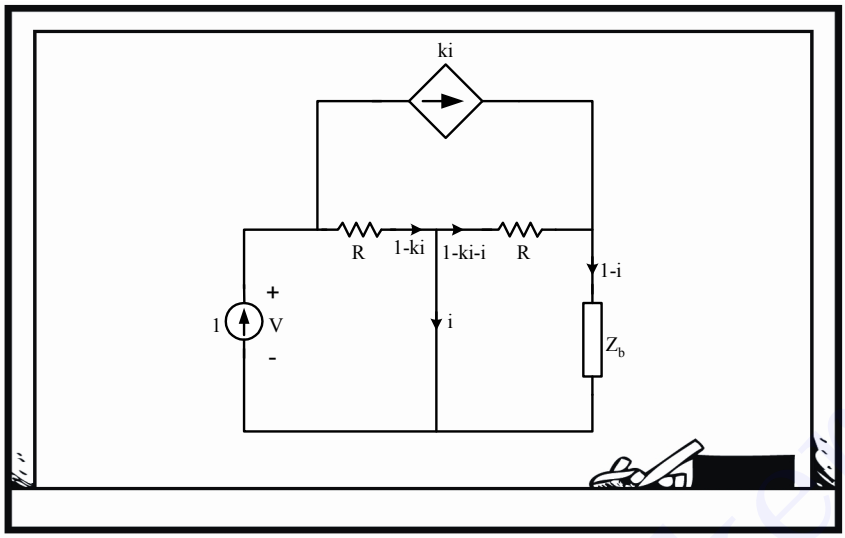
۳ـ در شبکه زیر $\lim_{k\to\infty} Z_{in}$ چقدر است؟ (مهندسی برق ۷۶)



۱) $-Z_b$ ۲) Z_b-R ۳) Z_b+R ۴) بی‌نهایت

می‌توانیم مانند مقاومت معادل به دست آوردن، از روش I_t و V_t استفاده کنیم تا امپدانس معادل به دست آید.

www.ControlMakers.ir



$$KVL: V_t = R(1 - ki)$$

یک معادله دیگر هم که بنویسیم، i هم به دست می‌آید:

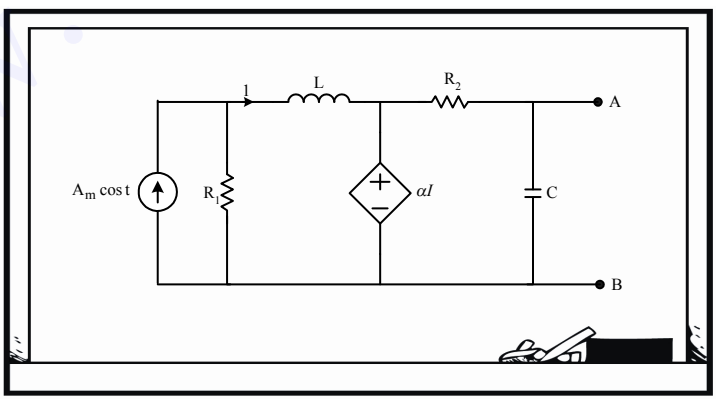
$$KVL: R(1 - ki - i) + Z_b(1 - i) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (-KR - R - Z_b)i = -Z_b - R \quad \Rightarrow \quad i = \frac{Z_b + R}{KR + R + Z_b}$$

$$\Rightarrow \quad Z_{in} = V_t = R - KR\,\frac{Z_b + R}{kR + R + Z_b} \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} Z_{in} = R - (Z_b + R) = -Z_b$$

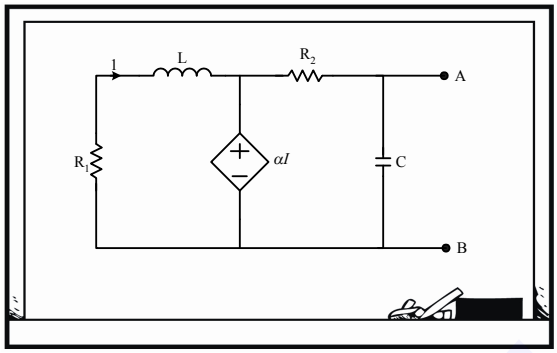
پس گزینه ۱ درست است.

۴ـ امپدانس دیده‌شده در سرهای A و B مدار شکل زیر چیست؟



۱) $\dfrac{R_2}{1 + j\omega cR_2}$ ۲) $\dfrac{j\omega LR_1}{1 + j\omega cR_2}$ ۳) $\dfrac{R_1 + R_2}{1 + j\omega c(R_1 + R_2)}$ ۴) $\dfrac{R_1 + R_2}{1 + j\omega cR_2}$

اول باید منبع جریان را صفر کنیم، سپس از روش I_t و V_t استفاده کنیم:



حالا یک KVL در حلقه سمت چپ بزنیم:

$$\left(R_1 + LS\right)I + \alpha I = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(R_1 + LS + \alpha\right)I = 0$$

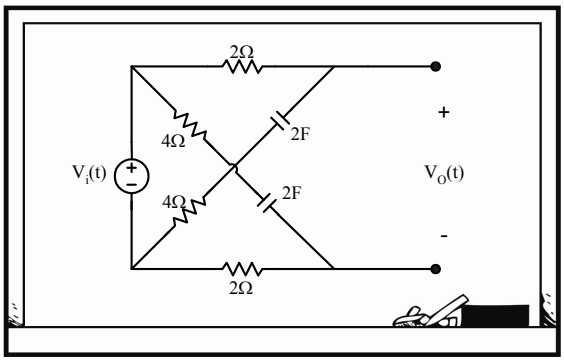
پس یا $I = 0$ است و یا $\alpha = -R_1 - LS$

α یک عدد است و نمی‌تواند با فرکانس عوض شود، پس حتماً $I = 0$ است؛ درنتیجه سمت چپ مدار اتصال کوتاه می‌شود و فقط یک R و C موازی داریم:

$$Z_{AB} = R_2 \| \frac{1}{jc\omega} = \frac{\frac{R_2}{jc\omega}}{R_2 + \frac{1}{jc\omega}} = \frac{R_2}{R_2 jc\omega + 1}$$

پس گزینه ۱ درست است.

۵ـ در شبکه متقارن زیر، تابع شبکه $H(S) = \frac{V_o(S)}{V_i(S)}$ برابر است با:



۱) $\frac{2s+1}{12s+1}$ ۲) $\frac{2s+1}{12s+4}$ ۳) $\frac{4s+1}{12s+4}$ ۴) $\frac{4s+1}{12s+1}$

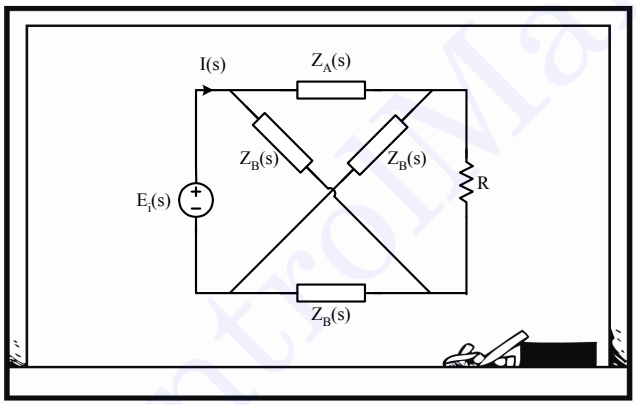
www.ControlMakers.ir

ولتاژ سر مثبت و منفی V_o از تقسیم ولتاژ بین امپدانس‌های سری به دست می‌آید و V_o هم از تفاضل سر مثبت و منفی‌اش:

$$V_o = V_o^+ - V_o^- = \frac{4+\frac{1}{2s}}{4+\frac{1}{2s}+2}V_i - \frac{2}{2+4+\frac{1}{2s}}V_i = \frac{2+\frac{1}{2s}}{6+\frac{1}{2s}}V_i = \frac{4s+1}{12s+1}V_i$$

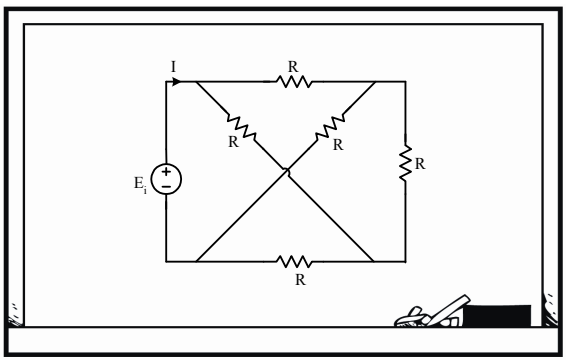
پس گزینه ۴ درست است.

۶ـ در شکل زیر که نشان‌دهنده یک لتیس متقارن ختم‌شده به مقاومت R است، درصورتی‌که $Z_A(S)Z_B(S) = R^2$ باشد، $Z_{eq}(S) = \frac{E_i(S)}{I(S)}$ برابر است با:



۱) $2R$ ۲) $Z_A + Z_B + R$ ۳) R ۴) $Z_A + Z_B + 2R$

می‌شود Z_A و Z_B را برابر مقادیری گرفت که در رابطه داده‌شده صدق کنند؛ مثلاً اگر هر دو را برابر R در نظر بگیریم، در حدس گزینه درست هم به مشکل برنمی‌خوریم:



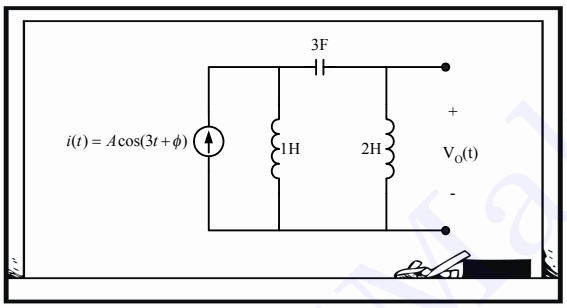
حالا اگر مقاومت معادل از دو سر منبع ولتاژ را بیابیم، مسئله تمام است.

از دو سر منبع ولتاژ، پل وتسون داریم. پس شاخهٔ وسطی پل که همان مقاومت عمودی است حذف می‌شود و:

$$R_{in} = 2R \parallel 2R = R$$

پس گزینه ۳ درست است.

۷ـ ولتاژ خروجی $V_o(t)$ در حالت دایمی در مدار شکل زیر به چه صورت کلی است؟



۱) $K\cos(3t+\theta)$

۲) $k_1\cos(3t+\theta_1) + k_2\cos\left(\frac{t}{3}+\theta_2\right)$

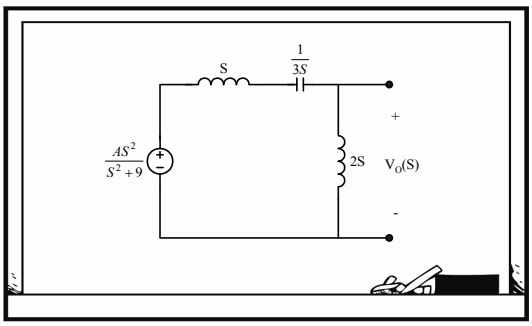
۳) $kt\cos(3t+\theta)$

۴) $k_1 t\cos(3t+\theta_1) + k_2\cos\left(\frac{t}{3}+\theta_2\right)$

چون در گزینه‌ها زاویه مشخص نیست پس در تبدیل لاپلاس گرفتن از منبع جریان هم لازم نیست φ را در نظر بگیریم، بنابراین:

$$I(s) = \frac{As}{s^2+9}$$

یک تبدیل نورتن به تونن کار را راحت‌تر می‌کند، درنتیجه:



www.ControlMakers.ir

$$\Rightarrow \quad V_o(s)=\frac{2s}{2s+s+\frac{1}{3s}}\times\frac{As^2}{s^2+9}=\frac{\frac{3}{2}s^2}{s^2+\frac{1}{9}}\times\frac{As^2}{s^2+9}$$

پس مشخص است که در تجزیه کسرها دو فرکانس به دست می‌آید. $\omega = 3$ و $\omega = \frac{1}{3}$ که یکی از آن‌ها فرکانس ورودی است و دیگری فرکانس نوسان مدار که هر دو در خروجی ظاهر شده‌اند.

بنابراین گزینه ۲ درست است.

۸ـ درصورتی‌که ورودی به یک سیستم خطی برابر با $u(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{k^2}e^{jkt}$ و تابع تبدیل مدار برابر با $H(S)=\frac{S}{S+1}$ باشد، خروجی پایدار $y(t)$ برابر با کدام گزینهٔ زیر است؟

۱) $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{jkt}}{k(k-j)}$ ۲) $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-jkt}}{k-j}$ ۳) $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-jkt}}{k+j}$ ۴) $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{jkt}}{k+j}$

اول ورودی را در حوزه لاپلاس بنویسیم و با ضرب در تابع تبدیل خروجی را در حوزهٔ لاپلاس به دست آوریم:

$$u(s)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\frac{1}{s-jk}$$

$$\Rightarrow \quad Y(s)=\frac{s}{s+1}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\frac{1}{s-jk}=\frac{-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{k^2(-1-jk)}}{s+1}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\frac{1}{k^2}\frac{jk}{jk+1}}{s-jk}$$

چون در مسئله، تنها جواب پایدار مورد نظر است از بخشی که مخرجش $s+1$ است و جواب ناپایدار را می‌دهد لازم نیست عکس لاپلاس بگیریم، پس:

$$Y(s)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\frac{1}{k^2}\frac{jk}{jk+1}}{s-jk}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{j}{k(jk+1)(s-jk)}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{k(k-j)(s-jk)}$$

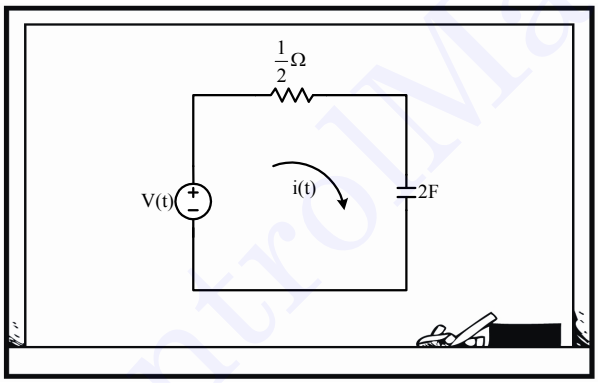
$$\Rightarrow \quad y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{+jkt}}{k(k-j)}$$

آفرین که سؤال را حل کردید و به جواب کاملاً درستی هم رسیدید، ولی راحت‌تر از این حرف‌ها هم حل می‌شد. زمانی که فرکانس ورودی را داشتید، می‌توانستید به‌جای S در تابع تبدیل $j\omega$ قرار دهید و بعد اندازه آن را در اندازهٔ ورودی ضرب و زاویه‌اش را با زاویه ورودی در آن فرکانس جمع کنید. اینجا هم فرکانس ورودی k است، پس:

$$H(jk)=\frac{jk}{jk+1} \quad \Rightarrow \quad y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{jk}{jk+1}.\frac{1}{k^2}e^{jkt}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{jkt}}{k(k-j)}$$

پس گزینه ۱ درست است.

۹ـ ولتاژ پالس برابر با معادلهٔ $V(t)=10[u(t)-u(t-1)]$ به مدار زیر اعمال شده است. جریان $i(t)$ برابر با کدام گزینهٔ زیر است، درحالی‌که $V_c(0^-)=0$ است.



۱) $20e^{-t}-10e^{-(t-2)}u(t-1)$

۲) $10e^{-t}-10e^{-(t-1)}u(t-1)$

۳) $20e^{-t}-20e^{-(t-1)}u(t-1)$

۴) $20e^{-t}+20e^{-(t-1)}u(t-1)$

به راحتی داریم:

$$I(s)=\frac{V(s)}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2s}}$$

$$V(s)=10\left(\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}\right)$$

$$\Rightarrow \quad I(s)=\frac{\frac{10}{s}\left(1-e^{-s}\right)}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2s}}=\frac{20\left(1-e^{-s}\right)}{s+1}=\frac{20}{s+1}-\frac{20e^{-s}}{s+1}$$

حالا عکس تبدیل لاپلاس کار را تمام می‌کند:

$$i(t) = 20e^{-t} - 20e^{-(t-1)}u(t-1)$$

پس گزینه ۳ درست است.

۱۰ـ واکنش تابع ضربه یک سیستم خطی برابر با $h(t) = \frac{3}{4}\left(e^{-t} + e^{-3t}\right)u(t)$ است، درصورتی‌که سیگنال ورودی برابر با $U(s) = 2e^{-5s}$ باشد، خروجی $y(t)$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $y(t) = \left\{e^{-(t-5)} + e^{-3(t-5)}\right\}u(t)$

۲) $y(t) = \frac{3}{2}\left\{e^{-(t-5)} + e^{-3(t-5)}\right\}u(t-5)$

۳) $y(t) = \frac{3}{2}\left\{e^{-(t-5)} + e^{-3(t-5)}\right\}u(t)$

۴) هیچ‌کدام

اول $h(t)$ را به حوزه لاپلاس می‌بریم و با ضرب در ورودی لاپلاس خروجی را پیدا می‌کنیم و بعد هم عکس لاپلاس می‌گیریم.

نه!! ما که می‌دانیم e^{-TS} باعث می‌شود تابع در حوزهٔ زمان به اندازهٔ T شیفت پیدا کند، پس این کارها لازم نیست؛ به‌خاطر سیگنال ورودی فقط دامنه تابع ضربه را دو برابر کرده و زمان آن را هم 5 واحد شیفت می‌دهیم و داریم:

$$\Rightarrow y(t) = \frac{3}{2}\left\{e^{-(t-5)} + e^{-3(t-5)}\right\}u(t-5)$$

پس گزینه ۲ درست است.

۱۱ـ در یک مدار الکتریکی $H(s)$ برابر با رابطه $H(s) = \frac{V(s)}{E(s)} = \frac{10(s+1)}{s^2 + 2s + 3}$ تعریف شده است. درصورتی‌که $e(t) = 4\cos 2t$ باشد، ولتاژ سینوسی در حالت پایدار $V_{SS}(t)$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $21.76\cos(2t + 40.6°)$

۲) $20.2\cos(2t + 40.6°)$

۳) $21.76\cos(2t - 40.6°)$

۴) $43.52\cos(2t - 40.6°)$

در اینجا هم می‌توانیم به‌جای S در تابع تبدیل، $j2$ را که فرکانس ورودی است قرار دهیم و اندازه و زاویهٔ آن را به دست آوریم:

$$H(j2)=\frac{10(j2+1)}{(j2)^2+2j2+3}=\frac{10(j2+1)}{-1+j4}$$

$$\Rightarrow \quad |H(j2)|=\frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{17}}=5.4\ ,\ \angle H(j2)=\tan^{-1}2-\tan^{-1}-4=-40.6^\circ$$

$$\Rightarrow \quad V_{SS}(t)=5.4\times 4\cos(2t+0-40.6^\circ)=21.7\cos(2t-40.6^\circ)$$

پس گزینه ۳ درست است.

۱۲ـ درصورتی‌که $G(\omega)=\frac{-\omega^2+1}{(j\omega+1)(j\omega-1)(j\omega-3)}$ باشد، $g(t)$ برابر با کدام گزینه زیر است؟

۱) $g(t)=\begin{cases}e^{-t} & t>0\\ e^{t}+\frac{5}{4}e^{3t} & t<0\end{cases}$

۲) $g(t)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-t} & t>0\\ -\frac{1}{2}e^{t}+\frac{5}{4}e^{3t} & t<0\end{cases}$

۳) $g(t)=\begin{cases}e^{-t} & t>0\\ e^{t}-\frac{5}{4}e^{3t} & t<0\end{cases}$

۴) $g(t)=\begin{cases}e^{-t}+1 & t>0\\ e^{t}-\frac{5}{4}e^{t} & t<0\end{cases}$

اول $G(\omega)$ را به $G(s)$ تبدیل می‌کنیم و سپس عکس لاپلاس می‌گیریم.

$$j\omega\to s\quad ,\quad \omega^2\to -s^2$$

$$\Rightarrow\ G(s)=\frac{s^2+1}{(s+1)(s-1)(s-3)}=\frac{\frac{1}{4}}{s+1}+\frac{-\frac{1}{2}}{s-1}+\frac{\frac{5}{4}}{s-3}$$

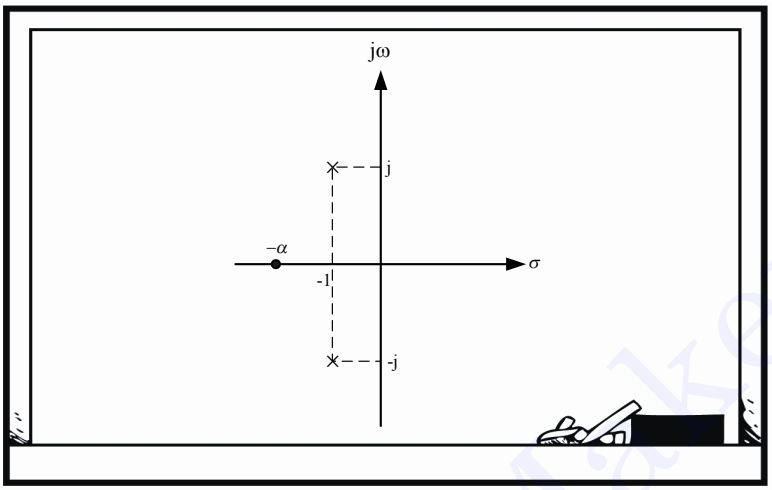
عبارت با مخرج $s+1$ را که می‌شناسیم و چون قطب سمت چپ محور $j\omega$ قرار دارد برای $t>0$ پایدار است و قطب سمت راست محور $j\omega$ برای $t<0$ پایدار خواهد بود، پس:

$$g(t)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-t} & t>0\\ -\frac{1}{2}e^{t}+\frac{5}{4}e^{3t} & t<0\end{cases}$$

پس گزینه ۲ درست است.

www.ControlMakers.ir

۱۳ـ شکل زیر صفرها و قطب‌های تابع تبدیل یک مدار را نشان می‌دهد. ضریب ثابت تبدیل را برابر 1 فرض کنید. یک جمله از پاسخ پله این مدار به شکل $ke^{-t}\cos(t+\phi)$ است. $(k>0)$ مقدار α را به نحوی تعیین کنید که k حداقل باشد.



۱) 0 ۲) 1 ۳) 2 ۴) $\frac{1}{2}$

از روی صفرها و قطب‌ها، تابع تبدیل را می‌توان نوشت:

$$H(S)=\frac{(S+\alpha)}{[S-(-1+j)][S-(-1-j)]}=\frac{S+\alpha}{(S+1)^2+1}$$

و پاسخ پله مدار به صورت زیر است:

$$y(S)=\frac{1}{S}.\frac{S+\alpha}{(S+1)^2+1}=\frac{\frac{\alpha}{2}}{S}+\frac{-\frac{\alpha}{2}S-\alpha+1}{(S+1)^2+1}$$

و حالا عکس لاپلاس می‌گیریم و k را برحسب α به دست می‌آوریم.

البته چون k ضریب جملهٔ نوسانی میرا است، تنها از این بخش، باید عکس لاپلاس بگیریم:

$$L^{-1}\left[\frac{-\frac{\alpha}{2}S-\alpha+1}{(S+1)^2+1}\right]=L^{-1}\left[\frac{-\frac{\alpha}{2}(S+1)-\frac{\alpha}{2}+1}{(S+1)^2+1}\right]$$

$$=\frac{-\alpha}{2}e^{-t}\cos t+\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)e^{-t}\sin t$$

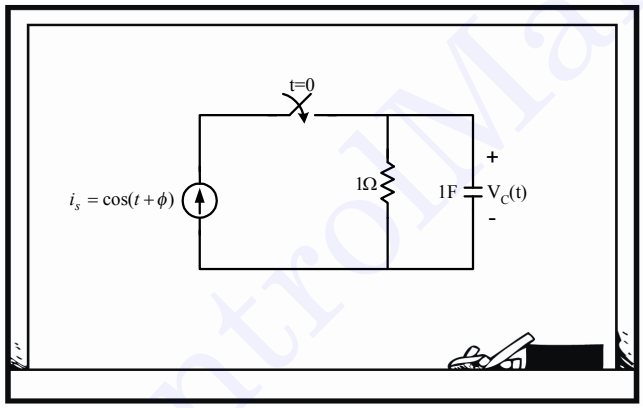
بگذارید من ادامه بدهم:

$$y(t)=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^2}\ e^{-t}\cos(t+\varphi)$$

$$\Rightarrow\quad k=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^2}\quad ;\quad \left(\frac{dk}{d\alpha}=0\ \Rightarrow\ k_{min}\right)\ \Rightarrow 2\times\frac{\alpha}{2}\times\frac{1}{2}+2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)=0\ \Rightarrow\ \alpha=1$$

پس گزینه ۲ درست است.

۱۴ـ اگر بخواهیم در مدار زیر حالت گذرا در پاسخ $V_c(t)$ برای $t>0$ حذف شود، مقدار ϕ چند درجه است؟ (شرایط اولیه ولتاژ دو سر خازن صفر است.)



۱) صفر ۲) 45° ۳) 90° ۴) 135°

اول منبع جریان را به حوزهٔ لاپلاس می‌بریم و V_c را از روی آن به دست می‌آوریم.

$$I_S(S)=\frac{S}{S^2+1}$$

نشد، به ϕ توجه نکردید:

$$i_s(t)=\cos(t+\phi)=\cos t\ \cos\phi-\sin t\ \sin\phi$$

$$\Rightarrow I_S(S)=\frac{S}{S^2+1}\cos\phi-\frac{1}{S^2+1}\sin\phi$$

www.ControlMakers.ir

متوجه اشتباهم شدم، پس:

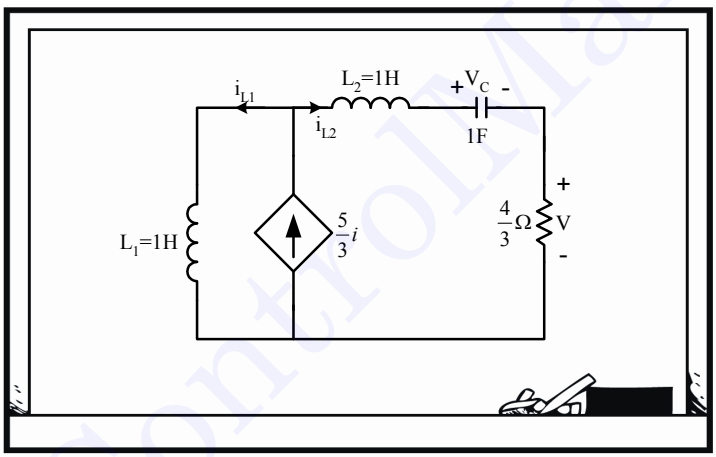
$$V_C(S)=\frac{\frac{1}{S}}{\frac{1}{S}+1}\times I_S(S)=\frac{1}{1+S}\times I_S(S)=\frac{(S\cos\phi-\sin\phi)}{(S^2+1)(S+1)}=\frac{A}{S^2+1}+\frac{B}{S+1}$$

و برای صفر شدن حالت گذرا باید صورت کسر با مخرج $s+1$، یعنی B ، صفر باشد:

$$B=\frac{-\cos\phi-\sin\phi}{2}=0\Rightarrow\tan\phi=-1\Rightarrow\phi=135^\circ$$

پس گزینه ۴ درست است.

۱۵ـ پاسخ ورودی صفر متغیر V در مدار شکل زیر در $t>0$ چیست؟ $\left(V_C(0)=1V\ ,i_{L2}(0)=3A\ ,\ i_{L1}(0)=3A\right)$



۱) $4e^{-t}-8e^{-3t}$ ۲) $-4e^{-t}+8e^{-3t}$ ۳) $3e^{-t}-4e^{-3t}$ ۴) $-3e^{-t}+4e^{-3t}$

در حوزه لاپلاس یک KVL در حلقه بزرگ می‌زنیم:

$$SI+\frac{I}{S}+\frac{4}{3}I+\left(1-\frac{5}{3}\right)IS=0$$

مقادیر اولیه سلف‌ها و خازن‌ها را فراموش کردید:

$$V_L(S)=L\left(SI-i(0)\right)$$

www.ControlMakers.ir

$$V_C(S)=\frac{V_C(0)}{S}+\frac{1}{CS}I$$

$$\Rightarrow SI-3+\frac{1}{S}+\frac{I}{S}+\frac{4}{3}I-\frac{2}{3}SI+2=0 \quad \Rightarrow \quad I=\frac{3(S-1)}{(S+1)(S+3)}$$

$$\Rightarrow V(S)=\frac{4}{3}I(S)=\frac{4(S-1)}{(S+1)(S+3)}=\frac{-4}{S+1}+\frac{8}{S+3}$$

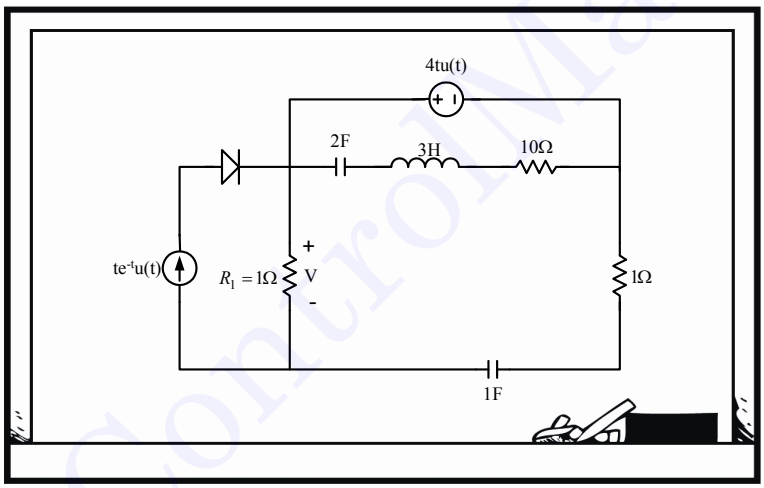
$$\Rightarrow V(t)=\left(-4e^{-t}+8e^{-3t}\right)u(t)$$

وای!! اصلاً این کارها را لازم نداشت؛ یه نگاهی به گزینه‌ها بندازید، مقدارهای اولیه همه‌شون با هم فرق دارن و:

$$V(0^+)=\frac{4}{3}i_{L2}(0)=\frac{4}{3}\times 3=4$$

پس گزینه ۲ درست است.

۱۶ـ در مدار شکل زیر ولتاژ دو سر مقاومت R_1 کدام‌یک از پاسخ‌های زیر است؟



۱) $V(t)=\left(4+e^{-t}+3e^{-\frac{1}{2}t}\right)u(t)$

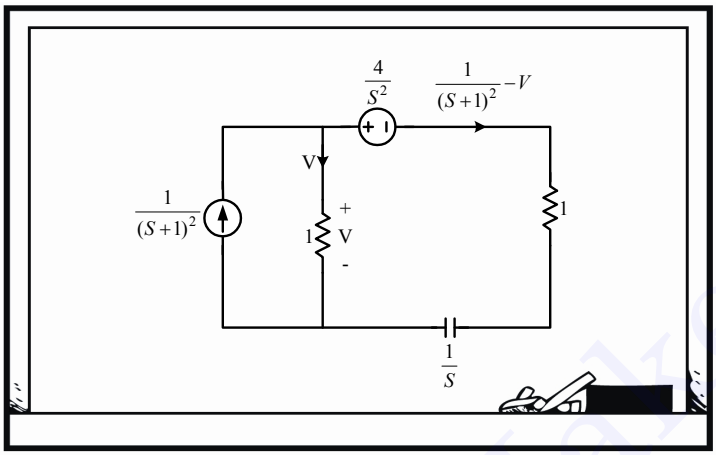
۲) $V(t)=2tu(t)+\left(e^{-t}+3e^{-\frac{t}{2}}\right)u(t)$

۳) $V(t)=\left(4-e^{-t}-3e^{-\frac{1}{2}t}\right)u(t)$

۴) هیچ‌کدام

منبع ولتاژ که بخش موازی با خود را حذف می‌کند و دیود هم به دلیل گذشتن جریان مثبت از آن روشن است.

بله، حالا می‌توانیم کل مدار را به حوزه لاپلاس ببریم:



$$KVL: -V+\frac{4}{S^2}+\left(1+\frac{1}{S}\right)\left[\frac{1}{(S+1)^2}-V\right]=0$$

$$\Rightarrow V=\frac{5S+4}{2S(S+1)\left(S+\frac{1}{2}\right)}=\frac{4}{S}+\frac{-1}{S+1}+\frac{-3}{S+\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad V(t)=\left[4-e^{-t}-3e^{-\frac{t}{2}}\right]u(t)$$

پس گزینه ۳ درست است.

۱۷ـ تابع انتقال یک شبکه خطی تغییرناپذیر با زمان RLC به شکل $H(S)=K\frac{S+d}{S^2+aS+b}$ است. هر گاه پاسخ شبکه به تحریک $x(t)=u(t)\cos t$ به صورت زیر باشد، ضرایب ثابت و حقیقی k ، d ،b و a عبارت‌اند از: (مهندسی برق ۶۹)

$$y(t)=\left[e^{-2t}\cos\left(t+30^\circ\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(t+45^\circ\right)\right]u(t)$$

۱) $k=4 \;,\; d=0 \;,\; a=4 \;,\; b=5$

۲) $k=4 \;,\; d=1 \;,\; a=4 \;,\; b=2$

۳) $k=1 \;,\; d=0 \;,\; a=4 \;,\; b=5$

۴) هیچ‌کدام

$Y(s)$ را باید از دو طریق به دست آوریم و متحد قرار دهیم:

$$Y(s)=x(S)H(S)=\frac{S}{S^2+1}.\frac{K(S+d)}{S^2+aS+b}$$

و از طرف دیگر داریم:

$$y(t)=\left[e^{-2t}\left[\cos t\cos 30-\sin t\sin 30\right]+\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos t\cos 45-\sin t\sin 45\right]\right]u(t)$$

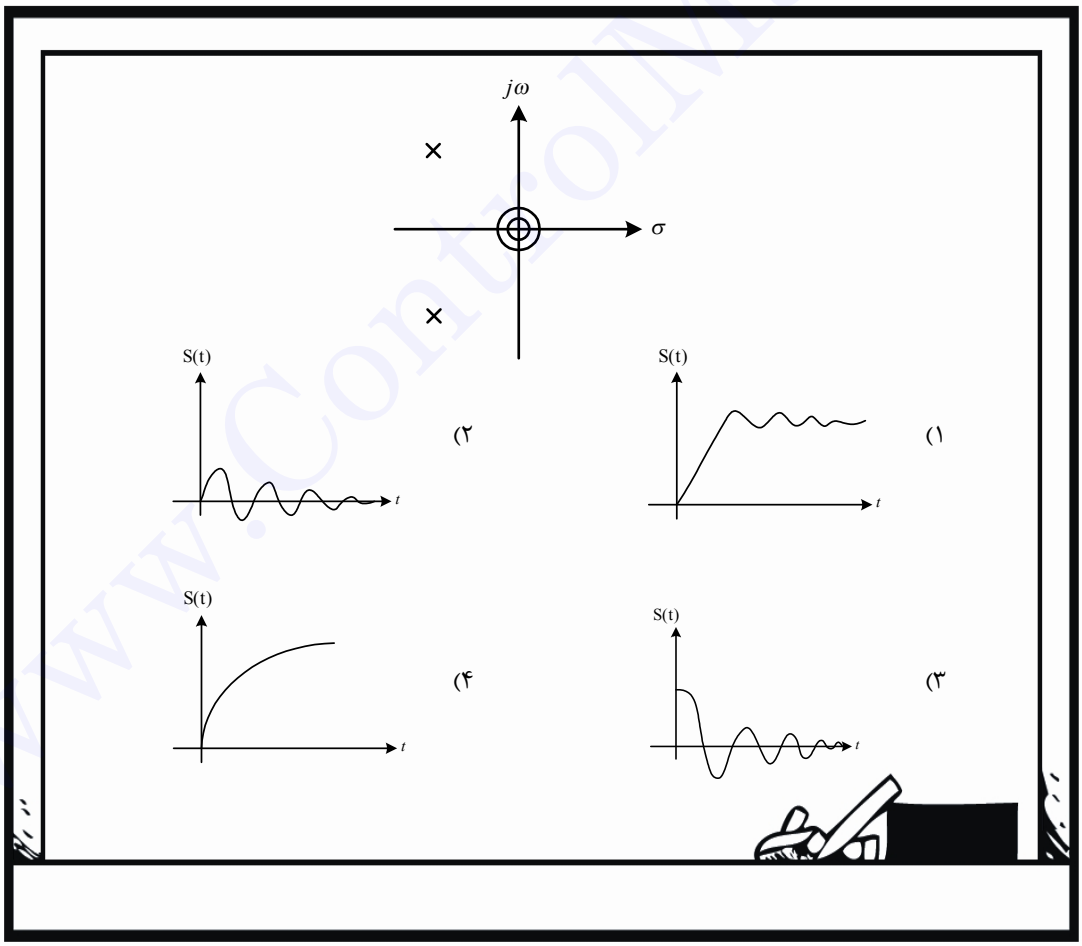
$$\Rightarrow Y(s)=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{(S+2)}{(S+2)^2+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{(S+2)^2+1}+\frac{1}{2}\frac{S}{S^2+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{S^2+1}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(S+2)-\frac{1}{2}}{(S+2)^2+1}+\frac{\frac{1}{2}(S-1)}{S^2+1}$$

حالا باید $Y(S)$ اولی را تجزیه کنیم و با دومی متحد قرار دهیم.

چون گزینه هیچ‌کدام هم داریم، یه‌ذره دقت کنیم...!!!

مخرج‌ها را می‌توانیم متحد قرار دهیم، ولی صورت $Y(s)$ اولی از درجه 2 و دومی از درجه 3 است، پس هیچ‌گاه نمی‌توانیم آن‌ها را متحد قرار دهیم.
بنابراین گزینه ۴ درست است.

۱۸ـ اگر نمودار قطب و صفر شکل مقابل، مربوط به تابع شبکه یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان باشد، پاسخ پله این مدار در حوزهٔ زمان برابر کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟ (مهندسی برق ۸۳)



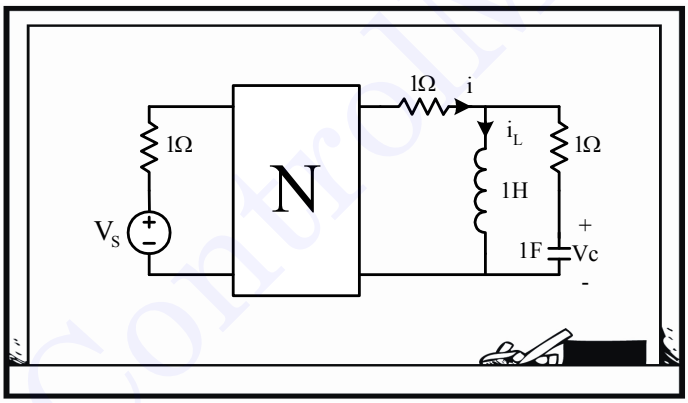
باید بر اساس صفر و قطب‌های داده‌شده، تابع تبدیل را بنویسیم و مقدار اولیه و نهایی را با توجه به قضایا به دست آوریم.

و یادمون نره که پاسخ پله خواسته شده و باید $H(S)$ را در لاپلاس ورودی هم ضرب کنیم، پس داریم:

$$Y(S)=X(S)H(S)=\frac{1}{S}\times k\frac{S^2}{(S+\alpha)^2+\omega_0^2}\quad\Rightarrow\quad y(0^+)=\lim_{S\to\infty}SY(S)=K$$

پس گزینه ۳ درست است.

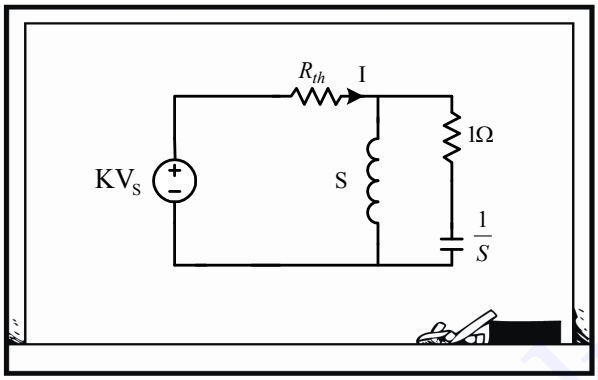
۱۹ـ در شکل زیر، N یک مدار مقاومتی خطی و بدون منابع مستقل است. اگر تابع انتقال $\frac{I}{V_s}=\frac{3(S^2+S+1)}{4S^2+4S+3}$ و شرایط اولیه $i_L(0^-)=2A$ و $v_C(0^-)=1V$ را داشته باشیم، شرایط اولیه $i(0^-)$ برابر است با: (مهندسی برق ۸۴)



۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{1}{4}$

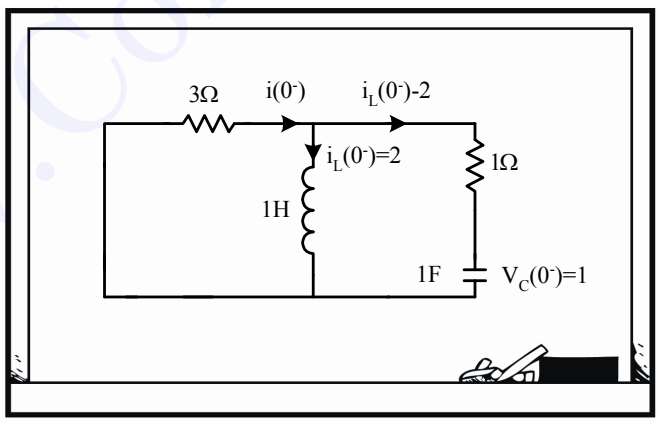
چون شبکه N مقاومتی و بدون منبع مستقل است، می‌توانیم به‌جای سمت چپ مدار یک معادل تونن قرار دهیم و با استفاده از تابع انتقال داده‌شده مقادیر معادل را بیابیم.

پس مدار ساده‌شده این‌طور می‌شود:



$$\left.\begin{aligned}\frac{I}{V_S}(S=0)=\frac{3}{3}=1=\frac{k}{R_{th}}\\ \frac{I}{V_S}(S\to\infty)=\frac{3}{4}=\frac{k}{R_{th}+1}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad k=R_{th}=3$$

حالا مدار را در $t=0^-$ در نظر بگیریم و با جایگذاری مقادیر داده‌شده در صورت سؤال و صفر کردن منبع، چون مدار قرار است برای $t>0$ شروع به کار کند، به دنبال $i(0^-)$ می‌گردیم. پس از KCL بازی کردن داریم:

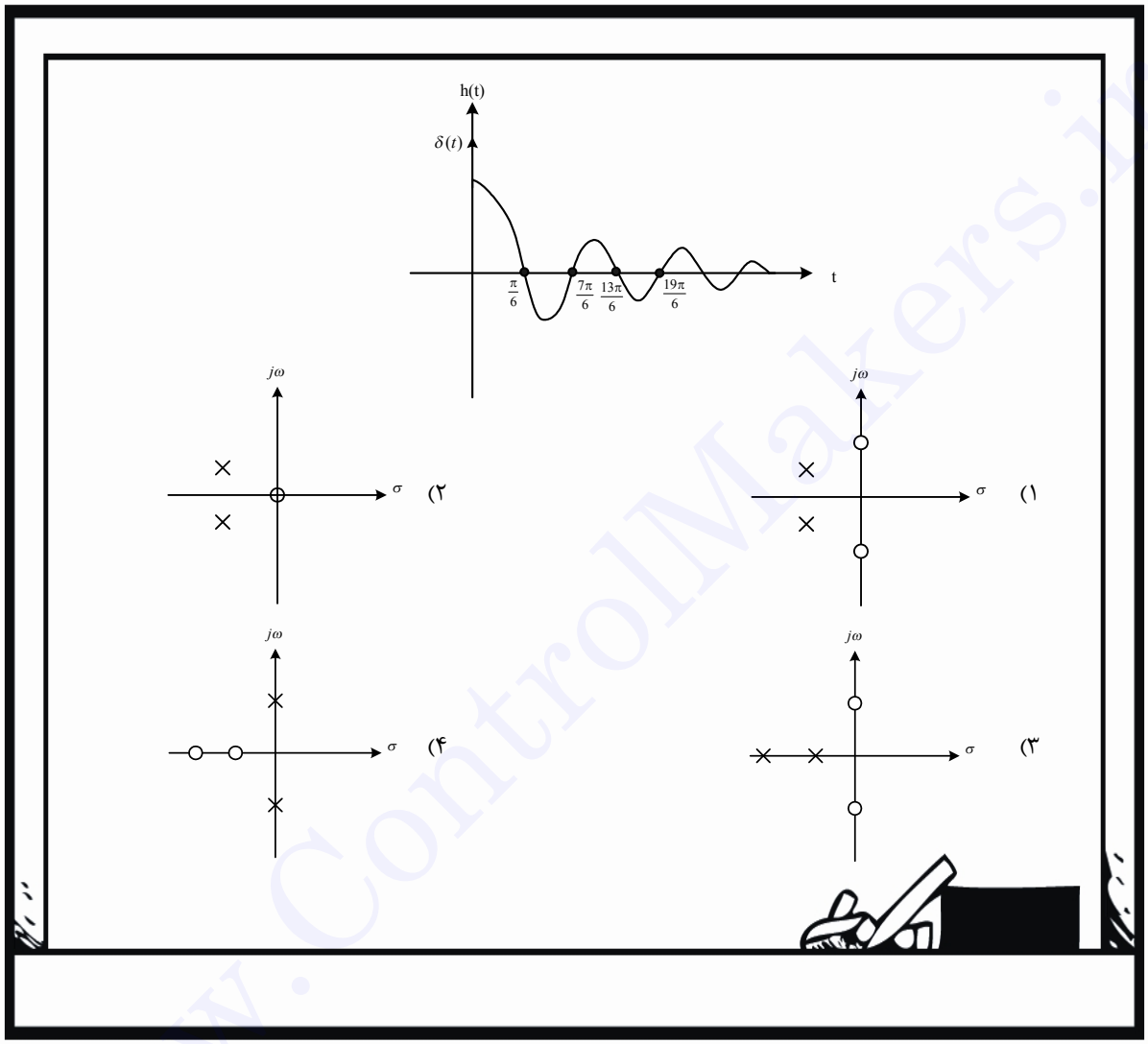


$$KVL: i(0^-)-2+1+3i(0^-)=0 \quad \Rightarrow \quad i(0^-)=\frac{1}{4}A$$

پس گزینه ۴ درست است.

www.ControlMakers.ir

۲۰ـ در یک فیلتر میان‌نگذر با پاسخ ضربه واحد داده‌شده $h(t)$، محل صفرها و قطب‌های مدار به کدام‌یک از صورت‌های زیر می‌تواند باشد؟ (x : محل قطب و o : محل صفر) (مهندسی برق ۸۴)



چون پاسخ نوسانی میراشونده است پس قطب‌های سیستم باید شامل بخش حقیقی و موهومی باشد:

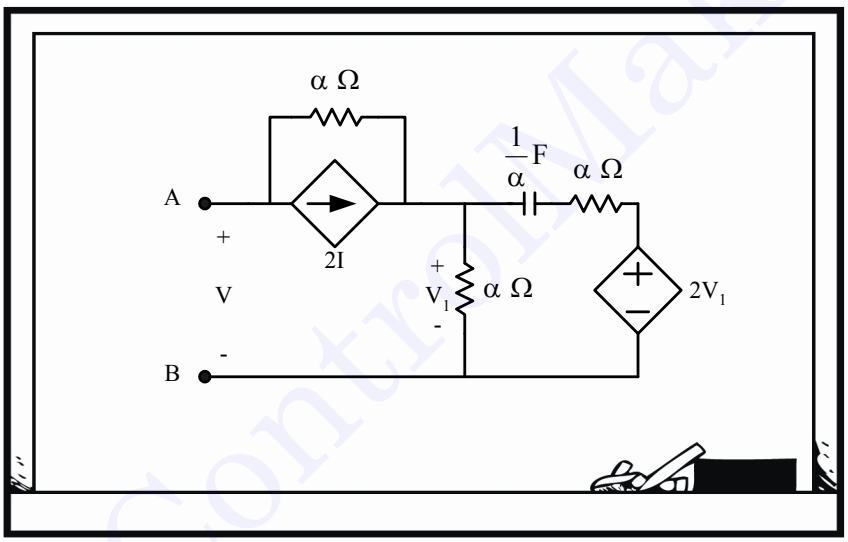
$$S = -\alpha \pm j\omega_d$$

www.ControlMakers.ir

بنابراین گزینه ۲، پاسخ است.

در $h(t)$ تابع $\delta(t)$ هم وجود دارد که لاپلاس آن 1 می‌شود؛ پس درجه صورت و مخرج تابع تبدیل باید برابر باشد و درنتیجه دو صفر هم باید داشته باشیم و گزینه ۱ درست خواهد بود.

۲۱ـ در مدار شکل زیر کدام بیان درست است؟ (مهندسی برق ۸۴)



۱) مدار از دو سر AB معادل یک اتصال کوتاه است.

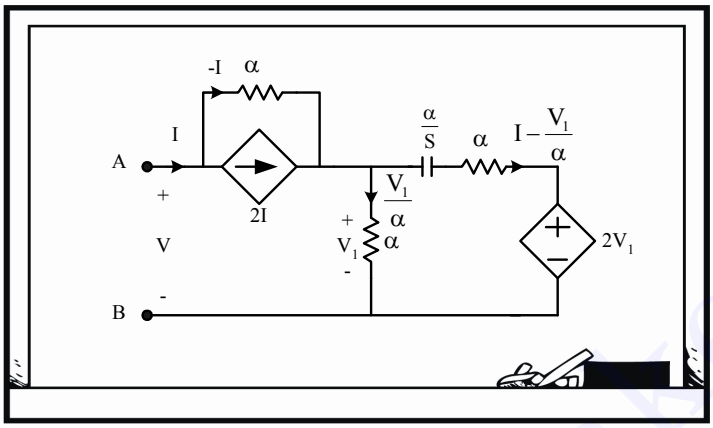
۲) مدار از دو سر AB معادل یک خازن با ظرفیت α فاراد است.

۳) مدار از دو سر AB معادل یک مقاومت برابر α اهم است.

۴) مدار از دو سر AB معادل یک سلف با اندوکتانس α هانری است.

www.ControlMakers.ir

باید رابطه $V-I$ را پیدا کنیم، پس برویم سراغ KCL بازی و KVL زدن:

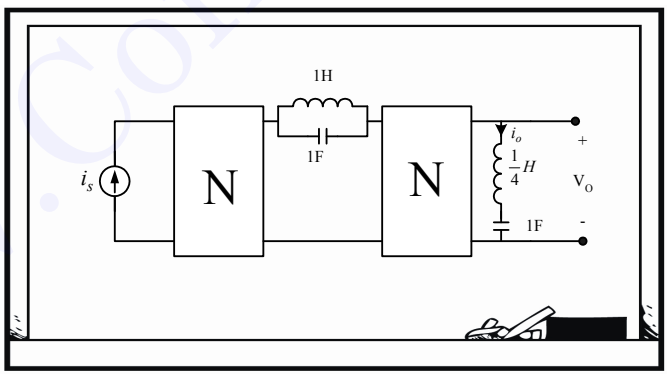


$$V_1=\left(\frac{\alpha}{S}+\alpha\right)\left(I-\frac{V_1}{\alpha}\right)+2V_1 \quad\Rightarrow\quad V_1=\alpha(S+1)I$$

$$V=-\alpha I+V_1=\alpha S I \quad\Rightarrow\quad Z=\frac{V}{I}=\alpha S$$

پس گزینه ۴ درست است.

۲۲ـ شبکه N ، از مقاومت‌های خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده است. اگر $i_s(t)=\cos t+\cos 2t$ باشد، آن‌گاه در حالت دایمی کدام‌یک از متغیرهای $v_o(t)$ و $i_o(t)$ برابر صفر می‌شود؟ (مهندسی برق ۸۳)

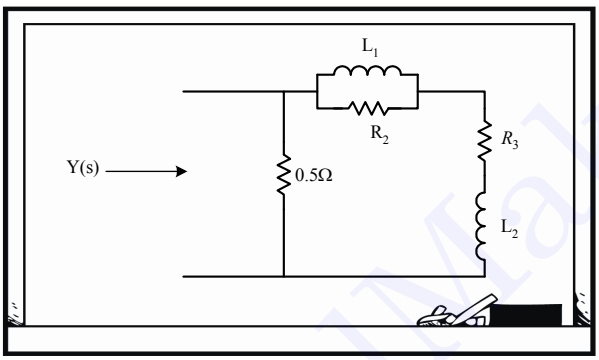


۱) فقط $i_o(t)$ ۲) فقط $v_o(t)$ ۳) هم $v_o(t)$ و هم $i_o(t)$ ۴) نه $i_o(t)$ و نه $v_o(t)$

$\omega=1$ فرکانس تشدید LC موازی است که مدار باز می‌شود و ورودی را از i_o و v_o قطع می‌کند و هر دو برابر صفر می‌شوند.

و $\omega = 2$ فرکانس تشدید LC سری است که اتصال کوتاه می‌شود و v_o را صفر می‌کند؛ بنابراین v_o در هر دو فرکانس صفر است، ولی i_o فقط در فرکانس یک، برابر صفر است، پس گزینه ۲ درست است.

۲۳ـ در مدار شکل زیر، ادمیتانس ورودی دارای دو صفر در $s=-2$ و $s=-2.5$ و یک قطب مضاعف در $s=-1$ است. مقاومت R_3 کدام است؟ (مهندسی برق ۸۳)



۱) $\frac{1}{4}\Omega$ ۲) $\frac{1}{8}\Omega$ ۳) 1Ω ۴) 2Ω

با استفاده از صفرها و قطب‌های داده‌شده، ادمیتانس ورودی به این شکل خواهد بود:

$$Y(S)=\frac{(S+2)(S+2.5)}{(S+1)^2}$$

و یک ضریب نامشخص K هم برای اندازه اضافه می‌کنیم.

و حالا شرایط $S\to 0$ و $S\to\infty$ را در تابع ادمیتانس و شکل مدار با هم تطبیق می‌دهیم:

$$\left.\begin{aligned} Y(S=0)&=K\frac{2\times 2.5}{1}=\frac{1}{0.5}+\frac{1}{R_3}\\ Y(S\to\infty)&=K=\frac{1}{0.5}\Rightarrow K=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow R_3=\frac{1}{8}\Omega$$

www.ControlMakers.ir

۲۴ـ پاسخ ضربه مداری به صورت $h(t)=\sqrt{2}e^{-t}\cos(t+45°)u(t)$ است. پاسخ حالت دایم سینوسی این مدار به ورودی $10\cos(2t-23.4°)u(t)$ برابر است با: (مهندسی برق ۸۴)

۱) $4.5\cos(2t-50°)u(t)$ ۲) $4.5\cos(2t+50°)u(t)$ ۳) $-4.5\cos(2t-50°)u(t)$ ۴) $-4.5\cos(2t+50°)u(t)$

از فرمول $Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)$ استفاده می‌کنیم که دامنه‌ها در هم ضرب و زاویه‌ها جمع می‌شوند.

و برای به دست آوردن لاپلاس $h(t)$ کسینوس را ابتدا در حوزهٔ زمان بسط می‌دهیم:

$$h(t)=\sqrt{2}e^{-t}(\cos t\cos 45°-\sin t\sin 45°)=e^{-t}(\cos t-\sin t)\quad\Rightarrow\quad H(S)=\frac{(1+S)-1}{(1+S)^2+1}=\frac{S}{(1+S)^2+1}$$

حالا به‌جای S ، $j2$ یعنی فرکانس ورودی را قرار می‌دهیم و دامنه و فاز را پیدا می‌کنیم:

$$h(j2)=\frac{j2}{(j2+1)^2+1}=\frac{j2}{-2+2j}=\frac{1}{j+2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\angle-\tan^{-1}\frac{1}{2}$$

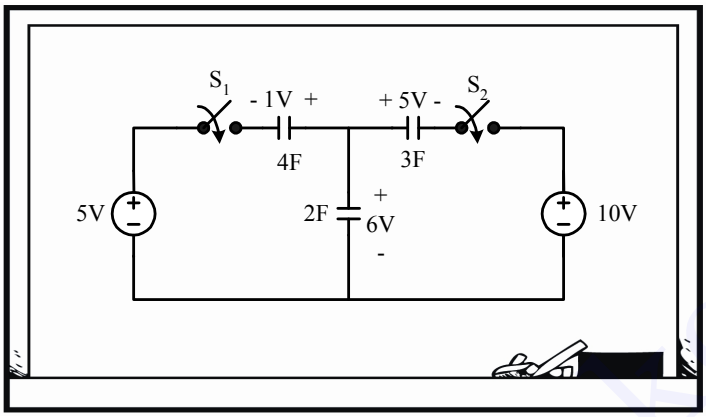
دامنه همه گزینه‌ها که 4.5 است برای زاویه هم حتماً در ربع چهارم می‌شود و با توجه به $\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$ باید زاویه‌ای کمی کوچک‌تر از $30°$ باشد، پس:

$$\angle Y=\angle X+\angle H\approx -23.4°-27°\approx -50°$$

که گزینه ۱ درست خواهد بود.

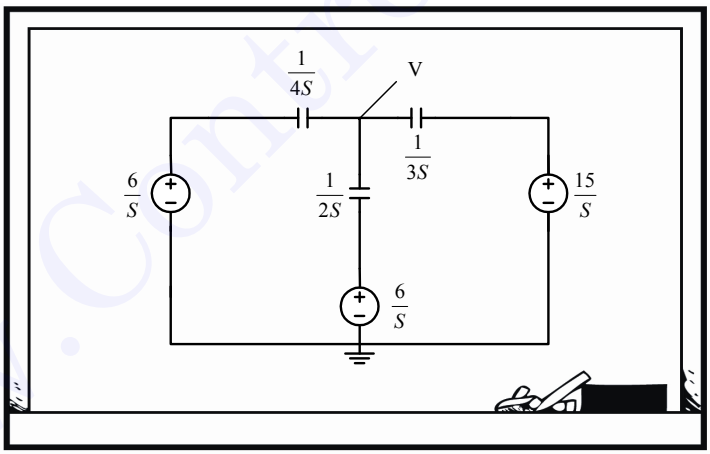
www.ControlMakers.ir

۲۵ـ کلیدهای S_1 و S_2 در مدار شکل زیر به طور همزمان بسته می‌شوند. ولتاژ V دو سر خازن 2 فارادی بعد از بسته شدن کلیدها کدام است؟ (مهندسی برق ۸۶)



۱) 3 ۲) 4 ۳) 6 ۴) 9

مقادیر اولیه ولتاژ خازن‌ها را به صورت منابع ولتاژ سری با آن‌ها در نظر می‌گیریم، سپس در گرهٔ V یک KCL می‌زنیم:



$$\left(V-\frac{6}{S}\right)4S+\left(V-\frac{6}{S}\right)2S+\left(V-\frac{15}{S}\right)3S=0$$

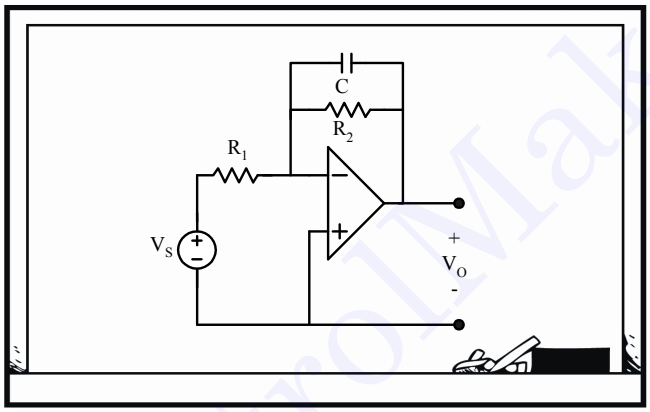
$$9SV=81 \;\Rightarrow\; V(S)=\frac{81}{9S}=\frac{9}{S} \;\Rightarrow\; v(t)=9u(t)$$

$$v(0^+)=9V$$

www.ControlMakers.ir

در این مدار بعد از بسته شدن کلید، حلقه خازنی ایجاد شد که در حوزه زمانی کلی دردسر آفرین است ولی شما که از حوزه لاپلاس مسئله را حل کردید اصلاً متوجه آن هم نشدید. خلاصه آنکه: «تحلیل در حوزه لاپلاس بهترین راه‌حل برای مدارات شامل حلقه خازنی و کات‌ست سلفی است.»
پس گزینه ۴ درست است.

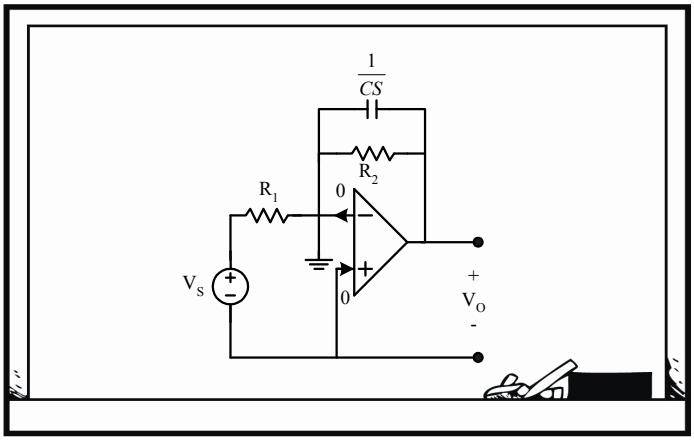
۲۶ـ در مدار شکل زیر مقادیر R_1 و R_2 را چنان انتخاب کنید که رفتار مدار فیلتر پایین‌گذری باشد که در باند گذر دارای بهره 5 و فرکانس قطع 1000Hz باشد. مقدار C را برابر $\frac{1}{\pi}$ میکروفاراد بگیرید. (مهندسی برق ۸۶)



۱) $R_1 = 100 \quad , \quad R_2 = 500$
۲) $R_1 = 100 \quad , \quad R_2 = 100$
۳) $R_1 = 200\pi \quad , \quad R_2 = 1000\pi$
۴) $R_1 = 1000\pi \quad , \quad R_2 = 200\pi$

با نوشتن KCL در سر منفی ورودی آپ‌امپ، تابع تبدیل را به دست می‌آوریم:

$$\frac{-V_S}{R_1} = V_o\left(\frac{1}{R_2} + CS\right) \Rightarrow \frac{V_o}{V_S} = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1 + R_2 CS}$$



که مشخص است فیلتری پایین‌گذر با بهره $\frac{R_2}{R_1}$ است، پس $\frac{R_2}{R_1}=5$ که در گزینه‌های ۱ و ۳ صدق می‌کند.

البته چون ذکر شده فیلتر پایین‌گذر است، می‌توانستید به ازای $S \to 0$ ، بهره مدار را به دست آورده و برابر 5 قرار دهید، آنگاه داشتیم:

$$\left|\frac{V_o}{V_s}\right| = \left|\frac{-R_2}{R_1}\right| = 5$$

و فرکانس قطع هم در مدار مرتبه اول RC برابر $\frac{1}{RC}$ است، پس داریم:

$$\omega_C = \frac{1}{R_2 C} = \frac{1}{R_2 \frac{1}{\pi}\times 10^{-6}} = 2\pi\times 1000 \quad \Rightarrow \quad R_2 = 500\,\Omega$$

۲۷ـ عکس تبدیل لاپلاس $F(S)=\frac{2e^{-s}}{1+e^{-2s}}$ تابع $f(t)$ است. $f(2.5)$ کدام است؟ (مهندسی برق ۸۶)

۱) -2 ۲) صفر ۳) 2 ۴) 3

می‌دانیم که e^{-TS} اگر در حوزهٔ لاپلاس در تابعی ضرب شود، تابع را به اندازه T در حوزهٔ زمان شیفت می‌دهد.

www.ControlMakers.ir

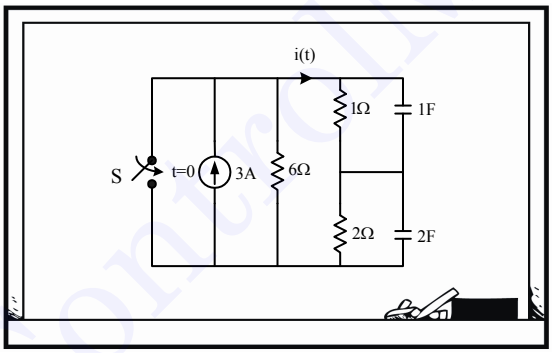
و اگر تابعی در حوزه لاپلاس در $\frac{1}{1-e^{-ts}}$ ضرب شود، به منزلهٔ متناوب شدن آن تابع در حوزهٔ زمان با دوره تناوب Tاست. پس صورت و مخرج $F(S)$ را در مزدوج مخرج ضرب کنیم تا به این صورت درآید:

$$F(S)=\frac{2e^{-s}}{1+e^{-2s}}\times\frac{1-e^{-2s}}{1-e^{-2s}}=\frac{2\left(e^{-s}-e^{-3s}\right)}{1-e^{-4s}}$$

پس عکس لاپلاس آن، $f(t)=2\left(\delta(t-1)-\delta(t-3)\right)$ با دوره تناوب 4 است و $f(2.5)=0$ است.

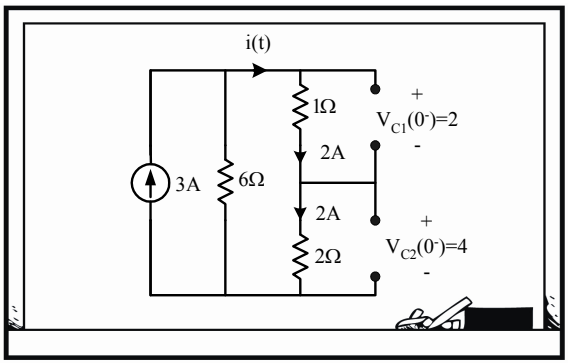
پس گزینه ۲ درست خواهد بود.

۲۸ـ در مدار شکل زیر کلید S برای مدت‌زمان طولانی باز و در $t=0$ بسته می‌شود. $i(t)$ برای زمان‌های $t\geq 0$ مطابق کدام‌یک از گزینه‌هاست؟ (مهندسی برق ۸۷)

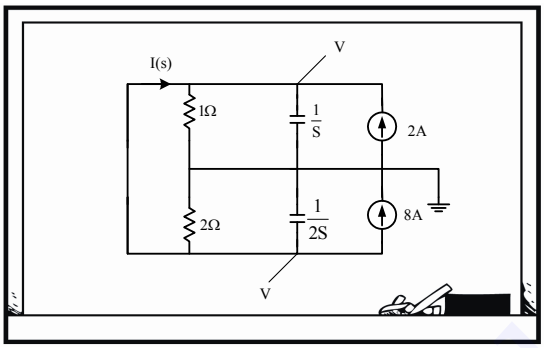


۱) $-4\delta(t)-e^{-t}$ ۲) $-2\delta(t)-e^{-\frac{t}{2}}$ ۳) $-2\delta(t)-e^{-t}$ ۴) $-4\delta(t)-e^{-\frac{t}{2}}$

اول باید در $t=0^-$ که مدار به حالت پایدار رسیده است، مقادیر اولیه را بیابیم:



بعد از بسته شدن کلید بهتر است که مدار را در حوزه لاپلاس در نظر بگیریم:



$$KCL: V + VS - 2 + \frac{V}{2} + V2S + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad V(S) = \frac{-2}{\left(S + \frac{1}{2}\right)}$$

پس برای $I(S)$ داریم:

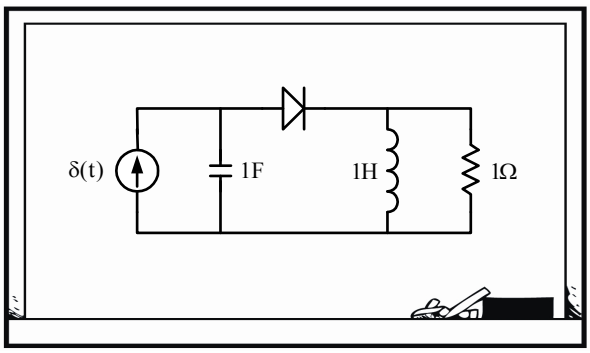
$$I(S) = V + VS - 2 = \frac{-2}{S + \frac{1}{2}}(S+1) - 2 = -4 - \frac{1}{S + \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad i(t) = -4\delta(t) - e^{-\frac{1}{2}t}$$

پس گزینه ۴ درست است.

www.ControlMakers.ir

۲۹ـ در مدار شکل زیر شرایط اولیه صفر و دیود D ایده‌آل است. $C=1F$ ، $L=1H$ ، $R=1\Omega$ پس از چند ثانیه جریان دیود D قطع می‌شود؟ (مهندسی برق ۸۷)



۱) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$ ۳) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ ۴) $\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$

این از آن سؤال‌های ورودی ضربه نیست که با به دست آوردن مقادیر اولیه در $t=0^+$ پاسخ پیدا شود؛ پس همان بهتر که از لاپلاس جریان دیود را به دست بیاوریم، بعد عکس لاپلاس بگیریم تا ببینیم کی صفر می‌شود که دیود خاموش شود.

فعلاً لاپلاس گرفتن را من شروع کنم تا ببینیم چطور می‌شود!

$$i_D(s)=\frac{\frac{1}{s}}{\frac{1}{s}+s\|1}=\frac{s+1}{s^2+s+1}$$

اوه اوه!! حالا چطور عکس لاپلاس بگیریم؟

صبرکن الان درستش می‌کنیم:

$$i_D(s)=\frac{s+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \Rightarrow i_D(t)=e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)=0$$

www.ControlMakers.ir

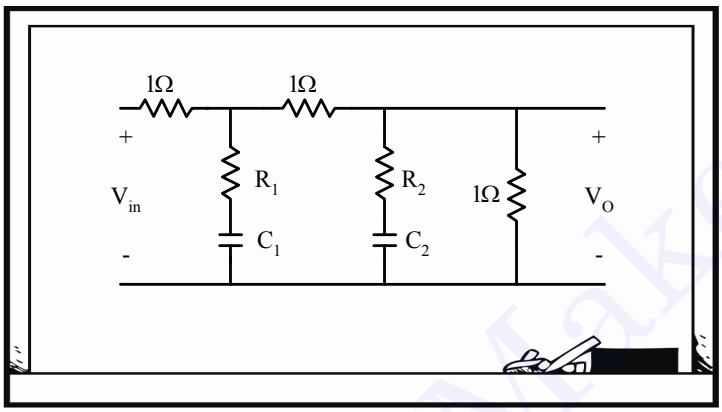
www.ControlMakers.ir

$$\Rightarrow \quad \tan\frac{\sqrt{3}}{2}t=-\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2}t=\frac{2\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad t=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

گزینه ۳ درست است.

۳۰ـ تابع شبکه انتقال ولتاژ مدار شکل زیر به صورت مقابل است: $\frac{V_o}{V_{in}}=\frac{2s^2+3s+1}{As^2+Bs+C}$

مقادیر A ، B و C کدام است؟ (مهندسی برق ۸۴)



۱) $A=8 \quad , \quad B=13 \quad , \quad C=3$

۲) $A=13 \quad , \quad B=8 \quad , \quad C=1$

۳) $A=13 \quad , \quad B=13 \quad , \quad C=3$

۴) $A=8 \quad , \quad B=3 \quad , \quad C=1$

به ازای $S=0$ که خازن‌های مدار باز می‌شوند، داریم:

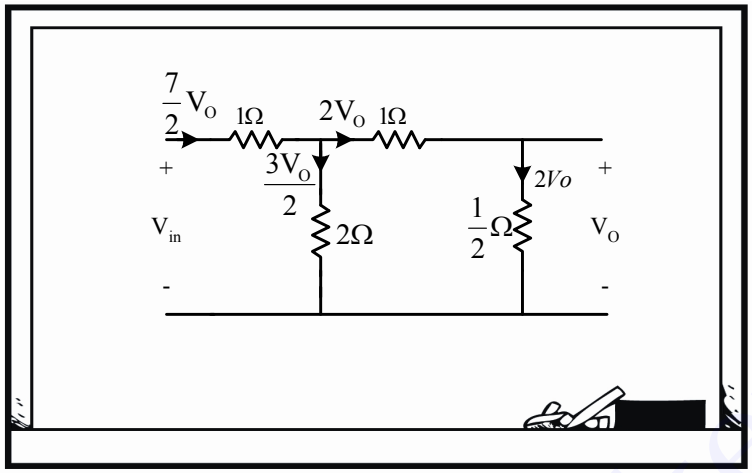
$$\frac{V_o}{V_{in}}(S=0)=\frac{1}{C}=\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad C=3$$

پس جواب درست را بین گزینه ۱ یا ۳ باید انتخاب کنیم که در آن گزینه‌ها A متفاوت است، ولی از $S\to\infty$ هم نمی‌توانیم استفاده کنیم؛ چون R_1 و R_2 را نداریم.

صورت تابع تبدیل داده شده است؛ پس صفرهای خروجی V_o مشخص است که معادل اتصال کوتاه شدن شاخه‌های RC سری هستند:

$$S=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{4}=-1\,,\,-\frac{1}{2} \quad ; \quad R_i+\frac{1}{C_iS_i}=0 \quad \Rightarrow \quad S_i=-\frac{1}{R_iC_i} \quad \Rightarrow \quad R_iC_i=1\,,2$$

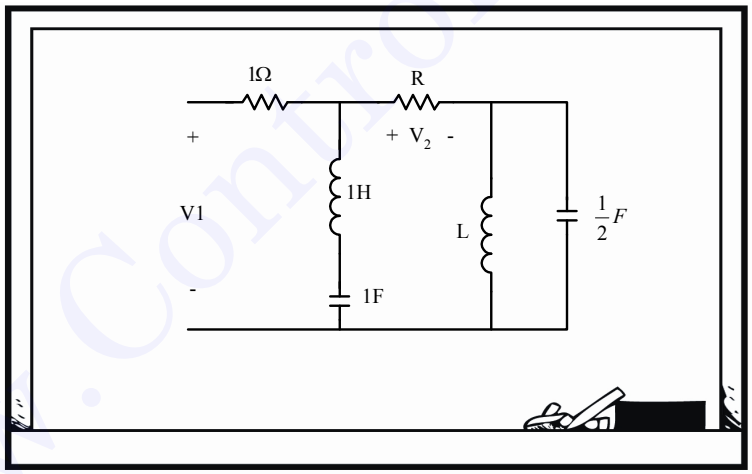
حالا مثلاً برای سادگی فرض می‌کنیم $C_i = 1$ ، $R_2 = 1$ ، $R_1 = 2$ و در $S \to \infty$ داریم:



$$KVL: V_{in} = \frac{7}{2}V_o + 3V_o = \frac{13}{2}V_o \quad \Rightarrow \quad \frac{V_o}{V_{in}}(S \to \infty) = \frac{2}{A} = \frac{2}{13} \quad \Rightarrow \quad A = 13$$

پس گزینه ۳ درست است.

۳۱ـ تابع شبکه $H(s) = \frac{V_2(S)}{V_1(S)} = \frac{s^4 + as^3 + 5s^2 + bs + c}{3s^4 + 5s^3 + 19s^2 + 8s + 12}$ در مدار شکل زیر داده شده است.



مقادیر مجهول a ، b و c کدام‌اند؟ (مهندسی برق ۸۶)

۱) $(a,b,c) = (1,1,3)$ ۲) $(a,b,c) = (1,0,4)$ ۳) $(a,b,c) = (0,1,4)$ ۴) $(a,b,c) = (0,0,4)$

هر سه مجهول مربوط به صورت تابع تبدیل هستند؛ بنابراین باید به دنبال صفرهای V_2 بگردیم.

www.ControlMakers.ir

که آن هم ناشی از فرکانس‌های تشدید LC سری و موازی می‌شود.

$$S = \pm j1 \quad , \quad S = \pm j\frac{1}{\sqrt{L\frac{1}{2}}}$$

جالب شد! پس صورت تابع تبدیل را باید با عبارت زیر متحد قرار دهیم:

$$\left(S^2+1\right)\left(S^2+\frac{1}{L\frac{1}{2}}\right)$$

و ضرایب S^{2n+1}، صفر خواهند بود؛ بنابراین $a = b = 0$ است که تنها در گزینه ۴ صدق می‌کند.

www.ControlMakers.ir

فصل ۱۰

مشخصه‌های ذاتی و فرکانس‌های طبیعی مدار

مقدمه

اگر از من بپرسند که مفهومی‌ترین مبحث درس مدار کدام است، بنده بدون مکث جواب می‌دهم: مبحث مشخصه‌های ذاتی و فرکانس‌های طبیعی. نگاه ما به مدار در این فصل فوق‌العاده عمیق است، به رفتار مدار توجه خاصی داریم؛ اینکه مدار از چه مرتبه‌ای است و اینکه فرکانس‌های طبیعی، حقیقی موهومی و مختلط هر یک چه معنایی دارند و... راستش را بخواهید در سایر رشته‌های مهندسی و غیر مهندسی و حتی علوم انسانی هم فرکانس‌های طبیعی از اهمیت خاصی برخوردارند. اینکه یک صدف دریایی دارای چه فرکانس‌های طبیعی است و اینکه چرا آن نسیم ملایم، آن پل عظیم را خراب کرد؟ اصلاً مکانیزم کار گوش ما چگونه است و در چه فرکانس‌هایی کار می‌کند؟ اینکه چرا شما احساس می‌کنید که «ذات»تان با آن دیگری این‌قدر منطبق است؟ و چرا این‌قدر فرکانس‌های طبیعی‌تان مثل هم است؟ و اینکه اصلاً «هم‌نوایی» دو آدم یعنی همین یکسان بودن مشخصه‌های ذاتی و فرکانس‌های طبیعی و...

۱۰ـ۱ فرکانس‌های طبیعی

از عنوان این تیتر پیداست که به **ذات مدار** بستگی دارد؛ یعنی به ورودی بستگی ندارد. تابع گراف مدار، نوع عناصر و مقادیرشان و **شرایط اولیه** است؛ یعنی فرکانس‌های طبیعی به ورودی و روش تحلیل بستگی ندارند، اما به شرایط اولیه وابسته‌اند.

مگر شرایط اولیه از مختصات ذات مدار است؟

www.ControlMakers.ir

www.ControlMakers.ir

بله، حالا خواهید دید که چطور شرایط اولیه روی ذات مدار یعنی فرکانس‌های طبیعی مؤثر است.

خُب برویم سراغ کارمان:

معادلهٔ دیفرانسیل مینی‌مال شبکه، معادله دیفرانسیل همگن با کمترین درجه است که تمام پاسخ‌های ورودی صفر متناظر با هر حالت اولیه را پیش‌بینی می‌کند، یعنی:

$$Q(D).X=0 \qquad (۱\text{ـ}۱۰)$$

و در آن X یک متغیر شبکه و $Q(D)$ یک چندجمله‌ای به شکل معادله دیفرانسیل است که در آن:

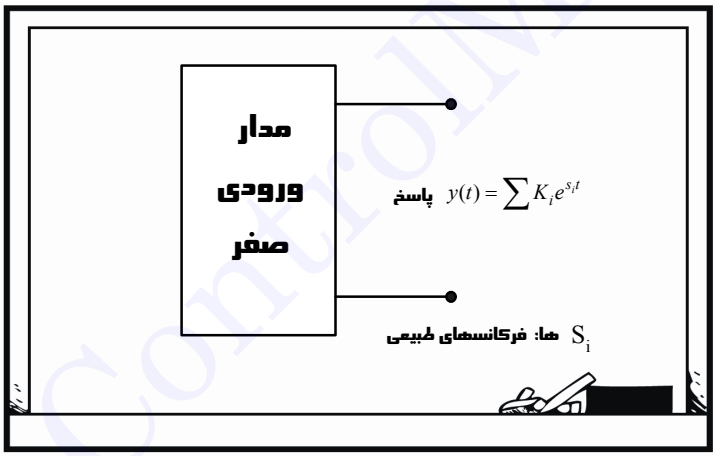
$$D=\frac{\partial}{\partial t} \qquad (۲\text{ـ}۱۰)$$

حالا فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه را این‌گونه تعریف می‌کنیم:

فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه، ریشه‌های معادله مشخصه مینی‌مال متغیر مربوط هستند، به طوری که:

$$Q(D).X=0 \;\rightarrow\; Q(s)=0 \;\Rightarrow\; S_i = \text{فرکانس‌های طبیعی} \qquad (۳\text{ـ}۱۰)$$

این فرکانس‌های طبیعی یا مُدهای طبیعی در پاسخ ورودی صفر ظاهر می‌شوند. آیا مفهوم شکل (۱۰ـ۱) را متوجه می‌شوید؟



شکل (۱۰ـ۱) مدار با ورودی صفر به همراه یک پاسخ از آن

یعنی آنکه اگر مدار هیچ ورودی نداشته باشد و تنها در اثر شرایط اولیه تحریک شود، در خروجی فلان متغیر شبکه، آن فرکانس‌های طبیعی S_i به صورت $k_i e^{S_i t}$ ظاهر می‌شوند. حال اگر S_iها حقیقی منفی باشند، یعنی آن خروجی، میرای شدید (یا بحرانی) است و اگر S_iها مختلط با مقدار حقیقی منفی باشند، یعنی پاسخ، میرای ضعیف است و اگر S_iها موهومی محض باشند، پاسخ، به صورت نوسانی است و بالاخره چنانچه جزء حقیقی S_iها مثبت باشند، خروجی، ناپایدار است.

حالا **فرکانس‌های طبیعی یک شبکه** را تعریف می‌کنیم؛ اجتماع یا مجموعهٔ همهٔ فرکانس‌های طبیعی تمامی متغیرهای شبکه را فرکانس‌های طبیعی می‌گوییم. به عبارت دیگر فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه، زیرمجموعه‌ای از فرکانس‌های طبیعی شبکه هستند.

لطفاً یک لحظه صبر بفرمایید، یعنی ممکن است بعضی از فرکانس‌های طبیعی یک شبکه در برخی از متغیرهای شبکه ظاهر نشوند؟

دقیقاً !

به عبارت دیگر، یعنی می‌فرمایید که ممکن است جنس پاسخ یکی از متغیرهای شبکه مثلاً در یک مدار مرتبهٔ ۲ ، از جنس $ke^{s_1 t}$ (یعنی مرتبهٔ اول) باشد؟

باز هم می‌گویم، **دقیقاً** !

پس بحث خیلی جالب شد؛ اگر ممکن است در این‌باره کمی بیشتر توضیح بدهید.

این چند نکته را لطفاً خوب بفهمید:

ریشه‌های غیرصفر هر دترمینان ماتریس شبکه مانند Z_m ، Z_ℓ ، Y_n ، Y_q یا حتی $(SI - A)$، برابر فرکانس‌های طبیعی شبکه هستند.

و این خود یک روش ساده و مفید برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی یک شبکه است. یعنی در قدم اول به مدار نگاه می‌کنیم؛ اگر دوحلقه‌ای بود Z_m را به‌راحتی به دست می‌آوریم و اگر دوگره‌ای بود، Y_n را مثل آب خوردن پیدا می‌کنیم و بعد ریشه‌های دترمینان را که پیدا کردیم کارمان تمام است. اگر هم تعداد گره‌ها یا حلقه‌ها بیشتر از 2 بود، باز دوباره Z_m یا Y_n را پیدا می‌کنیم (درحقیقت اونی که مرتبه کمتری است) و دوباره ریشه‌های دترمینان و...

راستی دلیل تأکیدم را روی مدارهای دوگره‌ای و دوحلقه‌ای در فصل دوقطبی‌ها متوجه خواهید شد.

www.ControlMakers.ir

و اگر در مسئله‌ای به‌جای فرکانس‌های طبیعی کل شبکه، فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه را می‌خواستند، این روش مفید است؟

نه دیگر نشد! این همه گفتیم که ممکن است بعضی فرکانس‌های طبیعی شبکه در برخی از متغیرها ظاهر نشوند، یعنی همین دیگر؛ پس برای فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه، باید معادله دیفرانسیل آن متغیر را نوشت و از ریشه‌های معادلهٔ مشخصه، به فرکانس‌های طبیعی آن متغیر دست یافت. البته یک روش دیگر هم هست و آن اینکه ابتدا عینک لاپلاسی زده و بعد به کمک KCL و KVL ، معادله مشخصهٔ متناظر آن متغیر را پیدا کنیم و...

هر قطب تابع شبکه هر متغیر مدار، یک فرکانس طبیعی متغیر مربوطه است:

$$H(s)=\sum_i \frac{K_i}{(S-P_i)^n} \quad \Rightarrow \quad P_i = \text{فرکانس طبیعی مرتبه } n \text{ ام} \qquad (۴\_۱۰)$$

راستی یک مطلب ساده و مهم:

در حوزهٔ زمان در فرم $k_i e^{s_i t}$ ، S_i فرکانس طبیعی ساده (مرتبه اول) و در حالت $k_i t e^{s_i t}$ ، S_i فرکانس طبیعی مضاعف (مرتبه دوم) بوده و به طور کلی در فرم $k_i t^n e^{s_i t}$ ، S_i فرکانس طبیعی مرتبهٔ $n+1$ ام است، ولی در حوزهٔ فرکانس قطب مرتبهٔ n ام، فرکانس طبیعی مرتبهٔ n ام است. روشن است دیگر؛ نه؟

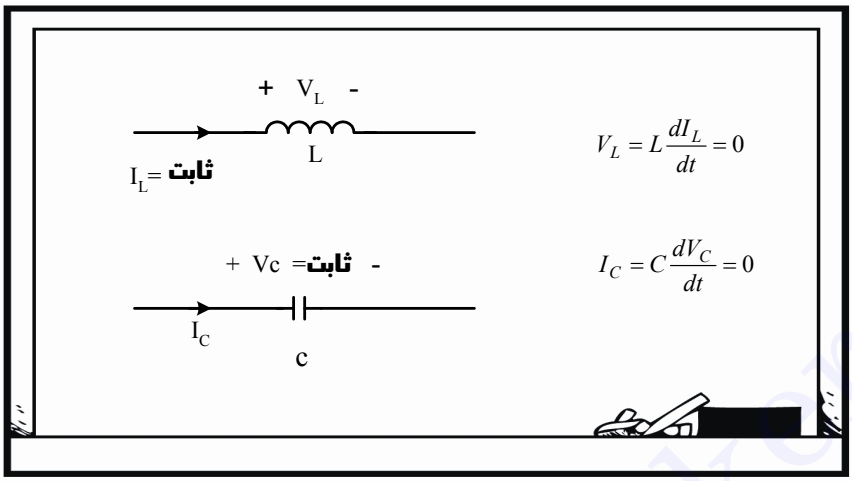
اگر $S_i \neq 0$ فرکانس طبیعی ولتاژ یک شاخه باشد، فرکانس طبیعی جریان شاخه نیز است و برعکس. در مورد بار و شار نیز همین‌طور است.

چرا $S_i \neq 0$ ؟ مگر مخالف صفر بودن مهم است؟

بله، ممکن است ولتاژ یک شاخه، فرکانس صفر (مقدار DC) داشته باشد، اما جریان شاخه دارای فرکانس صفر نباشد و برعکس؛ پس باید در فرکانس صفر یا مقدار DC دقت بیشتری کرد.

www.ControlMakers.ir

مثلاً به شکل (۱۰ـ۲) دقت کنید:



شکل (۲.۱۰) دقت در فرکانس صفر (DC) در سلف و خازن

دیدیم که در سلف ممکن است جریان دارای فرکانس صفر باشد (I_L = ثابت یا DC) ولی ولتاژ صفر شود $(V_L = 0)$، یعنی اصلاً دارای مؤلفه‌ای در $S = 0$ نباشد و اتفاق مشابه برای خازن ...

حالا یک نکتهٔ بسیار موشکافانه:

چون فرکانس‌های طبیعی مربوط به حالت ورودی صفر هستند، هنگام بررسی تابع تبدیل:

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\text{تبدیل لاپلاس خروجی}}{\text{تبدیل لاپلاس ورودی}} \qquad (۵ـ۱۰)$$

و در نظر گرفتن قطب‌های آن به عنوان فرکانس‌های طبیعی شبکه، مدار متناظر شبکه‌ای است که منبع از آن خارج شده باشد[۱].

پس منبع یا ورودی مستقل تنها یک واسطه است برای به دست آوردن تابع تبدیل و درنتیجه فرکانس‌های طبیعی شبکه، آن هم شبکه‌ای که منبع در آن صفر شده باشد. به عبارت دیگر تابع تبدیل، مستقل از «مقدار ورودی» است ولی به «جنس ورودی» بستگی دارد؛ یعنی اینکه ورودی، منبع ولتاژ باشد یا منبع جریان در گراف شبکهٔ مورد بررسی متفاوت است.

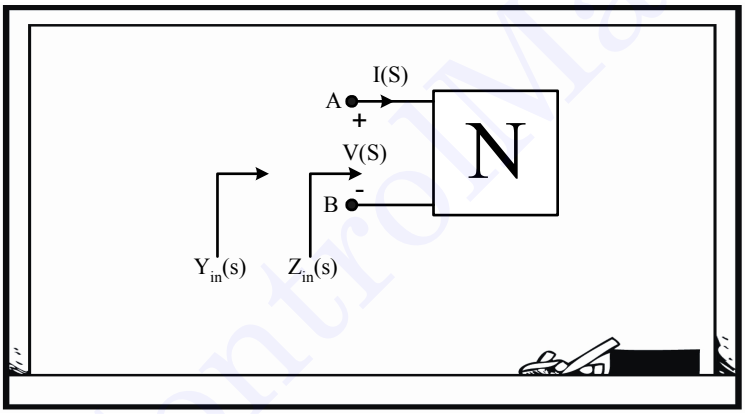
۱ـ منبع جریان ← O.C. و منبع ولتاژ ← S.C.

www.ControlMakers.ir

من که درست منظورتان را نفهمیدم. تا امروز ما فکر می‌کردیم که تابع تبدیل هیچ ربطی به ورودی ندارد، ولی شما می‌فرمایید که به «جنس ورودی» بستگی دارد.

پس تمرین ۱ را n بار مرور کنید، چون در فهم این مطلب خیلی مؤثر و مفید است.

۱ـ در شبکهٔ شکل (۱۰ـ۳) در مورد قطب‌های امپدانس ورودی و ادمیتانس ورودی بحث کنید.



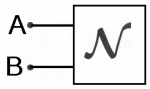
شکل (۱۰ـ۳) شبکهٔ تمرین ۱

ببینید $Z_{in}(s)$ اصلاً یعنی چه؟

$$Z_{in}(s)=\frac{V(s)}{I(s)} \qquad (۱۰ـ۶)$$

یعنی یک نوع تابع تبدیل است که در آن **ورودی** از جنس **منبع جریان** است.

پس قطب‌های امپدانس ورودی $\left(Z_{in}(s)\right)$، برابر فرکانس‌های طبیعی شبکه است وقتی منبع در آن صفر شده باشد؛ یعنی دو سر AB مدار باز باشد. به طور خلاصه:

«قطب‌های $Z_{in}(s)$ فرکانس‌های طبیعی 

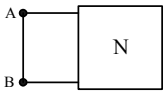
هستند.»

حالا اگر دوست دارید خودتان در مورد ادمیتانس بحث کنید:

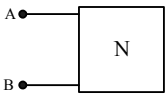
امیدوارم دقیق باشد. سعی می‌کنم دوگان عبارت‌های شما را بگویم؛ اولاً می‌گوییم تعریف ادمیتانس این‌گونه است:

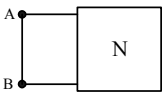
$$Y_{in}(S)=\frac{I(s)}{V(s)} \qquad (۷-۱۰)$$

یعنی یک نوع تابع تبدیل است که در آن، **ورودی** از جنس **منبع ولتاژ** است. پس قطب‌های ادمیتانس ورودی $\left(Y_{in}(S)\right)$، برابر فرکانس‌های طبیعی شبکه است وقتی منبع در آن صفر شده باشد؛ یعنی دو سر AB اتصال کوتاه باشد، به طور خلاصه:

«قطب‌های $Y_{in}(s)$ فرکانس‌های طبیعی شبکه 

هستند.»

کاملاً درست است. حال می‌پرسم، آیا می‌دانید بین فرکانس‌های طبیعی شبکه 

و 

چه شباهتی هست؟

الف ب پ ت ث ج چ ح خ د ذ ر ز ژ س ش ص ض ط ظ ع غ ف ق ک گ ل م ن و هـ ی[۱]

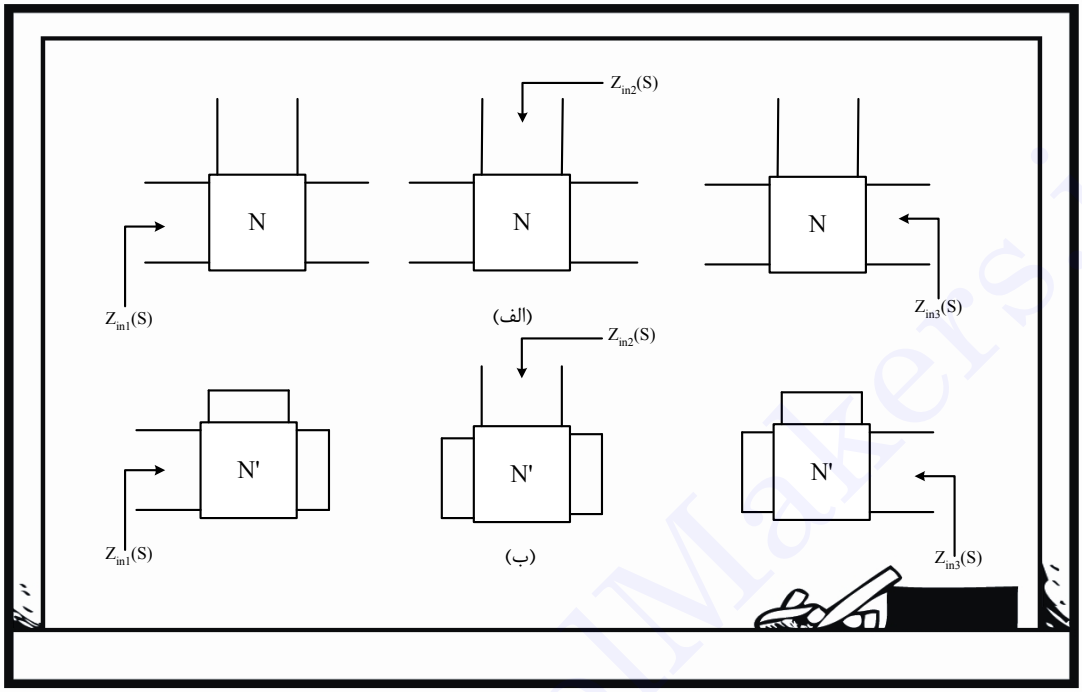
نخیر درست نیست، بین آن دو شبکه **هیچ** ارتباطی وجود ندارد.

۱ـ جناب در پاسخ به این سؤال حرف‌هایی زد که به جهت نگرانی از آنکه ذهن شما را پراکنده کند، از بازگو کردن آن‌ها پرهیز می‌کنم! فقط یک خاطره واقعی می‌گویم؛ در دوران معلمی دو تا شاگرد دو قلو داشتم که از هرچه فکرش را بکنید، به هم شبیه‌تر بودند. خیلی وقت‌ها در تشخیص اینکه کدام‌یک علیرضاست و کدام‌یک امیررضا مشکل اساسی داشتم؛ یکی‌شان ابروهایش از هم جدا بود (یعنی همان O.C. خودمان!) و دیگری ابروهایش به هم پیوسته بود. (یا همان S.C. خودمان!) ولی این دو به شدت از لحاظ ظاهری به هم شبیه بودند، جالب آنکه این دو نفر از لحاظ مشخصه‌های ذاتی و فرکانس‌های طبیعی فوق‌العاده با هم متفاوت بودند! حالا نتیجه‌گیری با خودتان!

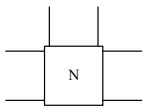
www.ControlMakers.ir

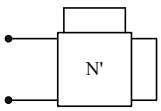
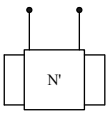
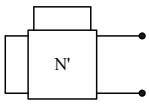
www.ControlMakers.ir

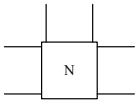
۲ـ در هریک از دو شبکهٔ زیر چه ارتباطی میان $Z_{in_1}(s)$ و $Z_{in_2}(s)$ و $Z_{in_3}(s)$ وجود دارد؟

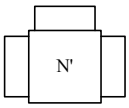


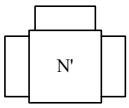
شکل (۴.۱۰) شبکه‌های مورد نظر برای تمرین ۲

طبق گفته‌های تمرین ۱ در قسمت (الف) می‌توان گفت که قطب‌های $Z_{in_1}(s)$ و $Z_{in_2}(s)$ و $Z_{in_3}(s)$، فرکانس‌های طبیعی شبکهٔ  هستند؛ یعنی با هم برابرند.[۱]

اما در مورد قسمت (ب) نمی‌دانم؛ چون قطب‌های $Z_{in_1}(s)$، فرکانس‌های طبیعی  هستند؛ قطب‌های $Z_{in_2}(s)$، فرکانس‌های طبیعی  و قطب‌های $Z_{in_3}(s)$، فرکانس‌های  هستند و این سه شبکه به قول شما **هیچ** ربطی به هم ندارند؛ به قول شما مثل همان دوقلوهای به ظاهر شبیه و در باطن بسی متفاوت‌اند.

۱ـ به عبارت دقیق‌تر، قطب‌های آن‌ها، همگی زیرمجموعهٔ فرکانس‌های طبیعی شبکهٔ  هستند.

اولاً این 3 تا، دوقلو نیستند، بلکه سه‌قلویند! اما خُب اشکالی ندارد، سراغ ادمیتانس‌ها می‌رویم. قطب‌های $Y_{in_1}(s)$ ، $Y_{in_2}(s)$ و $Y_{in_3}(s)$ فرکانس‌های طبیعی 

هستند؛ یعنی ادمیتانس‌ها دارای قطب‌های یکسانی‌اند؛ به عبارت دیگر در پاسخ به این پرسش می‌گوییم، صفرهای $Y_{in_1}(s)$ و $Y_{in_2}(s)$ و $Y_{in_3}(s)$ با هم یکسان بوده و برابر فرکانس‌های طبیعی شبکه 

هستند.

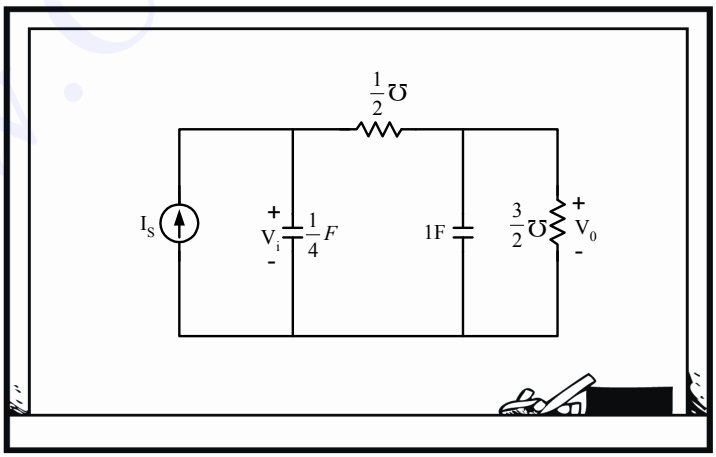
خیلی خوب شد، برویم سراغ داستان بعدی...

حذف فرکانس‌های طبیعی برای یک متغیر شبکه:

- گاهی می‌توان شرایط اولیه را طوری تعیین کرد که یکی از فرکانس‌های طبیعی حذف شود (به کمک تبدیل لاپلاس تابع شبکه).
- گاهی می‌توان ورودی از **جنس توابع ضربه** را طوری تعیین کرد که یکی از فرکانس‌های طبیعی حذف شود.

برای درک بهتر این جملاتِ پربار لازم است که یک مثال جانانه با هم حل کنیم تا خیلی خوب مفهوم این دو گزاره آخر را درک کنیم.

۳ـ ابتدا فرکانس‌های طبیعی شبکه را به دست آورید. سپس در حالت ورودی صفر، شرایط اولیه را طوری تعیین کنید که خروجی V_0 فقط شامل فرکانس -1 باشد و درنهایت در شرایط حالت صفر، ورودی (از جنس توابع ضربه) را طوری پیدا کنید که باز خروجی V_0 فقط شامل فرکانس -1 باشد.



شکل (۵.۱۰) مدار تمرین ۳

www.ControlMakers.ir

www.ControlMakers.ir

ابتدا عینک لاپلاسی زده و سپس با حل مدار به روش منظم گره، داریم:

$$\begin{pmatrix} \frac{s}{4}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_i \\ V_0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} i_s \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{ورودی}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{4}V_i(0) \\ V_0(0) \end{pmatrix}}_{\text{شرایط اولیه}}$$

با حل این معادلات به روش کرامر چنین داریم:

$$V_0 = \frac{2}{(s+1)(s+3)} I(s) + \frac{(s+2)V_0(0)+\frac{1}{2}V_i(0)}{(s+1)(s+3)}$$

و برای فرکانس‌های طبیعی:

$$\det Y_n = 0 \quad \rightarrow \quad s=-1,-3$$

در حالت ورودی صفر برای حذف فرکانس طبیعی $s=-3$، باید صورت ضریبی از $(s+3)$ شود؛ یعنی باید چنین داشته باشیم:

$$(s+2)\,V_0(0)+\frac{1}{2}V_i(0)=K(s+3)$$

$$K=V_0(0)$$

$$3V_0(0)=2V_0(0)+\frac{1}{2}V_i(0) \quad \Rightarrow \quad V_i(0)=2V_0(0)$$

بسیار عالی شد؛ یعنی هرگاه ولتاژ اولیهٔ خازن سمت چپی دو برابر ولتاژ اولیه خازن سمت راستی باشد، در خروجی $V_0(t)$ عبارت e^{-3t} ظاهر نمی‌شود و فقط شامل e^{-t} است. (خیلی جالب استها[1]!)

و درنهایت برای قسمت آخر:

$$I(s)=K(s+3)$$

$$i_s(t)=k\delta'(t)+3k\delta(t)$$

و همان‌طور که انتظار می‌رفت، از جنس توابع ضربه شد.

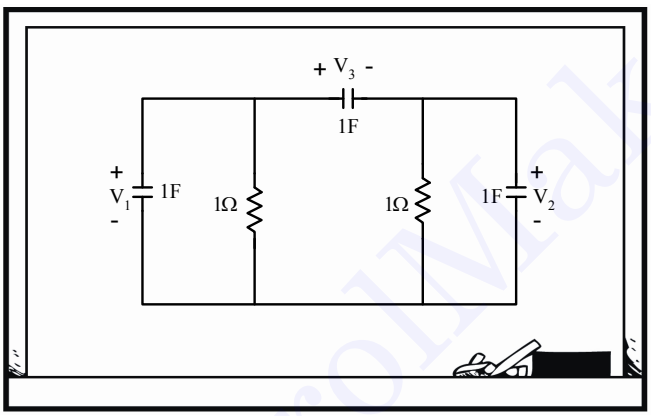
۱ـ سال‌ها در درس کنترل می‌خواندید که می‌توان یک قطب را به وسیلهٔ یک صفر حذف کرد، اما مفهوم فیزیکی آن را خوب درک نمی‌کردید؛ یکی از خوبی‌های این مثال آخر این است که به صورت فیزیکی، مفهوم حذف قطب با اضافه کردن صفر را درک می‌کنید.

حالا یک مسئله برای ممارست بیشتر:

۴ـ الف) مرتبهٔ مدار را به دست آورید.

ب) فرکانس‌های طبیعی متغیرهای V_1 و V_3 را بیابید.

ج) شرایط اولیه را طوری تعیین کنید تا فقط فرکانس $-\frac{1}{3}$ ظاهر شود.



شکل (۶.۱۰) مدار تمرین ۴

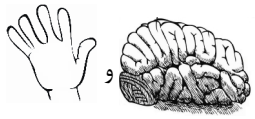
برای مرتبهٔ مدار، تعداد فرکانس‌های طبیعی شبکه لازم است. مثلاً با روش منظم ماتریس ادمیتانس گره داریم:

$$Y_n = \begin{pmatrix} 2s+1 & -S \\ -S & 2s+1 \end{pmatrix}$$

$$4s^2 + 4s + 1 - s^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{1,2} = -1, -\frac{1}{3}$$

جالب شد! مدار سه تا خازن دارد، ولی مرتبهٔ دوم شد.

دوستان، در این مورد به زودی با هم بحث خیلی ساده‌ای خواهیم داشت که در آن برای یافتن مرتبهٔ مدار، دیگر نیازی به



و برای تحلیل و محاسبات نیست، بلکه تنها یک تیزبین لازم است!

www.ControlMakers.ir

ادامه می‌دهم:

$$\text{KCL}\quad \begin{cases} V_1' + V_1 + V_3' = 0 \\ V_2' + V_2 - V_3' = 0 \end{cases}$$

با تفاضل این دو معادله و توجه به:

$$V_3 = V_1 - V_2$$

چنین داریم:

$$3V_3' + V_3 = 0$$

$$3s+1=0 \quad \rightarrow \quad s=-\frac{1}{3}$$

چقدر جالب‌تر! پس به خودی خود در متغیر $V_3(t)$، فقط فرکانس $-\frac{1}{3}$ ظاهر می‌شود.

در قسمت (ج) مسئله، از ما خواسته شده که در متغیر V_1 هم فقط $-\frac{1}{3}$ ظاهر شود. با لاپلاس‌گیری از روابط و استفاده از روش آقای کرامر داریم:

$$\begin{cases} (2s+1)V_1 - sV_2 = 2V_{01} - V_{02} \\ -sV_1 + (2s+1)V_2 = -V_{01} + 2V_{02} \end{cases}$$

$$V_1(s) = \frac{(3s+2)V_{01} - V_{02}}{(3s+1)(s+1)}$$

حالا برای حذف $s=-1$ داریم:

$$(3s+2)\,V_{01} - V_{02} = K\,(s+1)$$

$$V_{01} = -V_{02}$$

یعنی اگر ولتاژ اولیه دو خازن چپی و راستی قرینه باشند، به خواسته‌مان می‌رسیم.

۲ـ۱۰ مرتبهٔ مدار یا تعداد فرکانس‌های طبیعی یک شبکه

قبل از شروع این مبحث، یک تست nگزینه‌ای مطرح می‌کنم:

مرتبهٔ مدار برابر کدام‌یک از عبارت‌های زیر است؟

۱) تعداد خازن‌ها و سلف‌های مدار!

۲) تعداد فرکانس‌های غیر صفر و شبکه!

۳) تعداد متغیرهای حالت مدار

www.ControlMakers.ir

۴) تعداد فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه!

۵) تعداد قطب‌های تابع تبدیل یک متغیر شبکه!

من فکر می‌کنم گزینه ۳ درست است.

درست است ولی اگر چنین فرض کنیم، گزینه‌های ۱ و ۲ و ۴ و ۵ هم درست می‌شوند:

= مستقل، = صفر و = حداکثر

حالا برویم سراغ اصل بحث خودمان:

مرتبهٔ مدار برابر است با تعداد عناصر **مستقل** ذخیره‌کنندهٔ انرژی یا به عبارت دیگر مجموع تعداد سلف‌ها و خازن‌های مستقل.

در قدم صفرم[1]، به‌جای هر تعداد سلف یا خازن سری و یا موازی، یک المان (یک سلف یا یک خازن) قرار می‌دهیم (معادل با کل آن‌ها). حال در قدم اول، با اطلاعات پیش‌دبستانی، تعداد سلف‌ها و خازن‌ها را می‌شمریم. در قدم دوم، به ازای هریک از شرایط زیر در مدار، یک واحد از مرتبه مدار کم می‌کنیم:

الف) اگر در مدار، **حلقهٔ خازنی** (و احیاناً همراه منابع ولتاژ) موجود بود.

ب) اگر در مدار، **کات‌ست سلفی** (و احیاناً همراه منابع جریان) موجود بود.

ج) اگر ولتاژ دو سر خازن یا جریان عبوری از سلف از طریقی (مثلاً **یک منبع وابسته**)، به یک یا تعدادی از سایر متغیرهای حالت وابسته بود.

آیا ممکن است، علت بندهای (الف)، (ب) و (ج) را به طور مختصر بگویید؟

حتماً؛ ببینید، هرگونه وابستگی در مدار بینِ متغیرهای حالت، یک واحد از فرکانس‌های طبیعی کم می‌کند.

مثلاً به شکل (۱۰ـ۶) نگاه کنید، آیا موافقید که:

$$V_3 = V_1 - V_2$$

معنی این حرف می‌دانید چیست؟

۱ـ یعنی قبل از هر اقدامی

www.ControlMakers.ir

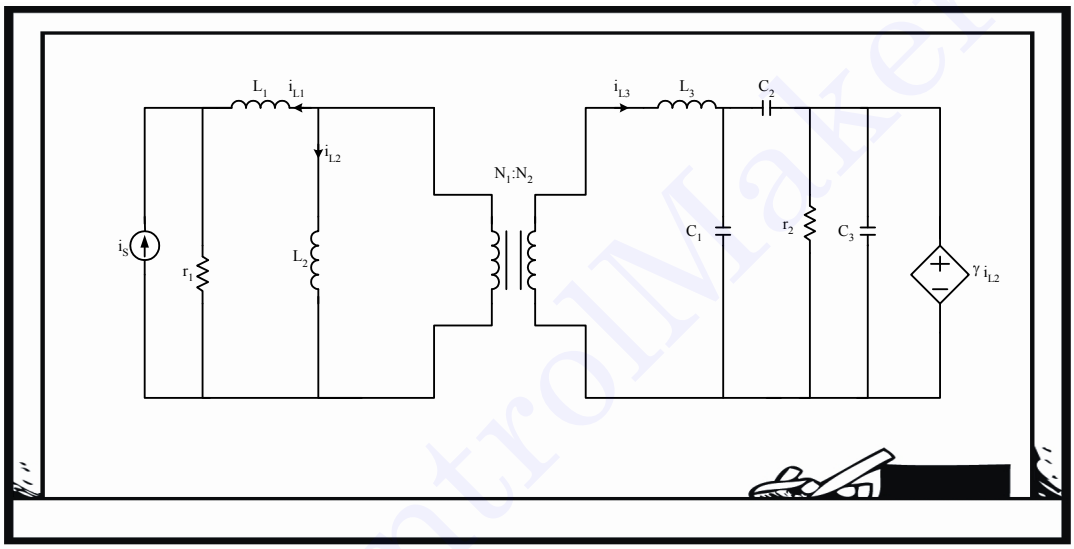
یعنی با داشتن V_1 و V_2، مقدار V_3 دیگر معلوم است؛ یعنی بیچاره خازن C_3 از خودش اختیاری ندارد، یعنی مستقل نیست، یعنی وابسته است. حالا اگر در آن حلقه یک منبع ولتاژ هم اضافه شود، رابطهٔ اخیر مثلاً این‌جوری می‌شود:

$$V_3 = V_1 - V_2 + 5$$

و این حرف‌ها باز هم صادق است.

توضیح بندهای (ب) و (ج) نیز عیناً همین‌گونه است، اما در یک عبارت هوشمندانه می‌توان عبارت‌های (الف) و (ب) و (ج) را در یک جمله خلاصه کرد: «به ازای هرگونه ترکیب خطی بین متغیرهای حالت (V_Cها و I_Lها) و مقادیر معلوم (مثل منابع)، یک واحد از مرتبه مدار کم می‌شود.» فکر کنم تاکنون علتش را خوب فهمیده‌اید که به خاطر وابستگی این متغیرها به یکدیگر است.

۵ـ تعداد متغیرهای حالت را در مدار شکل زیر تعیین کنید.



شکل (۷.۱۰) مدار تمرین ۵

در اینجا قدم صفرم مفهومی ندارد. مجموع تعداد سلف‌ها و خازن‌ها برابر $6 = 3 + 3$ است و در قدم دوم یک کات‌ست سلفی داریم و یک حلقهٔ خازنی و یک وابستگی؛ پس:

کات‌ست سلفی

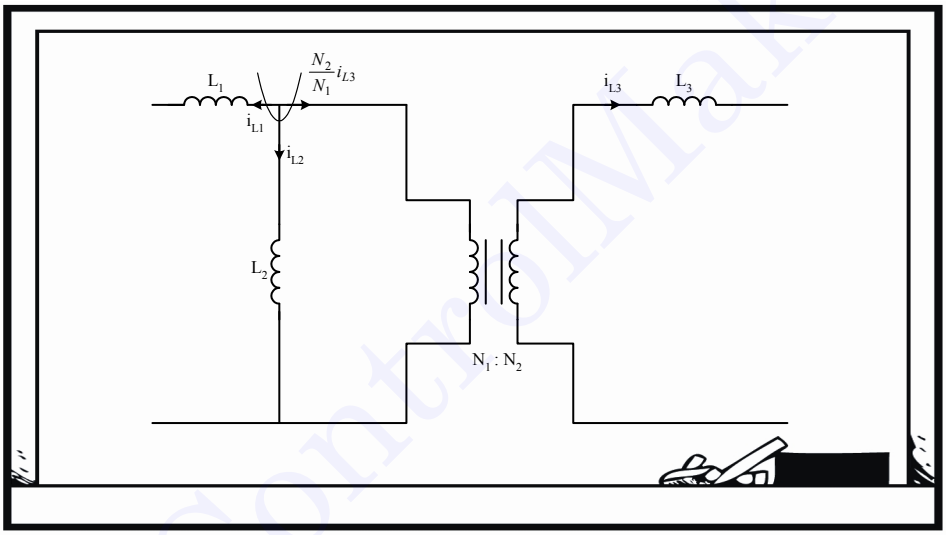
$$\text{مرتبهٔ مدار} = 6 - \underset{\text{حلقه خازنی}}{1} - \overset{\uparrow}{1} - \underset{\text{اثر وابستگی}}{1} = 3$$

مگر منظور از کات‌ست سلفی، کات‌ستی فقط شامل سلف‌ها نیست؟

چرا و منظور از حلقهٔ خازنی، حلقه‌ای شامل فقط خازن‌هاست.

پس اینجا کات‌ست سلفی خالص نداریم که؟

خودم عرض می‌کنم؛ به شکل (۱۰ـ۸) نگاه کنید:



شکل (۸ـ۱۰) توضیح دقیق‌تر کات‌ست سلفی

با یک KCL ساده داریم:

$$i_{L_1} + i_{L_2} + \frac{N_2}{N_1} i_{L_3} = 0$$

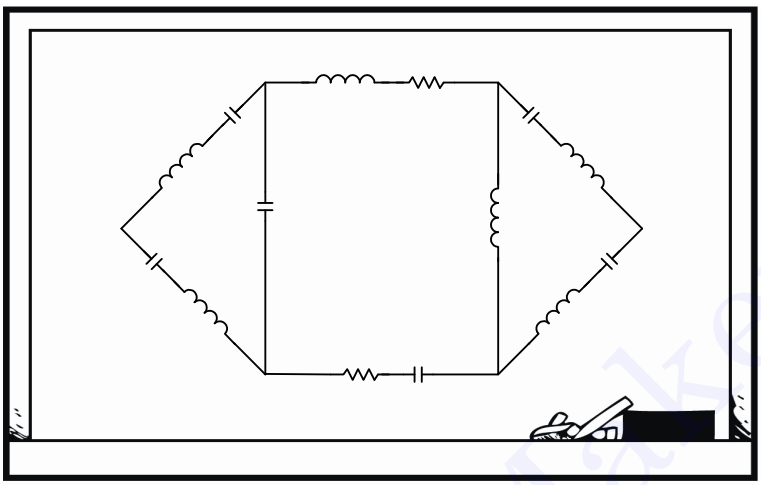
خُب این یعنی وابستگی دیگر؛ مثلاً با معلوم بودن i_{L_1} و i_{L_2}، i_{L_3} دیگر نامش می‌شود جریان بی‌اختیار یا همان وابسته خودمان!
اصلاً استاد اجازه بدهید من یکی از کشفیات اخیرم را بازگو کنم؛ من در اثر حل مسایل متعدد فهمیده‌ام که ترانسفورماتور در مقدار فرکانس‌های طبیعی مؤثر است، اما در تعداد فرکانس‌های طبیعی یا همان مرتبه مدار هیچ نقشی ندارد.

جناب کاشف، اجازه بده من به راحتی کشف شما را اثبات کنم! در فصل هفتم دیدیم که می‌توان اجزای مدار را از ترانسفورماتور انتقال داد. با این انتقال مقدار عناصر عوض می‌شود ولی شکل گراف مدار تغییری نمی‌کند؛ پس مقادیر فرکانس‌های طبیعی تغییر می‌کنند اما تعداد

www.ControlMakers.ir

آن‌ها نه. پس خواهشاً اسم مرا هم در این اکتشافات طلایی!! ثبت کن!

۶ـ در مدار شکل زیر تعداد فرکانس‌های طبیعی غیر صفر مدار چندتاست؟



شکل (۹ـ۱۰) مدار تمرین ۶

قبل از حل این مسئله قدری درباره فرکانس‌های طبیعی صفر حرف بزنیم.

در هر شبکه تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر برابر است با تعداد حلقه‌های سلفی به علاوهٔ تعداد کات‌ست‌های خازنی؛ چراکه هریک از این‌ها یک سیگنال DC ایجاد می‌کنند.)

مثلاً یک حلقه سلفی در نظر بگیرید (حلقه‌ای فقط شامل سلف). یک جریان DC برای هریک از سلف‌ها فرض کنید. حالا با این فرض یک KVL در تان بزنید؛ حاصل چنین است:

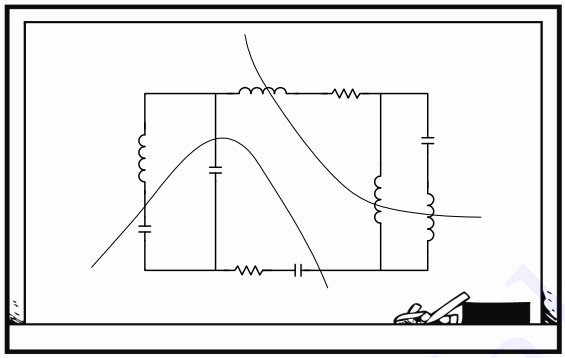
$$0+0+0+0+\cdots=0$$

چراکه وقتی جریان سلف DC (ثابت) باشد، ولتاژش صفر است. حالا می‌پرسم که آیا این KVL صادق است؟ شما هم با لبخندی ملیح می‌گویید معلوم است که صادق است؛ پس فرض جریان DC و به عبارت دیگر «فرکانس صفر» برای حلقهٔ سلفی درست است و به طور مشابه برای کات‌ست خازنی.

پس تعداد فرکانس‌های طبیعی غیر صفر معلوم است دیگر؛ تعداد کل فرکانس‌های طبیعی یا مرتبهٔ مدار منهای تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر.

حالا برویم سراغ حل تمرین ۶ :

قدم صفرم در این مسئله خیلی مهم است؛ در طرفین مدار به‌جای خازن‌های سری و سلف‌های سری یک دانه از هر کدام می‌گذاریم و به شکل (۱۰ـ۱۰) می‌رسیم:

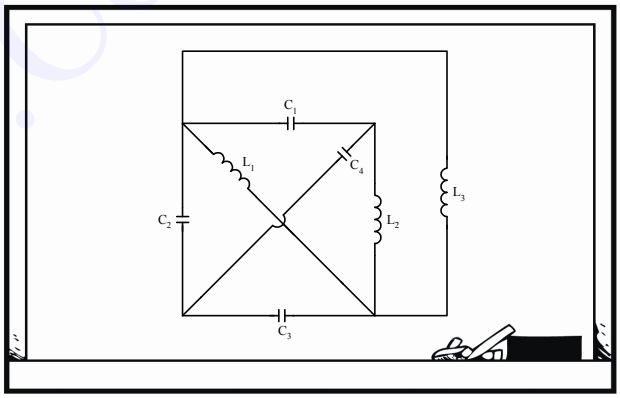


شکل (۱۰ـ۱۰) مدار ساده‌شده در تمرین ۶ و کات‌ست‌ها

پس دیگر مسئله حل است و چنین می‌گوییم:

$$\text{تعداد فرکانس‌های غیرصفر} = \underset{\text{تعداد سلف}}{4} + \underset{\text{تعداد خازن}}{4} - \underset{\text{کات‌ست سلفی}}{1} - \underset{\text{کات‌ست خازنی}}{1} = 6$$

۷ـ کدام عبارت درباره مدار شکل زیر درست است؟



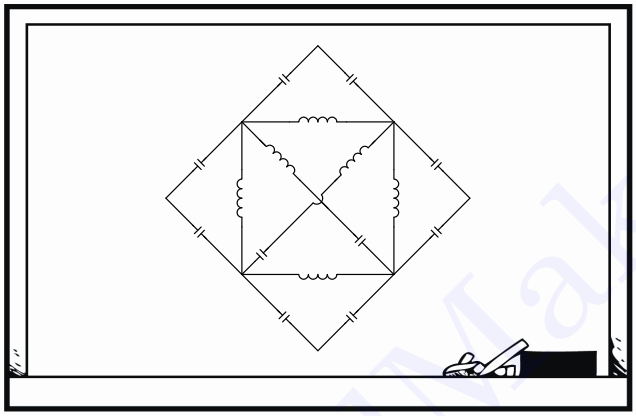
شکل (۱۱ـ۱۰) مدار تمرین ۷

۱) سه فرکانس طبیعی صفر دارد.
۲) یک فرکانس طبیعی صفر دارد.
۳) فرکانس طبیعی صفر ندارد.
۴) هیچ‌کدام

www.ControlMakers.ir

قدم صفرم آن است که به‌جای دو سلف موازی L_1 و L_3، یک سلف بگذاریم. پس L_1 را حذف می‌کنیم و حالا فقط یک کات‌ست خازنی داریم و حلقهٔ سلفی موجود نیست؛ یعنی گزینه ۲ درست است.

۸ـ تعداد فرکانس‌های طبیعی مدار زیر چند تاست؟



شکل (۱۲.۱۰) مدار تمرین ۸

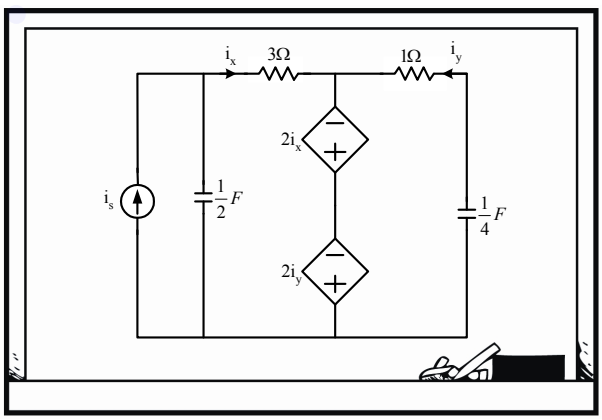
باز قدم صفرم؛ به‌جای هر یک از جفت خازن‌های چهار طرف، یک خازن می‌گذاریم و سپس داریم:

تعداد حلقه‌های خازنی ــ تعداد کات‌ست‌های سلفی ــ جمع خازن‌ها + جمع سلف‌ها = مرتبهٔ مدار

$$\text{مرتبهٔ مدار} = 6 + 6 - 0 - 1 = 11$$

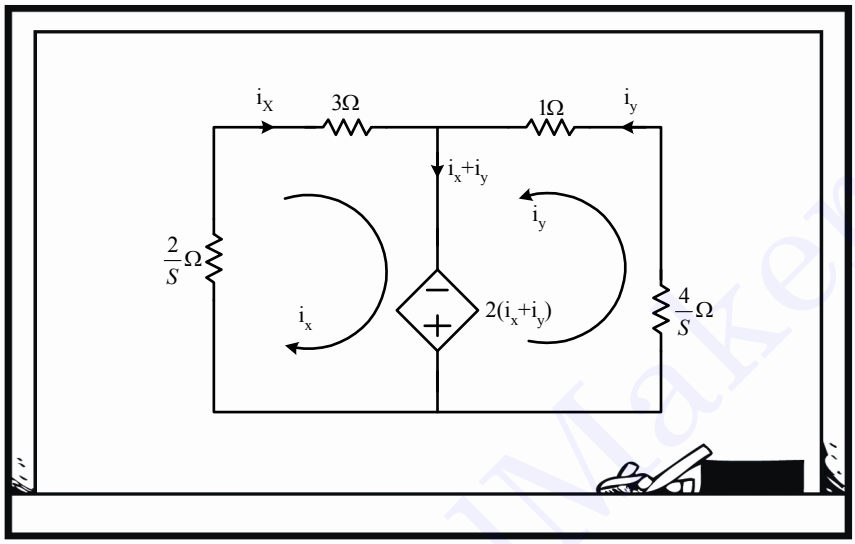
و آن یک حلقهٔ خازنی هم، حلقهٔ بیرونی است.

۹ـ فرکانس‌های طبیعی مدار شکل زیر کدام است؟



شکل (۱۳.۱۰) مدارتمرین ۹

ازآنجاکه استاد گفتند منابع مستقل، تأثیری در فرکانس طبیعی ندارند، برای سادگی آن را حذف می‌کنیم و پس از حذف، شکل مدار این‌گونه می‌شود:



شکل (۱۴.۱۰) مدار ساده‌شده و با عینک لاپلاس تمرین ۹

حالا از روش منظم مش می‌رویم:

$$Z_m I = E_s$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{s}+3-2 & 0-2 \\ 0-2 & \frac{4}{s}+1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_x \\ i_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i_x^{0} + 2i_y^{0} \\ 2i_x^{0} + 2i_y^{0} \end{pmatrix}$$

$$Z_m = \begin{pmatrix} \frac{2}{s}+1 & -2 \\ -2 & \frac{4}{s}-1 \end{pmatrix}$$

و برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی، ریشه‌های دترمینان Z_m را پیدا می‌کنیم:

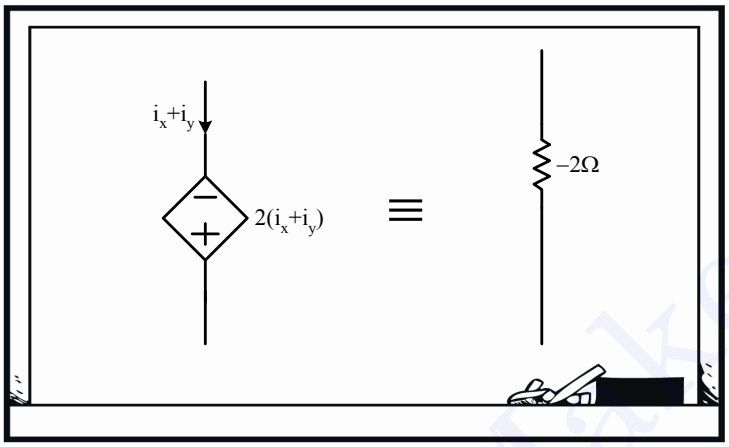
$$\det Z_m = 0$$

$$5s^2 - 2s - 8 = 0$$

$$S_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{5}$$

www.ControlMakers.ir

من عرض مختصری دارم. به وسط شکل (۱۰ـ۱۴) نگاه کنید؛ آیا با حرفِ شکل (۱۰ـ۱۵) موافقید؟



شکل (۱۵ـ۱۰) ساده کردن مدار تمرین ۹

به نظرم ادامه‌اش معلوم است دیگر...

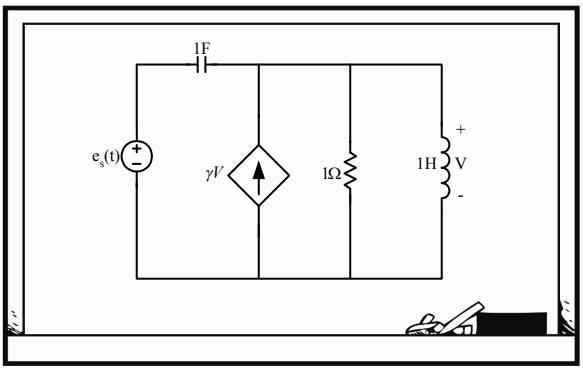
آفرین بر هر دو دوست بزرگوارم! جالب اینکه من می‌خواستم در جلسه بعدی درس یک نکتهٔ جالب به شما بگویم، ولی حالا می‌بینم که خودتان به طور فطری آن را بلدید! ان‌شاءا... همان موقع به آن اشاره خواهم کرد.

آخه استاد این‌جوری که دل توی دلمون نمی‌مونه! حالا که گفتید، تمامش کنید لطفاً، وِالّا تا هفتهٔ آینده فکر و ذکر و دل و... ما مشغول همین قصه می‌شود!

امان از فکر و ذکر و دل و... شما! فقط اشاره می‌کنم؛ وقتی یک مدار دوگره‌ای است، بهترین کار برای شروع تحلیل آن، نوشتن ماتریس ادمیتانس گره است (چراکه 2×2 می‌شود) و زمانی‌که مدار دوحلقه‌ای است، عاقلانه‌ترین کار برای شروع تحلیل، به دست آوردن ماتریس امپدانس حلقه است (چراکه 2×2 می‌شود) و شما خوب‌تر از من می‌دانید که کار کردن با ماتریس 2×2، چقدر لذیذتر و ساده‌تر از کار کردن با ماتریس 3×3 و یا مرتبهٔ بالاتر است! اما اصل داستان بماند برای جلسهٔ بعد.

www.ControlMakers.ir

۱۰ـ در مدار شکل زیر، مقدار γ چقدر باشد تا تمام فرکانس‌های طبیعی مدار، روی محور موهومی قرار بگیرند؟



شکل (۱۷ـ۱۰) مدار تمرین ۱۰

حالا که استاد این نکته را در مورد مدارهای پرکاربرد دوگره‌ای و دو حلقه‌ای فرمودند، من هم یک قصه در مورد مدارهای یک‌گره‌ای و تک‌حلقه‌ای بگویم و آن هم اینکه کلید حل مدارهای یک‌گره‌ای، KCL در آن گره و رمز تحلیل مدارهای یک‌حلقه‌ای، KVL در آن تک‌حلقه است. می‌دانم که در دلتان می‌گویید چه نکتهٔ ساده‌ای؛ بنده هم عرض می‌کنم که خُب فرق من و استاد همین است دیگر!

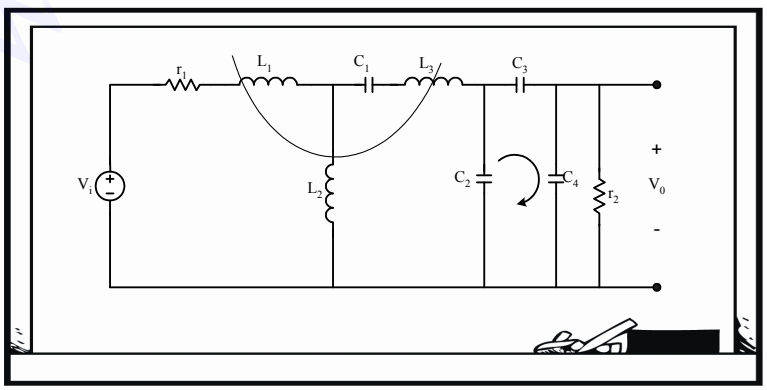
حالا بگذریم و برویم سراغ حل این مسئله تک‌گره‌ای:

در گرهٔ بالایی مدار، KCL می‌زنیم، منبع ولتاژ مستقل را هم صفر می‌کنیم؛ چنین می‌شود:

$$\text{KCL} \;:\; \left(s+\frac{1}{s}+1-\gamma\right)V=0 \;\Rightarrow\; s^2+(1-\gamma)s+1=0$$

$$\text{ریشه‌ها موهومی محض‌اند} \;\Rightarrow\; 1-\gamma=0 \;\Rightarrow\; \gamma=1$$

۱۱ـ تابع تبدیل $H(s)=\dfrac{V_0(s)}{V_i(s)}$ حداکثر چند قطب دارد؟



شکل (۱۸ـ۱۰) مدار تمرین ۱۱

www.ControlMakers.ir

www.ControlMakers.ir

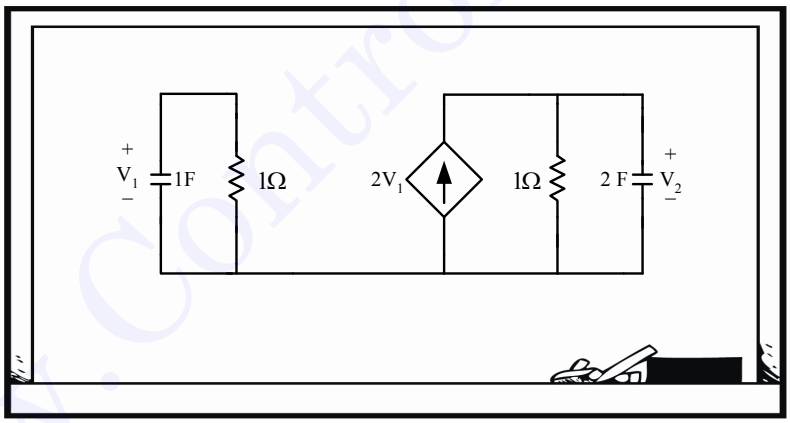
این مسئله کمی دشوار است؛ چراکه باید تعداد قطب‌های یک متغیر شبکه یعنی V_0 را پیدا کنیم، پس از آن شروع کنیم به یافتن تابع تبدیل $\frac{V_0}{V_i}$.

دوست خوبم، یک‌بار دیگر صورت مسئله را خوبِ خوب بخوان[1]. چند لحظه همه صبر می‌کنیم تا خود شما کلید را پیدا کنید...

آهان فهمیدم! کلمه «**حداکثر**» را می‌گویید. حداکثر تعداد قطب‌های هر متغیر شبکه، برابر همان مرتبهٔ مدار است؛ پس ساده شد دیگر:

مرتبهٔ مدار $= 7 - 1 - 1 = 5$

۱۲ـ برای مدار شکل زیر، معادلات فضای حالت را بنویسید.



شکل (۱۸.۱۰) مدار تمرین ۱۲

ببخشید، جسارته ها! ولی موضوع تمرین ۱۲ چه ارتباط خاصی با بحث مشخصه‌های ذاتی دارد؟

۱ـ چقدر خوب خواندنِ صورت مسئله مهم است؛ آدمِ موفق، یک صورت مسئله خوب‌خوان است! نه فقط مسئله‌های مدار، بلکه همهٔ مسئله‌های زندگی!

حالا که جواب ندادید، خودم حل می‌کنم؛ 2 تا KCL چنین می‌دهد:

$$\dot{V}_1 = -V_1$$
$$2\dot{V}_2 = 2V_1 - V_2$$

پس ماتریس ضرایب حالت برابر می‌شود با:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix}$$

۱۳ـ در مدار تمرین قبلی، فرکانس‌های طبیعی کدام‌اند؟

۱) -1 و $\frac{-1}{2}$ ۲) -2 و -1 ۳) -4 و -1 ۴) -3 و -1

تازه ۲ ریال ام اُفتاد! می‌خواستید کاربرد یک نکتهٔ جالب را در حین حل مسئله بفهمیم و آن اینکه «مقادیر ویژه ماتریس A»، همان «فرکانس‌های طبیعی شبکه» هستند. این موضوع را در درس کنترل هم خوانده بودیم. این ماتریس ضرایب حالت A ، چه اطلاعاتی که درون خود ندارد! پس می‌رویم و ریشه‌های دترمینان $SI - A$ را به دست می‌آوریم:

$$\det(SI - A) = 0$$
$$\begin{vmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+0.5 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad s = -0.5 \ , \ -1$$

۱۰ـ۳ نگاه فیلتری به شبکه‌ها

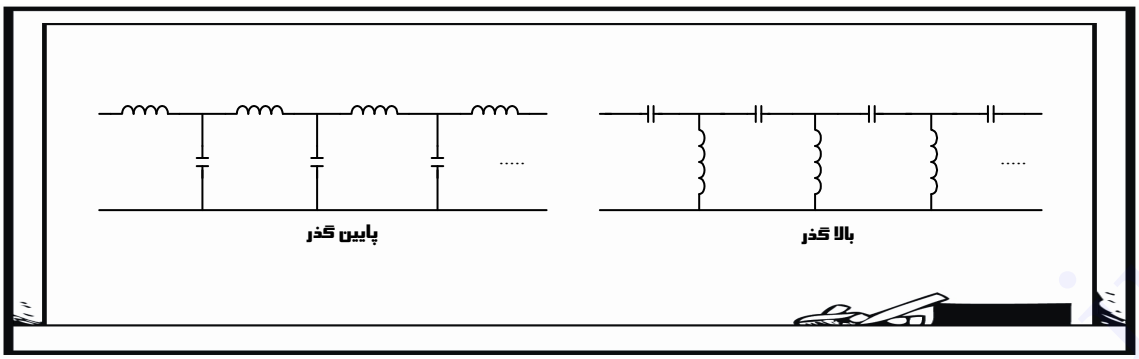
اگر به یک مدار به چشم یک فیلتر نگاه کنیم، چیزهای جالبی عایدمان می‌شود؛ مثل این‌ها:

واضح است که اگر در شاخه‌های سری (یا افقی!) مدار باز (یا O.C.) ایجاد شود و یا در شاخه‌های موازی (یا عمودی!) اتصال کوتاه (یا S.C.) قرار بگیرد، سیگنالی از ورودی به خروجی نمی‌رسد؛ پس در تابع تبدیل یک صفر ایجاد می‌شود. به طور مشابه چنانچه در شاخه‌های سری (یا افقی!) اتصال کوتاه (یا S.C.) ایجاد شود و یا در شاخه‌های موازی (یا عمودی!) مدار باز (یا O.C.) واقع شود، ماکزیمم سیگنال از ورودی به خروجی می‌رسد؛ پس در تابع تبدیل یک قطب ایجاد می‌کند. به این گزاره‌های خبری خوب توجه کنید:

شبکه‌های نردبانی شامل سلف‌های سری و خازن‌های موازی، مانند یک فیلتر پایین‌گذر عمل می‌کنند.

شبکه‌های نردبانی شامل سلف‌های موازی و خازن‌های سری، مانند یک فیلتر بالاگذر عمل می‌کنند.

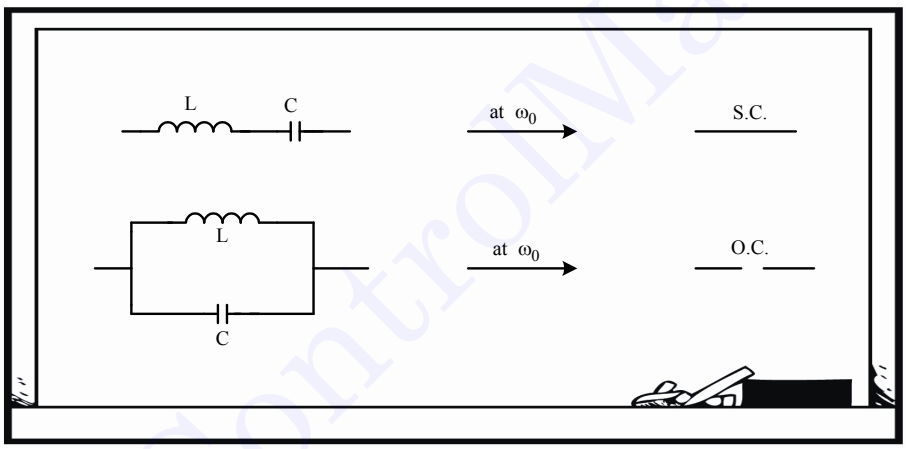
www.ControlMakers.ir



شکل (۱۹ـ۱۰) شبکه‌های نردبانی بالاگذر و پایین‌گذر

باز چند جملهٔ دیگر:

آیا یادتان هست که گفتیم مدارهای تشدید LC سری در فرکانس تشدید، در حکم اتصال کوتاه بوده و مدارهای تشدید LC موازی در فرکانس تشدید، در حکم مدار بازند؟



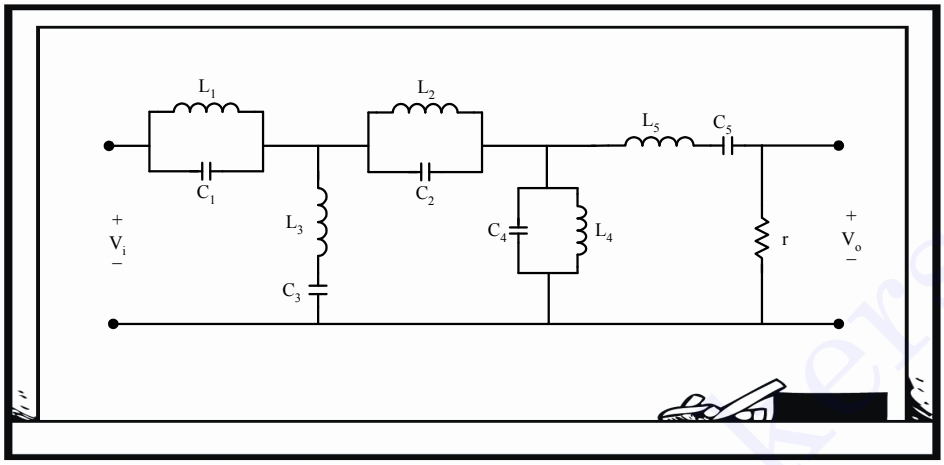
شکل (۲۰ـ۱۰) مدارهای تشدید LC سری و موازی در فرکانس تشدید

حال با توجه به عبارت‌های شکل (۱۰ـ۲۰) دو نکته می‌گوییم:

در توابع شبکه، صفرهای پایان‌دار در اثر مدارهای تشدید سری در شاخه‌های عمودی و یا مدارهای تشدید موازی در شاخه‌های افقی، به وجود می‌آید (در فرکانس تشدید).

در توابع شبکه، قطب‌های پایان‌دار در اثر مدارهای تشدید سری در شاخه‌های افقی و یا مدارهای تشدید موازی در شاخه‌های عمودی، به وجود می‌آید (در فرکانس تشدید).

۱۴ـ در مدار شکل زیر، کدام‌یک از مقادیر، صفرها و قطب‌های تابع تبدیل $\frac{V_0(s)}{V_i(s)}$ می‌تواند باشد؟



شکل (۲ـ۱۰) مدار تمرین ۱۴

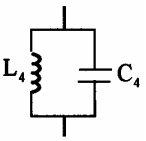
۱) $\frac{1}{\sqrt{L_4 C_4}}$ یک قطب پایان‌دار است.

۲) $\frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$ یک قطب پایان‌دار است.

۳) $\frac{1}{\sqrt{L_3 C_3}}$ یک قطب پایان‌دار است.

۴) $\frac{1}{\sqrt{L_5 C_5}}$ یک صفر پایان‌دار است.

با توجه به آنچه گفته شد، دیگر نیازی به حل نیست؛ واضح است که گزینهٔ (۱) درست است. با توجه به نکتهٔ (۴) یعنی مدار

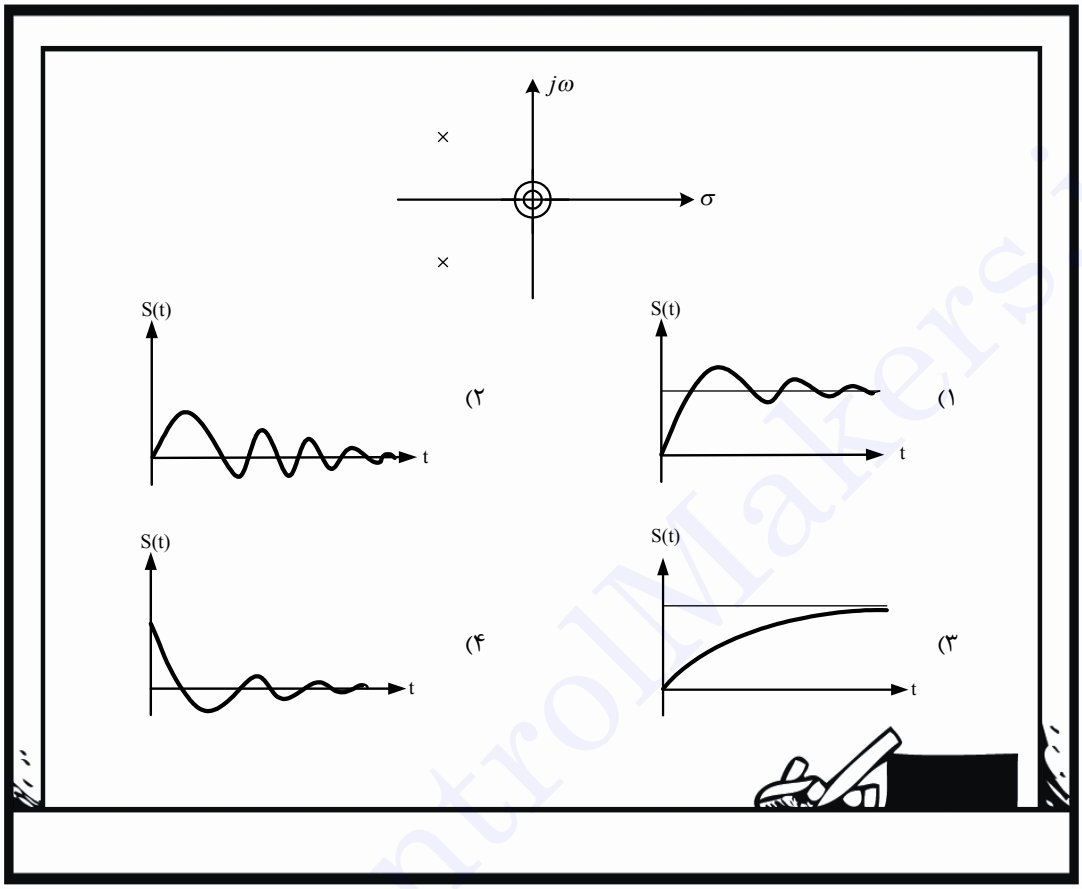


در شاخهٔ عمودی در فرکانس تشدید $\left(\frac{1}{\sqrt{L_4 C_4}}\right)$ قطب پایان‌دار می‌سازد.

قبل از خداحافظی از این بحث، عرض کنم که گاه‌گاهی در درس مدار، سؤال‌های درس کنترل[1] هم می‌آید؛ پس یکی دو تا سؤال از درس کنترل خطی در اینجا می‌آوریم تا به قول بازاری‌ها، جنسمان جور باشد!

۱ـ البته از یک نظر می‌توان به درس مدار، نگاه شبکه‌ای و کنترلی هم داشت؛ برای همین باید اصول کلی درس کنترل خطی را خوب بلد باشید.

۱۵ـ اگر نمودار قطب و صفر شکل زیر مربوط به تابع تبدیل یک سیستم باشد، پاسخ پله شبیه کدام‌یک از گزینه‌هاست؟



شکل (۲۲ـ۱۰) نمودار صفر و قطب تمرین ۱۵

من کنترلم خوبه! پس اجازه بدهید من بگویم؛ با توجه به شکل صفر و قطب‌ها، تابع تبدیل این‌گونه است:

$$H(s)=K\frac{s^2}{(s+\alpha)^2+\omega_d^2}$$

پس پاسخ پله بدین صورت است:

$$S(s)=\frac{1}{s}\times H(s)=K\frac{s}{(s+\alpha)^2+\omega_d^2}$$

حالا با قضیهٔ مقدار اولیه و نهایی در مورد پاسخ پله داریم:

$$\lim_{t\to 0}s(t)=\lim_{s\to\infty}sS(s)=K$$

یعنی $s(t)$ از یک عدد (غیر صفر و غیر بی‌نهایت) شروع می‌شود؛ یعنی گزینه ۴ درست است.

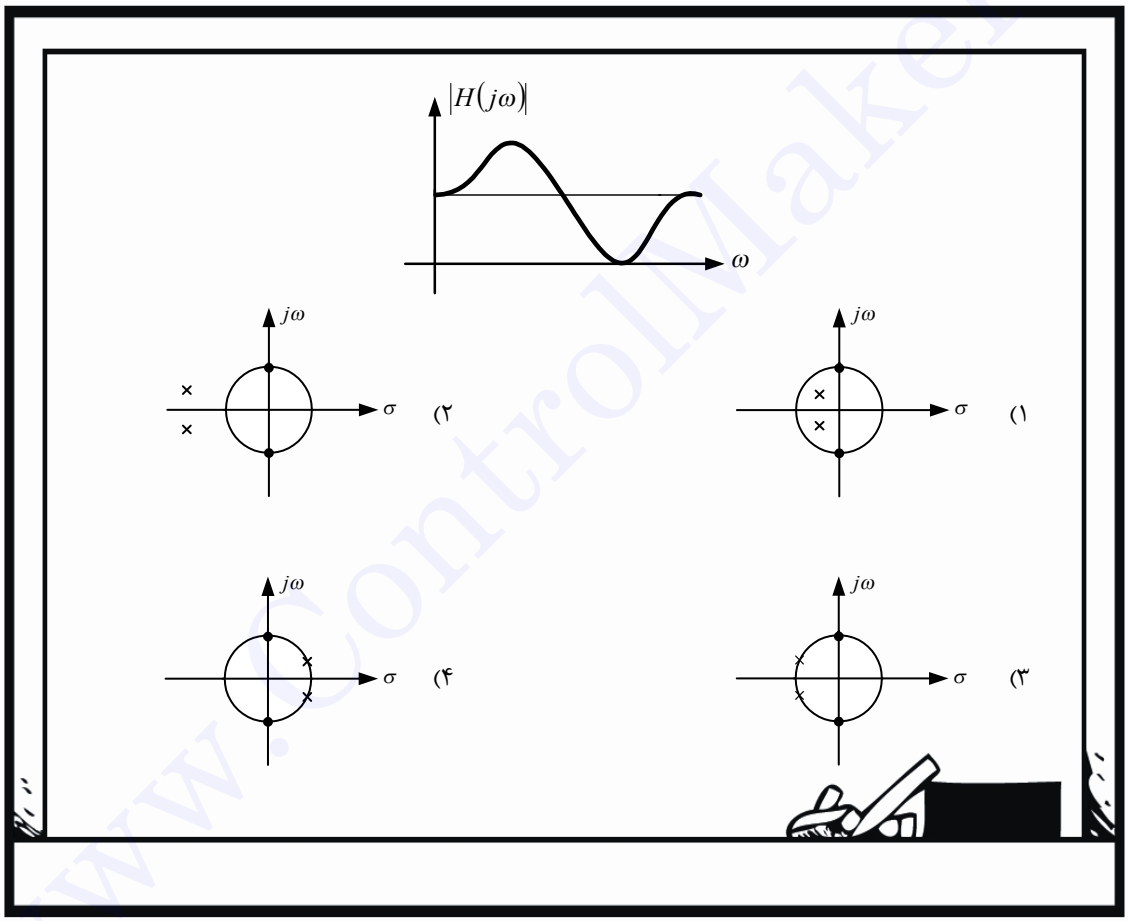
البته در بعضی مسایل ممکن است مقدار نهایی کمک کند:

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{s\to 0} sS(s) = 0$$

یعنی $s(t)$ به صفر ختم می‌شود.

چقدر کامل و قشنگ گفتید! حیف که اینجا کلاس کنترل نیست وِالّا یک عالمه حرف داشتم برای گفتن!

۱۶ـ اگر تابع $|H(j\omega)|$ به صورت شکل زیر باشد، آرایش صفر و قطب تابع تبدیل شبکه به کدام صورت است؟



شکل (۲۳ـ۱۰) منحنی $|H(j\omega)|$ در تمرین ۱۶

www.ControlMakers.ir

باز بنده عرض می‌کنم؛ از روی شکل معلوم است که:

$$H(s)=K\frac{(s^2+a^2)}{(s+\alpha)^2+\omega_d^2}$$

مطابق شکل (۱۰ـ۲۳)، مقدار اولیه و نهایی $|H(j\omega)|$ یکسان است؛ پس:

$$\lim_{\omega\to 0}|H(j\omega)|=\lim_{\omega\to\infty}|H(j\omega)|$$

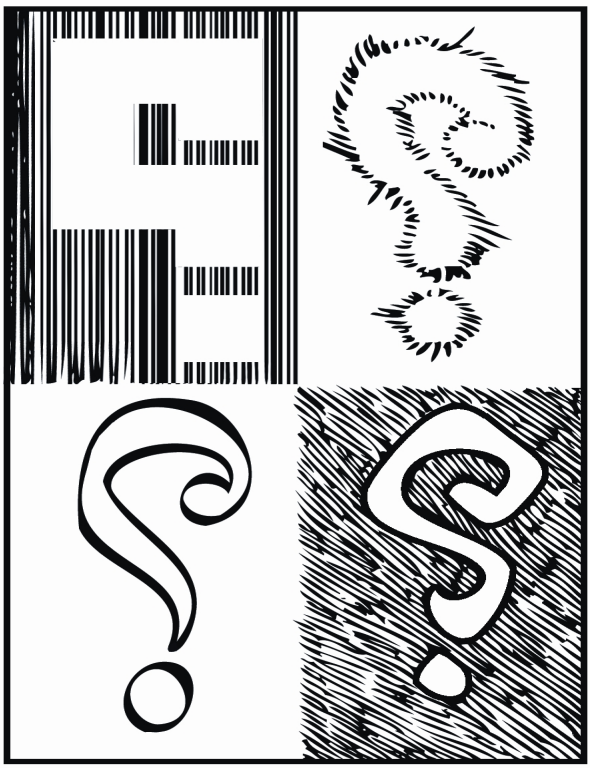
$$\cancel{K}\frac{a^2}{\alpha^2+\omega_d^2}=\cancel{K}\quad\Rightarrow\quad \alpha^2+\omega_d^2=a^2$$

رابطهٔ اخیر معادلهٔ یک دایره است، پس یا گزینه ۳ درست است یا گزینهٔ ۴ که واضح است گزینهٔ ۴ به علت ناپایداری غلط است؛ درنتیجه گزینهٔ ۳ درست است.

به نظرم برای کلاس درس، همین مقدار چاشنی «کنترل» کافی است ولی حتماً تمرینات آخر فصل را به دقت حل کنید؛ آنجا سؤالات قشنگی از ترکیب درس‌های مدار و کنترل خطی مشاهده می‌کنید...

خیلی خوب بود! خسته نباشید؛ برای این جلسه کافی است.

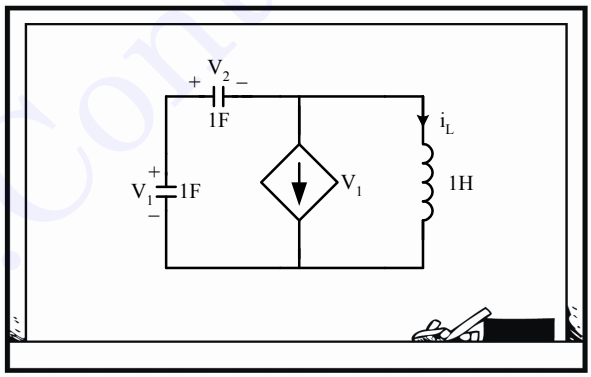
www.ControlMakers.ir



تمرینات فصل دهم

۱ـ در مدار زیر شرایط اولیه $\left(V_1(0), V_2(0), i_L(0)\right)$ را به نحوی تعیین کنید که هیچ متغیر شبکه تحریک نشود؟

(مهندسی برق ۸۲)



۱) $(1,1,-1)$ ۲) $(1,0,-1)$ ۳) $(1,-1,1)$ ۴) $(1,0,0)$

به نظر من، اگر قرار باشد این متغیرها در شبکه تحریک نشوند، باید مقادیر اولیه خود را حفظ کنند و بدون تغییر باقی بمانند؛

چون هرگونه تغییری به معنای تحریک شدن در شبکه است.

www.ControlMakers.ir

استدلال جالبی بود، آفرین! ادامه بدید.

خب اگر قرار است مقدارشان تغییر نکند، مشتقشان صفر می‌شود؛ پس داریم:

$$\frac{di_L}{dt} = 0 = V_L(t) = -V_2 + V_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 = V_2$$

که رابطهٔ بالا تنها در گزینه ۱ صدق می‌کند.

و اگر بخواهیم خیالمان راحت شود، می‌توانیم حل را ادامه بدهیم:

$$\frac{dV_1}{dt} = 0 = i_C(t) \quad \Rightarrow \quad V_1 = -i_L$$

پس گزینه ۱ درست است.

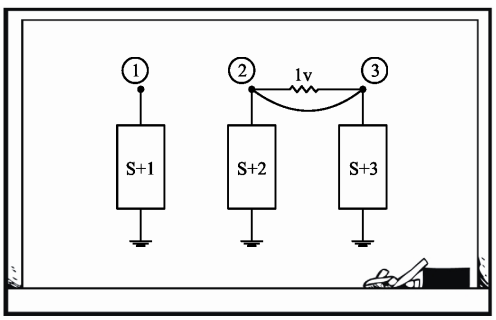
۲ـ ماتریس ادمیتانس یک شبکه LTI به صورت زیر داده شده است. اگر گره‌های 2 , 3 به یکدیگر اتصال کوتاه شوند، فرکانس‌های طبیعی سیستم جدید چقدر خواهند بود؟ (مهندسی برق ۸۲)

$$Y_n = \begin{bmatrix} S+1 & 0 & 0 \\ 0 & S+3 & -1 \\ 0 & -1 & S+4 \end{bmatrix}$$

۱) $-1 , -2.5$ ۲) $\frac{-7+\sqrt{5}}{2} , \frac{-7-\sqrt{5}}{2}$ ۳) $-1 , -3$ ۴) $3 , -2.5$

ماتریس Y به صورت 2×2 درمی‌آید و ادمیتانس‌های موجود در دو گرهٔ اتصال کوتاه‌شده با هم جمع می‌شوند، البته به استثنای ادمیتانس مشترک بین آن دو که اتصال کوتاه می‌شود و از بین می‌رود. پس:

$$Y_n = \begin{bmatrix} S+1 & 0 \\ 0 & 2S+5 \end{bmatrix}$$

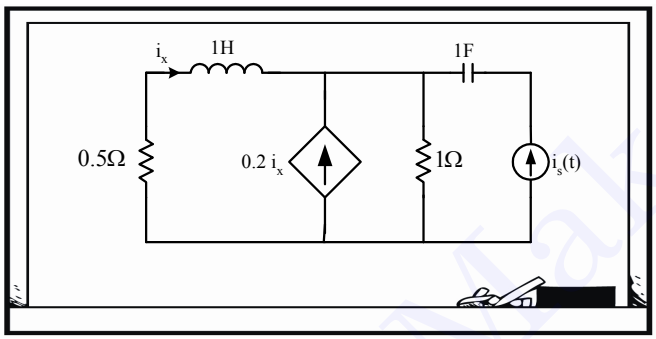


و با محاسبهٔ ریشه‌های دترمینان ماتریس Y جدید، فرکانس‌های طبیعی به دست می‌آید:

$$\Delta(S)=(S+1)(2S+5)=0 \quad \Rightarrow \quad S=-1\,,\ S=-2.5$$

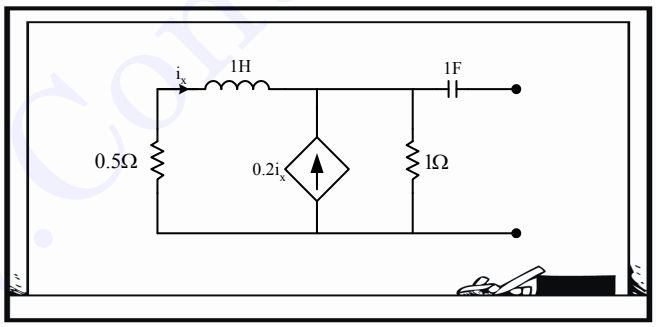
پس گزینه ۱ درست است.

۳ـ فرکانس‌های طبیعی مدار شکل زیر کدام است؟ (مهندسی برق ۸۲)



۱) -0.5 ۲) -1.5 ۳) -1.7 و صفر ۴) $+j\,,-j$

اول باید منابع مستقل را صفر کنیم:



و حالا می‌توانیم برای متغیر i_x یک معادله بنویسیم که یک KVL ساده در حلقه است:

$$(0.5+S)i_x+1.2i_x=(S+1.7)i_x=0$$

و چون ورودی را صفر کرده‌ایم، پرانتزی که در این خروجی ضرب شده است، درواقع مخرج تابع تبدیل یا همان معادلهٔ مشخصه بوده و ریشه‌هایش فرکانس‌های طبیعی این خروجی را می‌دهد.

$$S+1.7=0 \quad \Rightarrow \quad S=-1.7$$

www.ControlMakers.ir

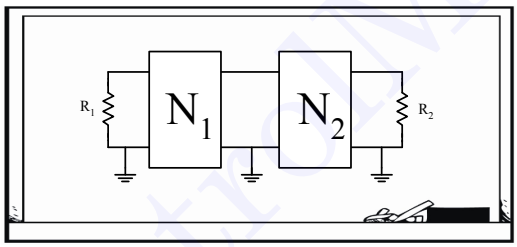
پس گزینه ۳ درست است، ولی چرا فرکانس طبیعی صفر را به دست نیاوردیم؟

فرکانس طبیعی صفر مربوط به ولتاژ خازن است و اگر از روشی که دوستتان سؤال را حل کردند خواستید استفاده کنید، حواستان به فرکانس‌های طبیعی صفر هم که سلف‌ها و خازن‌ها تولید می‌کنند باشد.

$$\frac{V_C(S)}{I_S(S)} = \frac{1}{CS} \quad \Rightarrow \quad S = 0$$

پس گزینه ۳ درست است.

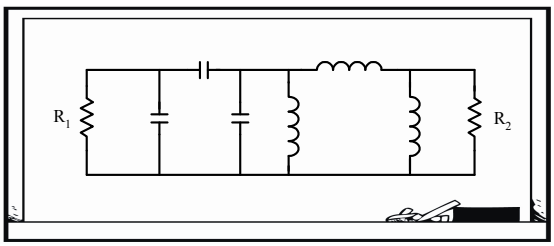
۴ـ در شکل زیر، N_1 منحصراً از خازن‌های مثبت و N_2 منحصراً از سلف‌های مثبت خطی و تغییرناپذیر با زمان تشکیل یافته‌اند. حداکثر تعداد فرکانس‌های طبیعی غیر صفر شبکه چند است؟ (مهندسی برق ۸۰)



۱) 2 ۲) 4 ۳) 6 ۴) 5

چون شبکه‌ها، زمین‌های مشترک دارند، به‌جای دوقطبی‌ها می‌توانیم معادل T یا π آن‌ها را جایگزین کنیم.

پس به صورت زیر می‌شود:



6 عنصر ذخیره‌کننده انرژی وجود دارد و به علت وجود یک حلقه خازنی، باید یکی از این تعداد کم کنیم که مدار درجهٔ 5 می‌شود؛ بنابراین 5 فرکانس طبیعی داریم.

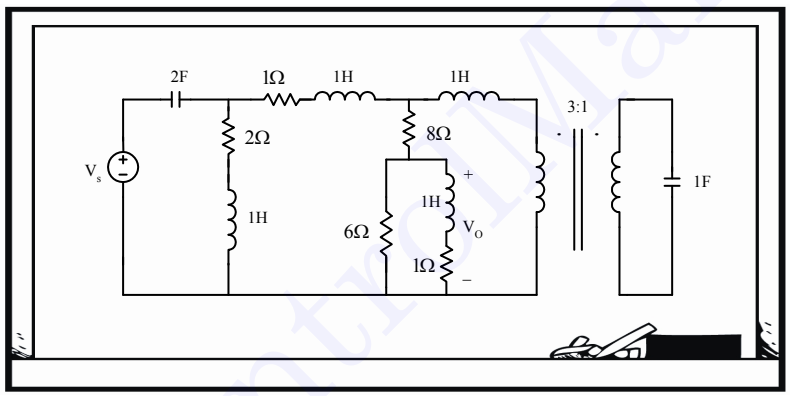
www.ControlMakers.ir

و به علت وجود یک حلقهٔ سلفی، یک فرکانس طبیعی صفر هم وجود دارد؛ پس 4 فرکانس طبیعی غیر صفر داریم.

بله و بسته به اینکه برای هر کدام از شبکه‌ها از چه مدار معادلی استفاده کرده باشید، ممکن است درجه مدار و تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر عوض شود، ولی تعداد فرکانس‌های طبیعی غیر صفر ثابت می‌ماند.

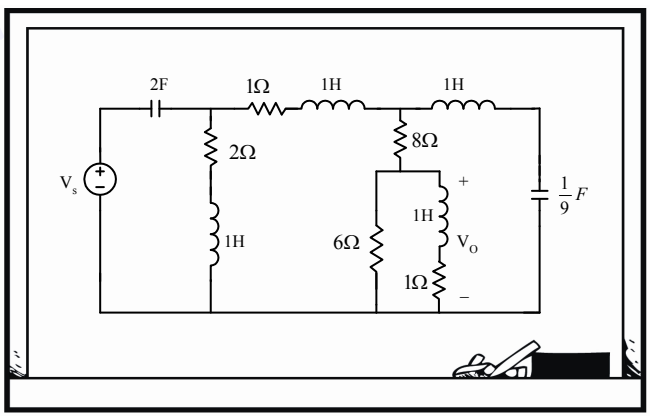
پس گزینه ۲ درست است.

۵ـ صفرهای انتقال تابع شبکه $H(S)=\frac{V_o}{V_s}$ کدام است؟



۱) $0,-1,-7,\pm j$ ۲) $0,-1,-2,\pm j$ ۳) $0,-1,-7,\pm 3j$ ۴) $0,-1,-2,\pm 3j$

اول خازن 1 فاراد را منتقل کنیم:



www.ControlMakers.ir

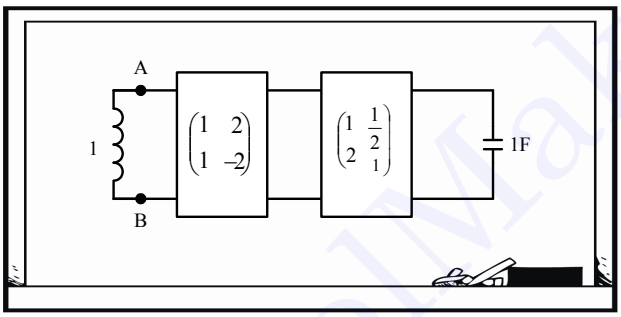
www.ControlMakers.ir

شاخه عمودی سلف 1 H و خازن $\frac{1}{9}F$ سری، یک صفر در $S=\pm j3$ می‌دهد که 3 فرکانس تشدید این LC موجب اتصال کوتاه شدنش است و شاخه سری سلف 1 H و مقاومت 1Ω ، یک صفر در $S=-1$ و شاخه سری سلف 1 H و مقاومت 2Ω ، یک صفر در $S=-2$ و خازن 2F سری با منبع هم یک صفر در $S=0$ تشکیل می‌دهند؛ پس صفرهای انتقال عبارت‌اند از:

$$S=0,-1,-2,\pm j3$$

پس گزینه ۴ درست است.

۶ـ در مدار شکل زیر، دوقطبی‌ها با پارامترهای انتقال توصیف شده‌اند. فرکانس‌های طبیعی کل شبکه کدام است؟ (مهندسی برق ۸۰)



۱) $-1,2$ ۲) $-\frac{5}{3},2$ ۳) $1,-2$ ۴) $\frac{5}{3},-2$

دوقطبی‌ها به دنبال یکدیگر بسته شده‌اند؛ پس برای تابع انتقال کل داریم:

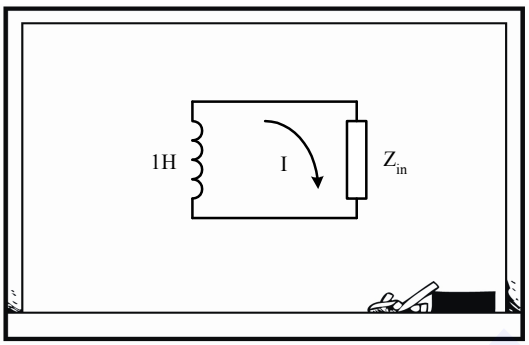
$$T=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & \frac{5}{2}\\ -3 & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

و می‌دانیم اگر $T=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ باشد، آن‌گاه $Z_{in}=\frac{AZ_L+B}{CZ_L+D}$؛ پس اگر خازن 1F را Z_L در نظر بگیریم:

$$Z_{in}=\frac{\frac{5}{S}+\frac{5}{2}}{-\frac{3}{S}-\frac{3}{2}}=\frac{5S+10}{-3S-6}$$

www.ControlMakers.ir

آفرین! پس مدار به صورت زیر درمی‌آید:



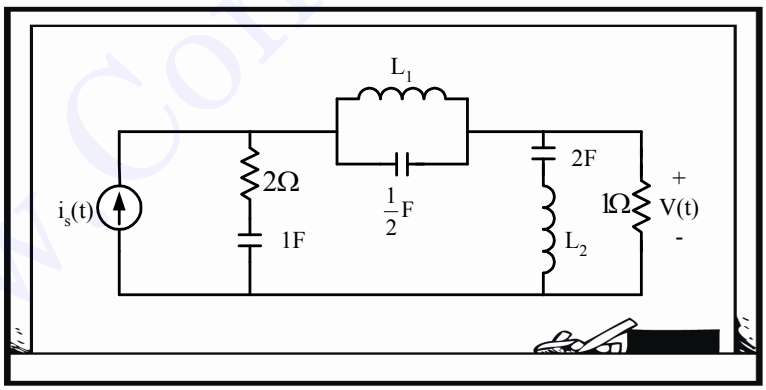
$$KVL: SI + Z_{in} I = 0 \quad \Rightarrow \quad S + Z_{in} = 0$$

$$\Rightarrow \quad S + \frac{5S+10}{-3S-6} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-3S^2 - S + 10}{-3S-6} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -3S^2 - S + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad S = -2 \, , + \frac{5}{3}$$

یعنی گزینه ۴ درست است.

۷ـ در مدار شکل زیر، L_1 و L_2 را چنان انتخاب کنید که برای ورودی $i_s(t) = 2\sin t + 3\cos 2t$، ولتاژ خروجی $V(t)$، جمله سینوسی با فرکانس 1 یا 2 نداشته باشد. (مهندسی برق ۷۹)



۱) $L_1 = \frac{1}{2} \, , L_2 = \frac{1}{4}$ ۲) $L_1 = \frac{1}{2} \, , L_2 = \frac{1}{2}$ ۳) $L_1 = \frac{1}{4} \, , L_2 = \frac{1}{2}$ ۴) $L_1 = \frac{1}{4} \, , L_2 = \frac{1}{4}$

برای اینکه فرکانس‌های مورد نظر که فرکانس ورودی مدار هم هستند، در خروجی نباشند، این فرکانس‌ها باید صفرهای تابع

www.ControlMakers.ir

انتقال این خروجی باشند. صفرهای این خروجی یکی فرکانس تشدید شاخه LC موازی است که آن را مدار باز می‌کند و دیگری فرکانس تشدید شاخه LC سری است که آن را اتصال کوتاه می‌کند؛ پس:

$$1=\frac{1}{\sqrt{L_1\frac{1}{2}}} \quad \Rightarrow \quad L_1=2$$

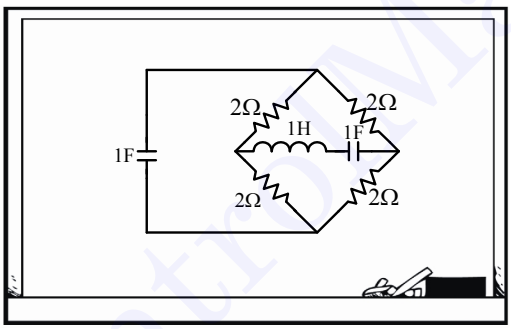
که در گزینه‌ها وجود ندارد، پس:

$$2=\frac{1}{\sqrt{L_1\frac{1}{2}}} \quad \Rightarrow \quad L_1=\frac{1}{2}$$

$$1=\frac{1}{\sqrt{2L_2}} \quad \Rightarrow \quad L_2=\frac{1}{2}$$

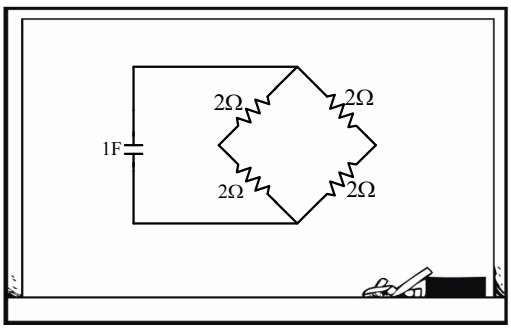
پس گزینه ۲ درست است.

۸ـ فرکانس‌های طبیعی مدار زیر کدام است؟ (مهندسی برق ۷۹)



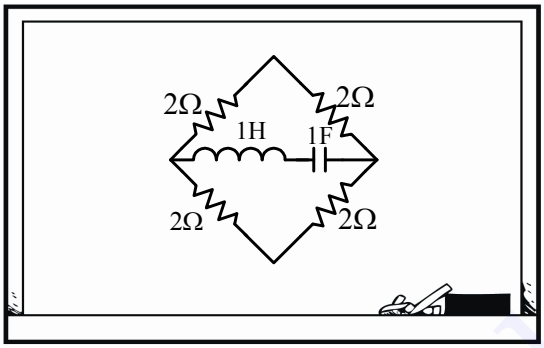
۱) $-1\ ,-1$ ۲) $-\frac{1}{2}\ ,-\frac{1}{2}$ ۳) $-2\ ,-1\ ,-1$ ۴) $-\frac{1}{2}\ ,-1\ ,-1$

پل وتستون است؛ پس می‌توانیم برای جریان خازن، شاخهٔ وسطی را که LC سری است، حذف کنیم:



$$\left(\frac{1}{S}+R\right)I=0 \quad \Rightarrow \quad S=-\frac{1}{R}=-\frac{1}{2}$$

و بار دیگر خازن 1F را حذف کنیم:

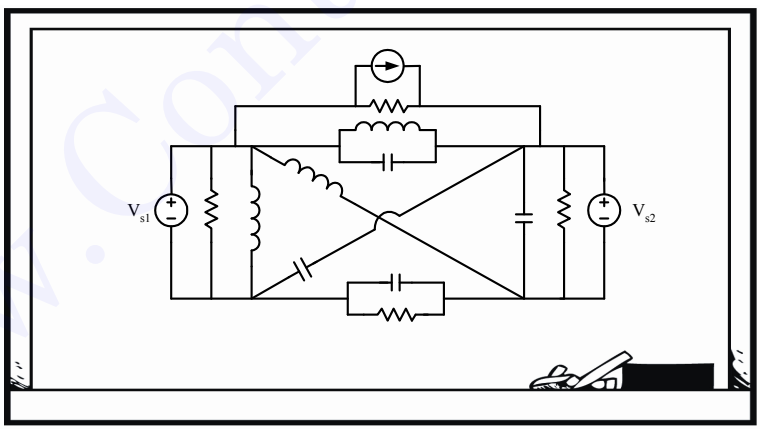


$$2\alpha=\frac{R}{L}=\frac{2}{1}=2 \qquad \omega_0^2=\frac{1}{LC}=\frac{1}{1}=1 \quad \Rightarrow \quad S^2+2\alpha S+\omega_0^2=0 \quad S^2+2S+1=0 \quad S=-1,-1$$

پس گزینه ۴ درست است.

۹ـ فرکانس‌های طبیعی غیر صفر شبکه خطی تغییرناپذیر با زمان شکل زیر کدام‌اند؟ (تمامی مقادیر عناصر برابر واحدند)

(مهندسی برق ۷۷)



۱) $-\frac{1}{3}\left(1\pm j\sqrt{5}\right)$

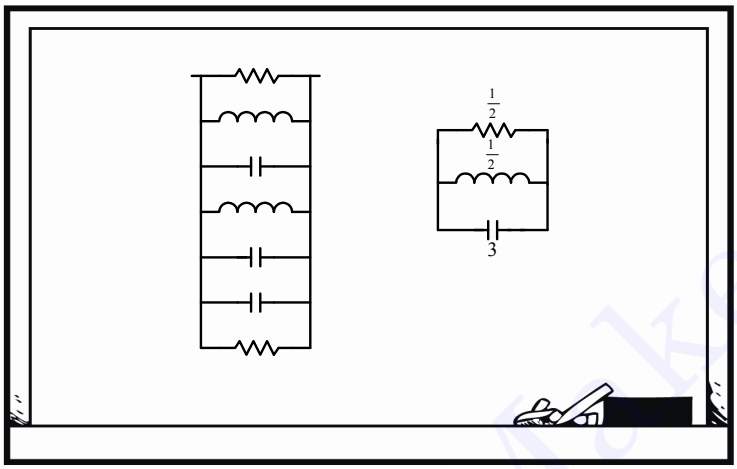
۲) $\left(-1\pm j\sqrt{5}\right)\ ,\ \pm j$

۳) $\left(-1\pm j\sqrt{5}\right)\ ,\ -1$

۴) $-\frac{1}{3}\left(1\pm j\sqrt{5}\right)\ ,\ \pm j\ ,\ -1$

www.ControlMakers.ir

چون فرکانس‌های طبیعی غیر صفر شبکه خواسته شده است، می‌توانیم با خیال راحت منابع را صفر کنیم:



و برای مدار RLC موازی داریم:

$$2\alpha=\frac{1}{RC}=\frac{2}{3}$$
$$\omega_0^2=\frac{1}{LC}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad S^2+2\alpha S+\omega_0^2=0$$
$$S^2+\frac{2}{3}S+\frac{2}{3}=0$$
$$S=-\frac{1}{3}\left(1\pm j\sqrt{5}\right)$$

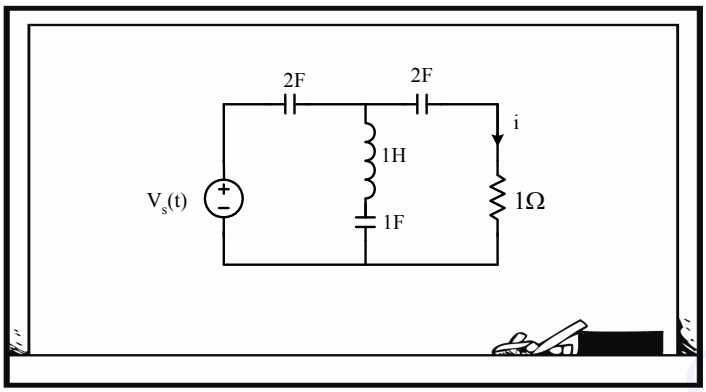
که همان فرکانس‌های طبیعی مدار است.

البته نیازی نبود مقدار فرکانس‌ها را به دست بیاوریم؛ چون RLC موازی، یک مدار درجه دوم است و تنها گزینه ۱ است که دو فرکانس طبیعی را نشان می‌دهد.

پس گزینه ۱ درست است.

www.ControlMakers.ir

۱۰ـ در تابع شبکه $H(S)=\frac{I(S)}{V_s(S)}$ مدار شکل زیر، تعداد قطب‌های تابع شبکه ..... (مهندسی برق ۷۶)



۱) 3 است که یکی از آن ها صفر است.
۲) 4 است و هیچ‌کدام از آن‌ها صفر نیست.
۳) 3 است و هیچ‌کدام از آن‌ها صفر نیست.
۴) 4 است که یکی از آن‌ها صفر است.

مدار، 4 سلف و خازن مستقل دارد و به دلیل وجود کات‌ست خازنی، یکی از آن‌ها صفر است.

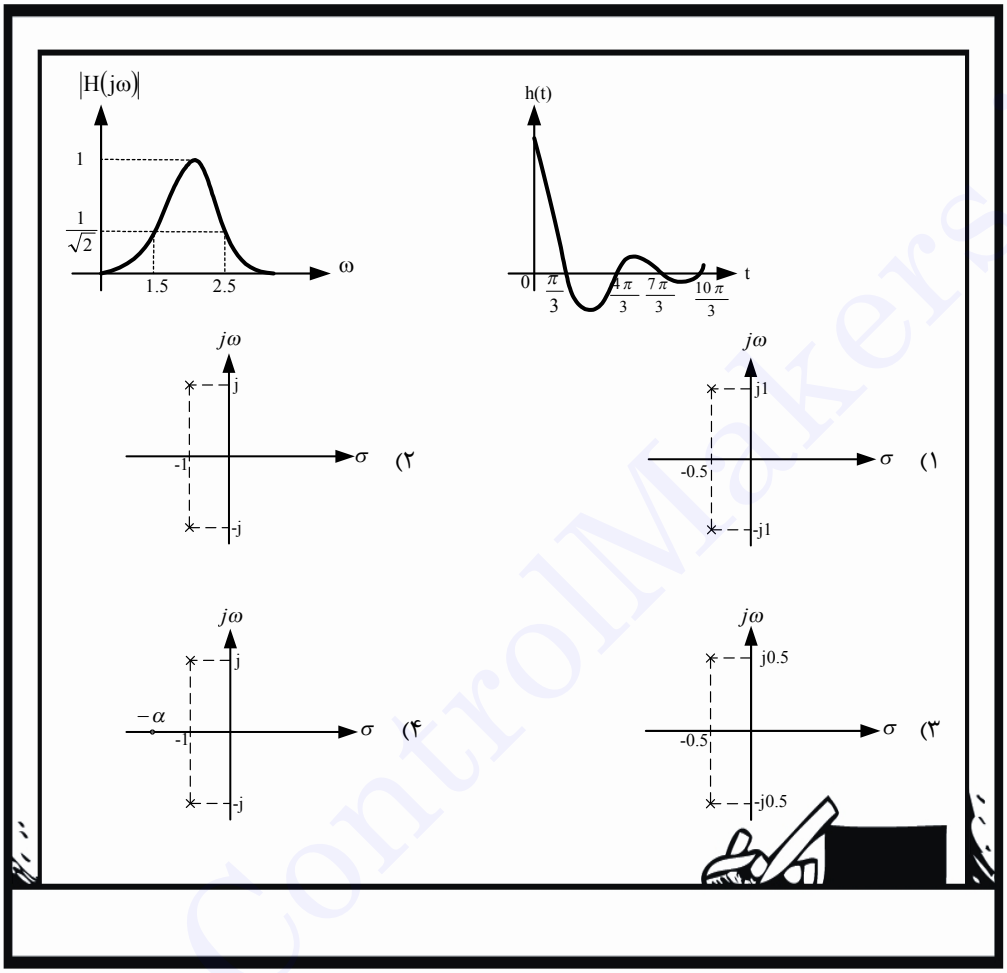
ولی در فرکانس 0 ، خازن‌ها مدار باز هستند و I برابر صفر می‌شود؛ پس این فرکانس، صفرِ این متغیر است نه قطب آن. ازاین رو درنهایت 3 فرکانس داریم که هیچ‌کدام از آن‌ها صفر نیست.

پس گزینه ۳ درست است.

www.ControlMakers.ir

www.ControlMakers.ir

۱۱ـ منحنی اندازه تابع شبکه و پاسخ ضربه یک مدار، در شکل زیر نشان داده شده است. نمایش صفرها و قطب‌های تابع شبکه این مدار کدام است؟



پاسخ ضربه به صورت نوسانی میراشونده است، بنابراین قطب‌های تابع شبکه به صورت $S=-\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$ هستند که $\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$، فرکانس پاسخ ضربه است. بخش حقیقی منفی سبب میرایی و بخش موهومی نوسان را در پاسخ به وجود می‌آورند.

پس چون دوره تناوب ضربه 2π است، داریم:

$$\omega_d=\frac{2\pi}{T}=1$$

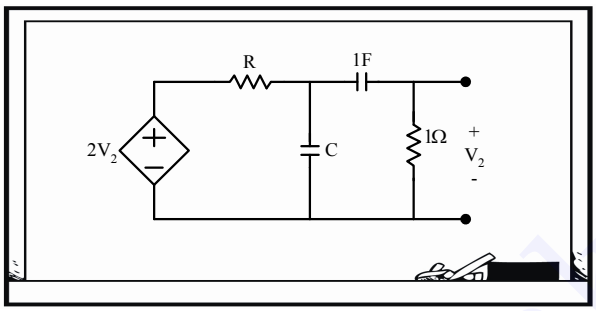
یعنی فاصله ریشه‌ها تا محور حقیقی برابر 1 است.

α هم از پهنای باند 3dB به دست می‌آید:

$$\text{پهنای باند } 3\text{dB} = 2\alpha = 2.5 - 1.5 = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.5$$

پس گزینه ۱ درست است.

۱۲ـ در شبکه زیر، مقادیر R و C چقدر باشد تا شبکه با فرکانس $\omega = 10\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ نوسان کند؟



۱) $\frac{1}{100}\text{F}, \frac{9}{10}\Omega$ ۲) $\frac{1}{100}\text{F}, \frac{99}{100}\Omega$ ۳) $\frac{1}{99}\text{F}, \frac{9}{10}\Omega$ ۴) $\frac{1}{99}\text{F}, \frac{99}{100}\Omega$

یکی از ماتریس‌ها و سپس دترمینانش را به دست می‌آوریم و برابر صفر قرار می‌دهیم. در معادلات مش با I_1 , I_2 ساعتگرد داریم:

$$\begin{bmatrix} R+\frac{1}{jC\omega} & -\frac{1}{jC\omega} \\ -\frac{1}{jC\omega} & \frac{1}{jC\omega}+\frac{1}{j\omega}+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2V_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و $V_2 = I_2$ پس:

$$\begin{bmatrix} R+\frac{1}{jC\omega} & -\frac{1}{j\omega C}-2 \\ -\frac{1}{jC\omega} & \frac{1}{jC\omega}+\frac{1}{j\omega}+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

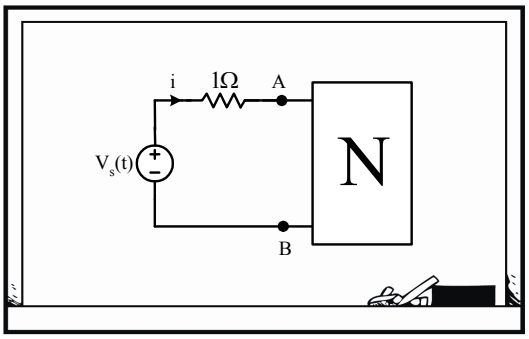
$$\xrightarrow{\omega=10} \Delta = \left(R+\frac{1}{j10C}\right)\left(\frac{1}{j10C}+\frac{1}{j10}+1\right) - \left(\frac{1}{j10C}+2\right)\left(\frac{1}{j10C}\right) = 0 \Rightarrow \Delta = \left[R-\frac{1}{100C}\right] - j\left[\frac{R}{10}+\frac{R}{10C}-\frac{1}{10C}\right] = 0$$

حالا قسمت موهومی و حقیقی را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} R-\frac{1}{100C}=0 \\ R\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10C}\right)-\frac{1}{10C}=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad R=\frac{99}{100}\Omega\,,\; C=\frac{1}{99}\text{F}$$

پس گزینه ۴ درست است.

۱۳ـ شبکه N ، خطی و تغییرناپذیر با زمان است. نتیجه حاصل از آزمایش زیر به صورت $i(t)=\left(2-\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\right)u(t)$ است. در مورد پایداری شبکه N چه می‌توانید بگویید؟



۱) به هر دو صورت اتصال کوتاه و مدار باز پایدار است.

۲) به هر دو صورت اتصال کوتاه و مدار باز ناپایدار است.

۳) به صورت اتصال کوتاه، پایدار و به صورت مدار باز ناپایدار است.

۴) به صورت مدار باز، پایدار و به صورت اتصال کوتاه، ناپایدار است.

Z_{in} مدار را می‌توانیم به دست آوریم:

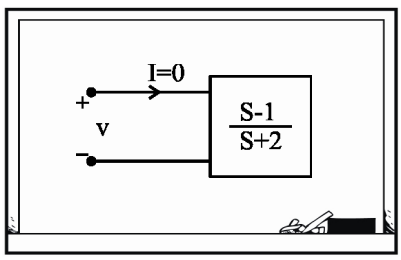
$$Z(S)=\frac{V(S)}{I(S)}=\frac{\frac{1}{S}}{\frac{2}{S}-\frac{3}{2}\frac{1}{S+\frac{1}{2}}}=\frac{2S+1}{S+2}$$

$$\Rightarrow \quad Z_{in}(S)=\frac{2S+1}{S+2}-1=\frac{S-1}{S+2}$$

پس برای مدار باز داریم:

$$I=\frac{V}{Z}=V\frac{S+2}{S-1}=0$$

$$\Rightarrow \quad S+2=0 \quad \Rightarrow \quad S=-2$$



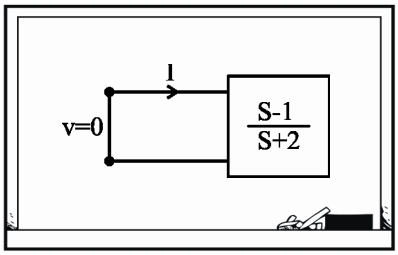
www.ControlMakers.ir

که سمت چپ محور $j\omega$ است و پایدار است.

و برای اتصال کوتاه:

$$V = ZI = \frac{S-1}{S+2} I = 0$$

$$\Rightarrow \quad S-1=0 \quad \Rightarrow \quad S=1$$



که این فرکانس طبیعی سمت راست محور $j\omega$ است و ناپایدار است.

پس گزینه ۴ درست است.

۱۴ـ اگر پاسخ ضربه واحد یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان به صورت زیر باشد:

$$h(t) = \left(2e^{-2t} - e^{-t}\right)u(t)$$

و معادلات حالت این مدار به صورت $\dot{x} = Ax + Bw$ باشد، ماتریس A کدام‌یک از صورت‌های زیر می‌تواند باشد؟ (مهندسی برق ۸۴)

۱) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ ۲) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ ۳) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ ۴) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

از پاسخ ضربه مشخص است که مدار دارای فرکانس‌های طبیعی -1 و -2 است و ریشه‌های $|SI - A| = 0$ فرکانس‌های طبیعی را می‌دهد. گزینه‌های ۱ و۳ که واضح است اشتباه هستند؛ پس گزینه‌های ۲ و۴ را چک کنیم.

من گزینه ۲ را چک می‌کنم:

$$|SI - A| = \begin{vmatrix} S & -1 \\ 2 & S+3 \end{vmatrix} = S^2 + 3S + 2 = 0$$

$$(S+2)(S+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad S = -1, -2$$

پس گزینه ۲ درست است.

www.ControlMakers.ir

۱۵ـ ماتریس امپدانس مش یک مدار LTI متشکل از عناصر RLC و منابع مستقل در حالت دایمی سینوسی به صورت $Z_{in}=\begin{pmatrix}1+j & -1\\ -1 & 2-j\end{pmatrix}$ است. کدام‌یک از ماتریس‌های زیر نمی‌تواند ماتریس ادمیتانس گره این مدار باشد؟ (مهندسی برق ۸۴)

۱) $\begin{pmatrix}2-j & -1\\ -1 & 1+j\end{pmatrix}$ ۲) $\begin{pmatrix}2-j & j\\ j & 1\end{pmatrix}$ ۳) $\begin{pmatrix}1 & -j\\ -j & 1+j\end{pmatrix}$ ۴) $\begin{pmatrix}2-j & -1+j\\ -1+j & 1\end{pmatrix}$

می‌توانیم از روی ماتریس امپدانس مش، شکل مدار را رسم کنیم و از روی آن، ماتریس ادمیتانس گره را بنویسیم.

بله و بسته به اینکه زمین را کجا در نظر می‌گیریم، ماتریس‌های مختلفی به دست می‌آوریم. البته یک راه دیگر هم وجود دارد؛ دترمینان ماتریس امپدانس مش و ماتریس ادمیتانس گره، هر دو معادله مشخصه مدار را می‌دهند؛ پس دترمینان این دو ماتریس باید با هم برابر باشد، بنابراین داریم:

$$|Z_m|=\begin{vmatrix}1+j & -1\\ -1 & 2-j\end{vmatrix}=2+j$$

و تنها دترمینان ماتریس گزینه ۲ برابر این مقدار نیست.

۱۶ـ معادلات حالت یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان به صورت زیر داده شده است. پاسخ ضربه واحد $V_C(t)$ کدام است؟

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}v_C\\ i_L\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_C\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}e(t)$$

$e(t)$ ورودی مدار است و v_C و i_L متغیرهای حالت مدار هستند. (مهندسی برق ۸۶)

۱) $v_C(t)=(k_1+k_2t)e^{-\frac{t}{2}}u(t)$

۲) $v_C(t)=ke^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+\theta\right)u(t)$

۳) $v_C(t)=\left(k_te^{-\frac{t}{2}}+k_2e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t}\right)u(t)$

۴) $v_C(t)=kt\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+\theta\right)u(t)$

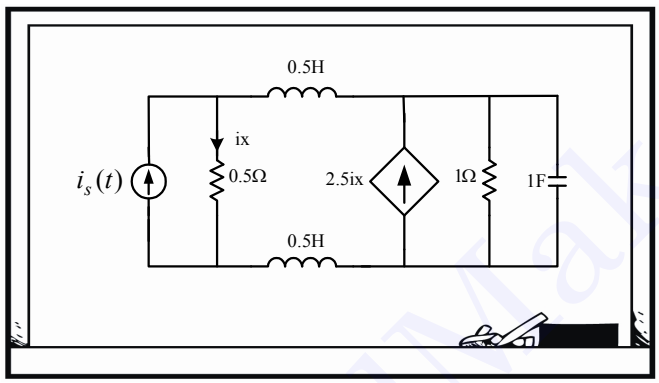
از فرمول $|SI-A|=0$ معادله مشخصه سیستم را به دست می‌آوریم:

$$|SI-A|=\begin{vmatrix}S & -1\\ 1 & S+1\end{vmatrix}=S^2+S+1=0 \quad\Rightarrow\quad S=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

www.ControlMakers.ir

بخش حقیقی فرکانس طبیعی، پاسخ نمایی $e^{-\frac{1}{2}t}$ و بخش موهومی، پاسخ سینوسی با فرکانس $\frac{\sqrt{3}}{2}$ می‌دهد که این نوع پاسخ در گزینهٔ ۲ دیده می‌شود.

۱۷ـ فرکانس‌های طبیعی مدار زیر کدام است؟ (مهندسی برق ۸۳)



۱) $-0.5, 2$ ۲) $0.5, -2$ ۳) $-0.75+j, -0.75-j$ ۴) $-1.5+2j, -1.5-j2$

منبع مستقل را صفر می‌کنیم و برای i_X یک معادله می‌نویسیم:

$$KVL: (0.5+0.5)SI_x + 0.5I_x = \frac{\frac{1}{S}}{1+\frac{1}{S}}1.5I_x \Rightarrow \left(S+0.5-\frac{1.5}{S+1}\right)I_x = 0$$

و این پرانتز فرکانس‌های طبیعی مربوط به I_x را می‌دهد:

$$S^2+1.5S-1=0 \Rightarrow S=\frac{-1.5\pm\sqrt{(1.5)^2+4}}{2}=\frac{-1.5\pm2.5}{2}=-2\ ,\ 0.5$$

پس گزینه ۲ درست است.

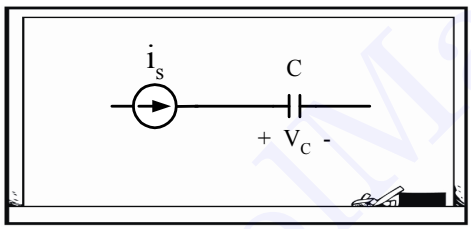
۱۸ـ فرکانس‌های طبیعی کل یک مدار عبارت است از فرکانس‌های طبیعی: (مهندسی برق ۸۴)

۱) جریان‌های مستقل مدار
۲) ولتاژهای مستقل مدار
۳) ولتاژها و جریان‌های مستقل مدار
۴) موارد ۱ و ۲ درست است.

من که قاطی کردم. اولاً مگر فرق می‌کند متغیری که در نظر می‌گیریم ولتاژ باشد یا جریان؟ ثانیاً گزینه ۳ و ۴ که یکسان‌اند.

جواب اولاً را نمی‌دانم، ولی سؤال دومی که پرسیدید به دستور زبان فارسی مربوط می‌شود، نه مدار الکتریکی! گزینه ۳ می‌گوید که ولتاژها و جریان‌های مستقل هر دو برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی مدار باید در نظر گرفته شوند، ولی گزینه ۴ می‌گوید که گزینه ۱ و ۲ هر دو درست‌اند؛ یعنی می‌توانیم فقط جریان‌های مستقل یا فقط ولتاژهای مستقل را در نظر بگیریم. به هر حال من هم با اولاً شما موافقم و به نظرم جریان و ولتاژ تفاوتی ندارند؛ بنابراین گزینه‌های ۱ و ۲ درست نیستند. حالا دو گزینه دیگر باقی می‌ماند.

حق دارید، انتخاب مشکل است. این سؤال به یکی از موارد استثنا در فرکانس‌های طبیعی اشاره دارد که البته قبلاً در حین درس هم به آن اشاره کرده بودم. حالا به این مثال ساده نگاه کنید:

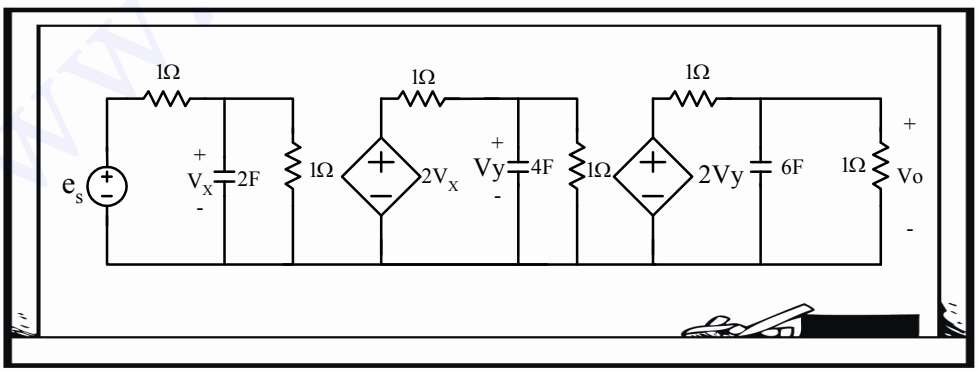


$$\frac{V_C}{I_S}=\frac{1}{CS}$$

V_C دارای فرکانس طبیعی صفر است، ولی I_C این فرکانس را نداشت؛ بنابراین برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی صفر و درنتیجه کل فرکانس‌های طبیعی مدار، باید جریان‌ها و ولتاژهای مستقل مدار هر دو در نظر گرفته شوند.

پس گزینه ۳ درست است.

۱۹ـ فرکانس‌های طبیعی مدار شکل زیر کدام است؟ (مهندسی برق ۸۷ و۸۵)



۱) $-3,-2,-1$ ۲) $-\frac{1}{3},-\frac{1}{2},-1$ ۳) $-3,-\frac{1}{2},-1$ ۴) -1 مکرر مرت

چون منبع ولتاژ داریم، خیلی راحت با سه تا KCL در سه مدار می‌توانیم به سه فرکانس طبیعی برسیم:

$$V_x(2+2S)=E_S \Rightarrow \frac{V_x}{E_x}=\frac{1}{2(S+1)} \Rightarrow S=-1$$

$$V_y(2+4S)=2V_x \Rightarrow \frac{V_y}{V_x}=\frac{1}{(1+2S)} \Rightarrow S=-\frac{1}{2}$$

$$V_o(2+6S)=2V_y \Rightarrow \frac{V_o}{V_y}=\frac{1}{(1+3S)} \Rightarrow S=-\frac{1}{3}$$

پس گزینه ۲ درست است.

۲۰ـ معادلات حالت دایمی سینوسی یک مدار به صورت زیر است (ω فرکانس منبع)، (I_1 فازور i_1 و I_2 فازور i_2):

$$\begin{cases}\left(j\omega-j\frac{2}{\omega}\right)I_1+\left(1-j\frac{1}{\omega}\right)I_2=0\\ \left(-j\omega+j\frac{2}{\omega}\right)I_1+\left(1+j\omega-j\frac{3}{\omega}\right)I_2=1\end{cases}$$

این مدار: (مهندسی برق ۸۶)

۱) $\omega=\sqrt{2}$ حالت دایمی سینوسی دارد.

۲) با $\omega\neq\sqrt{2}$ حالت دایمی سینوسی با فرکانس ω دارد.

۳) با $\omega\neq\sqrt{2}$ حالت دایمی سینوسی با فرکانس‌های $\sqrt{2}$ و ω دارد.

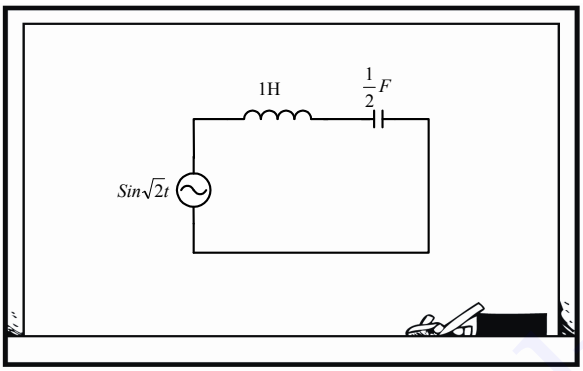
۴) به ازای هر ω حالت دایمی سینوسی دارد.

ضریب ماتریس I را می‌توانیم ماتریس Z در نظر بگیریم و $|Z|=0$ فرکانس‌های طبیعی سیستم را می‌دهد و $\omega=\sqrt{2}$ که در گزینه‌ها ذکر شده، در این معادله صدق می‌کند.

www.ControlMakers.ir

www.ControlMakers.ir

سؤال مفهومی و قشنگی است. بیایید در یک مدار ساده شرایط مشابهی را برقرار کنیم، مثلاً:



فرکانس طبیعی مدار $\omega = \sqrt{2}$ و فرکانس ورودی مدار هم $\omega = \sqrt{2}$ است. حالا ببینیم چه اتفاقی می‌افتد؟

$$V_L(S) = \frac{S}{S+\frac{2}{S}} \times \frac{\sqrt{2}}{S^2+2} = \frac{S^2\sqrt{2}}{\left(S^2+2\right)^2}$$

فهمیدم، عکس لاپلاس تابع با مخرج $\left(S^2+2\right)^2$ باعث می‌شود در حوزه زمان $t\cos\sqrt{2}\,t$ داشته باشیم که ناپایدار است.

پس گزینه ۲ درست خواهد بود.

نشد دیگه، همین معادله‌ای که استاد نوشتند را نگاه کنید؛ اگر فرکانس ورودی غیر از $\sqrt{2}$ (مثلاً 2) باشد، در مخرج $V_L(S)$، $\left(S^2+2\right)$ و $\left(S^2+4\right)$ هر دو دیده می‌شوند؛ یعنی فرکانس طبیعی مدار و فرکانس ورودی، که باید مخالف آن باشد، هر دو در خروجی دیده می‌شوند.

پس گزینه ۳ درست است.

www.ControlMakers.ir

۲۱ـ در یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان، تابع تبدیل $H(s)=\frac{V_o}{I_s}$، قطب‌های $s=\pm j2$ را دارد. تمام فرکانس‌های طبیعی مدار به‌جز $\pm j2$ در نیمه چپ صفحه مختلط است. کدام بیان در این مدار درست است؟ (مهندسی برق ۸۵)

۱) مدار به ازای هیچ ورودی، پاسخ حالت دایمی سینوسی ندارد.

۲) مدار به ازای i_s با فرکانس‌های $\omega=2$، پاسخ حالت دایمی سینوسی دارد.

۳) مدار به ازای $i_s=\cos t$ به شرط $H(\pm j)=0$، پاسخ حالت دایمی سینوسی با فرکانس $\omega=2$ دارد.

۴) مدار به ازای $i_s=\cos t$ به شرط $H(\pm j)=0$، پاسخ حالت دایمی سینوسی با فرکانس $\omega=1$ دارد.

مدار دارای فرکانس تشدید $\omega=2$ است؛ بنابراین اگر فرکانس ورودی مدار هم 2 باشد، پاسخ حالت دایمی سینوسی وجود نخواهد داشت و پاسخ ناپایدار خواهد شد. پس گزینه ۲ نادرست است، ولی مدار با باقی فرکانس‌ها مشکلی ندارد؛ بنابراین گزینه ۱ هم نادرست است.

موافقم، برویم سراغ گزینه ۳. خب فرکانس ورودی مدار برابر یک است و این فرکانس صفر تابع تبدیل هم بوده است؛ پس مطمئناً در خروجی ظاهر نمی‌شود و فقط $\omega=2$ که فرکانس طبیعی مدار است در خروجی وجود خواهد داشت و گزینه ۳ کاملاً درست است.

گزینه ۴ هم مزاح کرده است! از یک طرف می‌گوید $\omega=1$ «صفر تابع تبدیل» است و از طرف دیگر می‌گوید $\omega=1$ در پاسخ وجود دارد.

۲۲ـ در مداری از مرتبه 6 (یعنی با شش فرکانس طبیعی) توابع انتقال $H_1(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$ و $H_2(s)=\frac{s^2}{(s+1)^2(s+3)}$ و پاسخ ورودی صفر $v=Ae^{-\frac{1}{2}t}$ معلوم است. کدام دسته از اعداد زیر فرکانس‌های طبیعی معلوم مدار را نشان می‌دهند؟ (مهندسی برق ۸۶)

۱) $-1,-1,-1,-3,-2,-\frac{1}{2}$ ۲) $-1,-1,-3,-2,-\frac{1}{2}$ ۳) $-1,-3,-2,-\frac{1}{2}$ ۴) موارد ۱ یا ۲

www.ControlMakers.ir

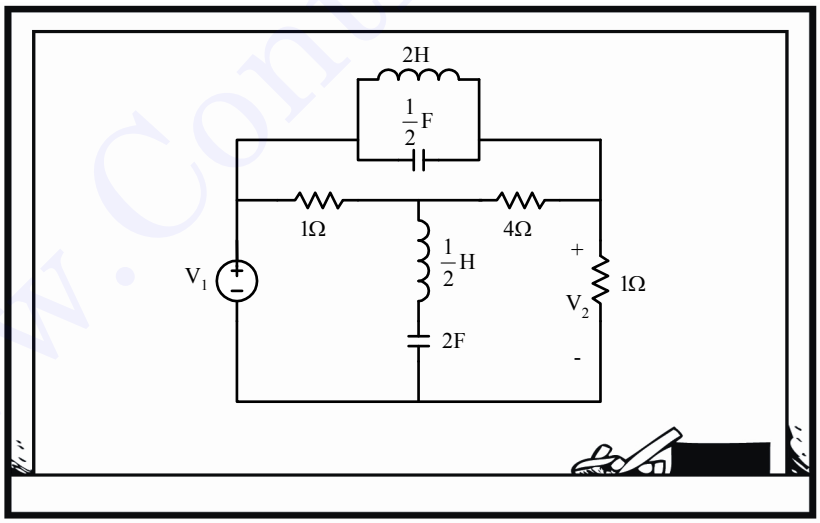
سؤال سختی نباید باشد. از قطب‌های توابع انتقال و فرم خروجی می‌توانیم فرکانس‌های طبیعی را به دست آوریم:

$$\left.\begin{array}{lll} H_1(s) & \rightarrow & s=-1,-2 \\ H_2(s) & \rightarrow & s=-1,-1,-3 \\ V(t) & \rightarrow & s=-\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow s=-1,-1,-1,-2,-3,-\frac{1}{2}$$

پس گزینه ۱ درست است.

به یک مطلب که صورت سؤال هم به آن اشاره کرده بود، دقت نکردید؛ فرکانس‌های طبیعی «معلوم» مدار کدام‌اند؟ یعنی مطمئن باشیم که جزء فرکانس‌های طبیعی است ولی شما از کجا مطمئن‌اید که $s=-1$ که در $H_1(s)$ وجود دارد، جدا از $s=-1,-1$ است که در $H_2(s)$ وجود دارد، شاید قطب موجود در $H_1(s)$ یکی از دو قطب مضاعف $H_2(s)$ باشد؛ پس با اطمینان گزینه ۲ را انتخاب می‌کنیم و فرکانس ششم این مدار مرتبه 6 معلوم نیست.

۲۳ـ در مدار شکل زیر تابع تبدیل ورودی ـ خروجی $H(s)=\frac{V_2}{V_1}$ کدام است؟ (مهندسی برق ۸۷)



۱) $2\frac{s^2+1}{(s+1)^2}$ ۲) $\frac{s^2+1}{(s+2)^2}$ ۳) $\frac{s^2+1}{s^2+s+1}$ ۴) $\frac{s^2+1}{(s+1)^2}$

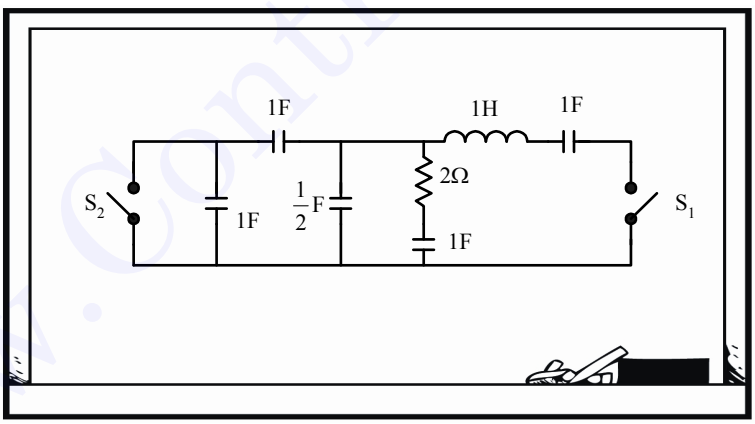
به ازای $s=0$ که سلف‌ها اتصال کوتاه و خازن‌ها مدار بازند، $V_1=V_2$ است و درنتیجه گزینه ۳ یا ۴ درست است که هر دو به ازای $s\to\infty$ برابر 1 هستند.

صورتشان هم یکی است، مگر مخرج را به دست آوریم. برای به دست آوردن معادله مشخصه که مخرج تابع تبدیل می‌شود، ورودی V_1 را می‌توانیم صفر کنیم و گره پایین را زمین بگیریم؛ در این صورت دو گره باقی می‌ماند که می‌توانیم ماتریس گره را بنویسیم و از مساوی صفر قرار دادن دترمینانش معادله مشخصه به دست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{\frac{1}{2}s+\frac{1}{2s}} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}+1+\frac{1}{2s}+\frac{1}{2}s \end{vmatrix}=0$$

اگر ریشه مخرج گزینه ۴ را که $s=-1$ است در ماتریس قرار دهیم، به‌راحتی مشخص است که دترمینانش صفر می‌شود؛ پس گزینه ۴ درست است.

۲۴ـ در مدار شکل زیر دو حالت باز بودن کلیدها و بسته بودن کلیدها را در نظر بگیرید. کدام ادعا درست است؟ (مهندسی برق ۸۷)



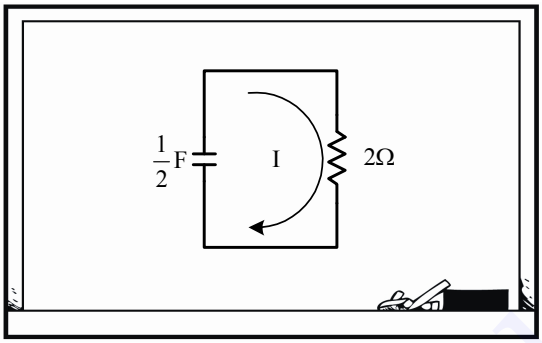
۱) تعداد فرکانس‌های طبیعی در هر دو حالت 5 است.

۲) تنها فرکانس طبیعی غیر صفر در یک حالت برابر -1 است.

۳) تعداد فرکانس‌های طبیعی غیر صفر در یک حالت برابر تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر در حالت دیگر است.

۴) موارد ۲ و ۳ درست است.

وقتی کلیدها بازند، بعد از سری و موازی کردن خازن‌ها داریم:

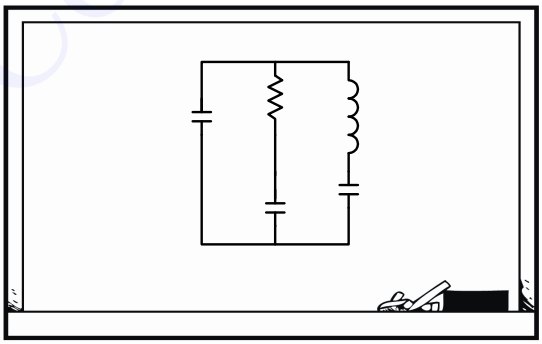


پس گزینه ۱ غلط است. اینجا یک فرکانس طبیعی داریم که آن هم غیر صفر است.

حالا این فرکانس را به دست بیاوریم، شاید -1 شد و گزینه ۲ درست بود.

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{2}s}+2\right)I=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{s}+2=0 \quad \Rightarrow \quad s=-1$$

پس گزینه ۲ که درست است، برای بررسی گزینه ۳ هم باید تعداد فرکانس‌های صفر در حالت بسته بودن کلیدها را به دست آوریم که پس از ساده کردن، یک کات‌ست خازنی داریم؛ پس یک فرکانس طبیعی صفر وجود دارد و گزینه ۳ هم درست است.



بنابراین گزینه ۴ درست خواهد بود.

www.ControlMakers.ir

فصل ۱۱

دوقطبی‌ها

مقدمه

در دنیای مدارهای الکتریکی به هر دو سر (دو سیم) که به یک شبکه متصل شده‌اند، یک قطب می‌گوییم. به هر قطب یک ولتاژ و یک جریان می‌توان نسبت داد؛ بنابراین عناصر معروف یک‌قطبی‌ها مثل مقاومت و سلف و خازن و منابع مستقل، فقط یک ولتاژ (V) دارند و یک جریان (I)؛ درنتیجه برای معرفی آن‌ها فقط یک عدد کافی است؛ مثلاً امپدانس، گویای نسبت $\frac{V}{I}$ است و یا ادمیتانس گویای نسبت $\frac{I}{V}$ بوده و یا مشخصهٔ ولتاژ ـ جریان معرف دقیق یک «تک‌قطبی» است. اما در کلاس امروز به بررسی شبکه‌هایی می‌پردازیم که هر یک دو قطب دارند؛ پس دو ولتاژ (V_1, V_2) داریم و دو جریان (I_1, I_2). بنابراین برای معرفی دوقطبی‌ها نیاز به چهار عدد داریم و برای سه‌قطبی‌ها به 9 کمیت محتاجیم و ترانسفورماتور، سلف‌های تزویج، ژیراتور، خطوط انتقال و... همگی نمونه‌هایی از یک شبکه دوقطبی هستند.

شکل (۱.۱۱) یک دوقطبی با ولتاژ و جریان استاندارد

توصیف دوقطبی‌ها، یکی از مهم‌ترین و متداول‌ترین روش‌های تحلیل مدارها و شبکه‌هاست و موضوع و سرفصل بسیار خوش سؤالی هم هست!

www.ControlMakers.ir

۱۱ـ۱ پارامترهای امپدانس مدار باز Z

رابطهٔ اساسی به این صورت است:

$$V = Z \times I \qquad (۱\text{ـ}۱۱)$$

در اینجا روابط عین قبل است، منتها به صورت ماتریسی. فرم ماتریسی رابطهٔ (۱۱ـ۱) برای یک دوقطبی این‌گونه است:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \qquad (۲\text{ـ}۱۱)$$

و با بسط آن:

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases} \qquad (۳\text{ـ}۱۱)$$

و درنتیجه تعریف تک‌تک پارامترها این‌گونه می‌شود:

امپدانس ورودی سر اول، وقتی سر دوم مدار باز است:

$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2 = 0} \qquad (۴\text{ـ}۱۱)$$

↓ سر دوم مدار باز است.

امپدانس ورودی سر دوم، وقتی سر اول مدار باز است:

$$Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1 = 0} \qquad (۵\text{ـ}۱۱)$$

↓ سر اول مدار باز است.

امپدانس انتقالی معکوس:

$$Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1 = 0} \qquad (۶\text{ـ}۱۱)$$

امپدانس انتقالی مستقیم:

$$Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2 = 0} \qquad (۷\text{ـ}۱۱)$$

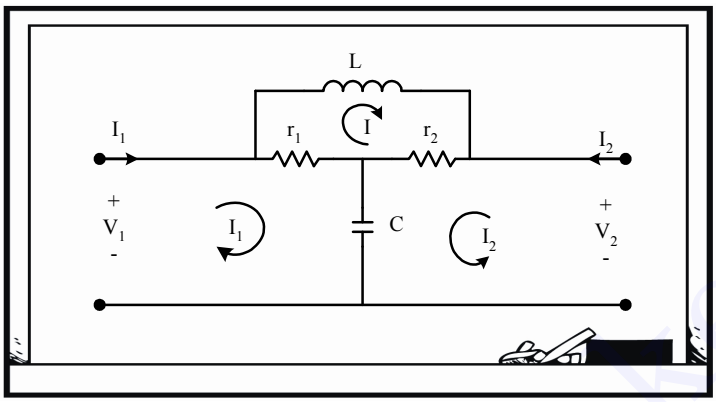
یک نکته ساده‌کننده و جالب:

حال اگر در سرهای ۱ و ۲ منابع V_{S_1} و V_{S_2} بگذاریم و روابط ذهنی ماتریسی حلقه $(V = Z \cdot I)$ را به دست آوریم، در **مدارهای دوحلقه‌ای**، پارامترهای امپدانس مدار باز دوقطبی برابر با همان ماتریس امپدانس حلقه خواهد بود.[۱]

۱ـ و چقدر این نکته در مدارهای دو حلقه‌ای مهم و کارآمد است. چراکه ماتریس امپدانس حلقه (که در فصل هشتم مطرح شد)، به روش ذهنی بسیار راحت به دست می‌آید و با این قضیه‌ای که گفته شد با داشتن آن، انگار ماتریس امپدانس دوقطبی را داریم و این خاصیت جذاب و راه‌گشا مخصوص مدارهای دوحلقه‌ای است.

و اگر مدار دارای بیش از دو حلقه بود، باید جریان متغیر آن حلقه را به‌گونه‌ای حذف کرد و برحسب جریان‌های I_1 و I_2 نوشت.

۱ـ در مدار شکل زیر پارامترهای Z را بیابید.



شکل (۲.۱۱) مدار تمرین ۱

احساس می‌کنم چون این از آن نوع تمریناتی است که استاد، درس آن را می‌گویند و بلافاصله از همان مبحث تمرین را مطرح می‌کنند؛ پس حل آن کار ساده‌ای است! مدار 3 مش دارد، جریان مش بالایی اضافی است و باید I را برحسب I_1 و I_2 بنویسیم:

KVL در مش بالایی : $LSI + r_2(I_2 + I) + r_1(I - I_1) = 0$

$$I = \frac{r_1 I_1 - r_2 I_2}{Ls + r_1 + r_2}$$

و با دو KVL در حلقه‌های چپی و راستی داریم:

$$V_1 = r_1(I_1 - I) + \frac{1}{CS}(I_1 + I_2)$$

$$V_2 = r_2(I_2 + I) + \frac{1}{CS}(I_1 + I_2)$$

و با توجه به I به‌دست‌آمده داریم:

$$V_1 = \overbrace{\left[r_1 + \frac{1}{CS} - \frac{r_1^2}{LS + r_1 + r_2}\right]}^{Z_{11}} I_1 + \overbrace{\left[\frac{1}{CS} + \frac{r_1 r_2}{LS + r_1 + r_2}\right]}^{Z_{12}} I_2$$

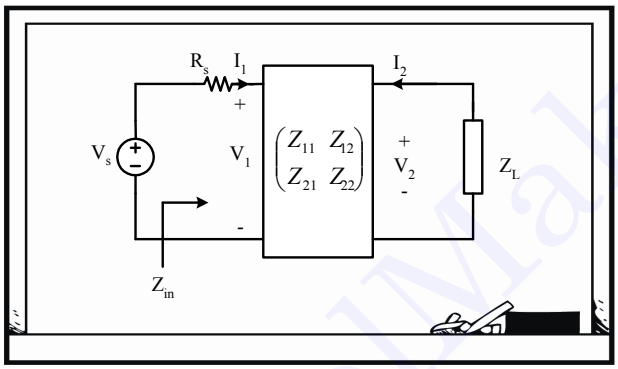
$$V_2 = \underbrace{\left[\frac{1}{CS} + \frac{r_1 r_2}{LS + r_1 + r_2}\right]}_{Z_{21}} I_1 + \underbrace{\left[r_2 + \frac{1}{CS} - \frac{r_2^2}{LS + r_1 + r_2}\right]}_{Z_{22}} I_2$$

www.ControlMakers.ir

به نظر من، حل دوستم خیلی جامع بود، ولی اگر فقط مثلاً Z_{11} را می‌خواستیم، نیاز به این همه داستان نبود! ابتدا سر دوم را مدار باز می‌کردیم و سپس می‌گفتیم:

$$Z_{11} = Z_{in_1} = \left[\left(r_2 + LS\right) \| \, r_1\right] + \frac{1}{CS}$$

۲ـ در مدار شکل زیر مقدار Z_{in} را برحسب R_s و Z_L و پارامترهای امپدانس Z به دست آورید.



شکل (۳.۱۱) مدار تمرین ۲

درواقع ما در جستجوی $\frac{V_1}{I_1}$ هستیم. به حرکات من دقت کنید:

در حلقهٔ راستی KVL : $V_2 = -Z_L I_2$

ازطرفی:

$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 = -Z_L I_2$$

پس:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{-Z_{21}}{Z_{22} + Z_L}$$

و حالا:

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$

$$V_1 = \left(Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{22} + Z_L}\right) I_1$$

و درنهایت:

$$Z_{in} = Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{22} + Z_L}$$

آفرین! ضمناً بد نیست این فرمول را حفظ کنید؛ البته اگر Z_{in}، از سمت چپ R_s باشد طبیعتاً برابر می‌شود با:

$$Z_{in} = R_s + Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_L} \qquad (۸\_۱۱)$$

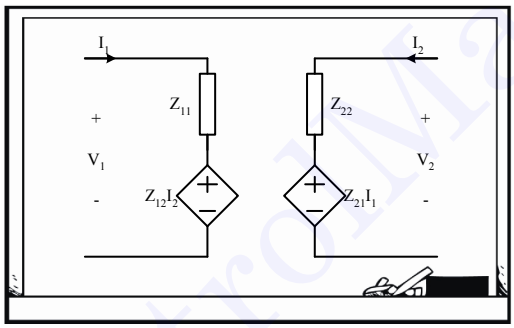
و همین‌طور برای Z_{out}، مشابه رابطهٔ Z_{in} خواهیم داشت:

$$Z_{out} = Z_{22} - \frac{Z_{21}Z_{12}}{Z_{11} + R_s} \qquad (۹\_۱۱)$$

حالا بحث پارامترهای امپدانس را ادامه می‌دهیم.

مدار معادل

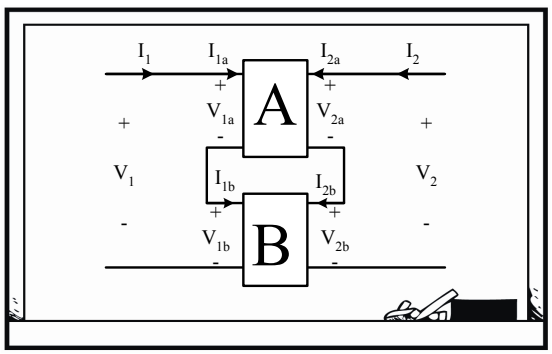
شکل (۱۱ـ۴) یک مدار معادل برای شبکهٔ دوقطبی برحسب پارامترهای Z است. برای تأیید این مطلب در حلقه‌های ورودی و خروجی KVL بزنید.



شکل (۱۱ـ۴) مدار معادل دوقطبی برحسب پارامترهای Z

به هم بستن دوقطبی‌ها

به این نوع به هم بستن دوقطبی‌ها (شکل (۱۱ـ۵)) سری می‌گویند؛ به دقت به این شکل نگاه کنید:



شکل (۱۱ـ۵) به هم بستن سری دوقطبی‌ها

www.ControlMakers.ir

www.ControlMakers.ir

در این حالت داریم:

$$[I]=[I_a]=[I_b] \qquad (۱۰\_۱۱)$$

$$[V]=[V_a]+[V_b] \qquad (۱۱\_۱۱)$$

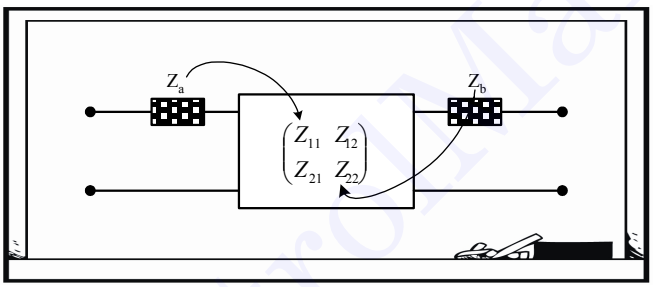
و درنتیجه:

$$[Z_{کل}]=[Z_a]+[Z_b] \qquad (۱۲\_۱۱)$$

یعنی تک‌تک درایه‌های ماتریس‌های امپدانس، نظیر به نظیر با هم جمع می‌شوند.

یک نکتهٔ جالب‌انگیزناک[1]:

می‌توان امپدانس‌های Z_a و Z_b موجود در بازوهای سری (۱) و (۲) را حذف کرد و مقادیر آن‌ها را به عناصر قطر اصلی ماتریس Z اضافه کرد؛ به این ترتیب ماتریس امپدانس معادل دوقطبی جدید به صورت $\begin{pmatrix} Z_{11}+Z_a & Z_b \\ Z_{21} & Z_{22}+Z_b \end{pmatrix}$ درمی‌آید.



شکل (۱۱ـ۶) شبکهٔ دوقطبی با امپدانس‌های سری در بازوها

۱۱ـ۲ پارامترهای ادمیتانس اتصال کوتاه Y

خدا پدر این ماجرای «دوآلیتی» را بیامرزد؛ به کمک آن زندگی خیلی شیرین‌تر می‌شود! حالا با توجه به دوگانی بین Z و Y، خودتان قدم به قدم جلو بروید و تمام قصه‌های ماتریس امپدانس Z را برای ماتریس ادمیتانس Y تکرار کنید.

رابطهٔ اساسی به این صورت است:

$$I=Y\times V \qquad (۱۳\_۱۱)$$

۱ـ اگر از این عبارت خوشتان نیامد، خودتان یک عبارت سنگین و باکلاس جایگزین آن کنید!

و در فرم ماتریسی:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \qquad (۱۴\_۱۱)$$

و تعریف تک‌تک پارامترها هم مثل نوشیدن

این‌گونه می‌شود:

ادمیتانس ورودی سر اول وقتی سر دوم اتصال کوتاه است:

$$y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2 = 0} \qquad (۱۵\_۱۱)$$

↓

سر دوم اتصال کوتاه است.

ادمیتانس ورودی سر دوم وقتی سر اول اتصال کوتاه است:

$$y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1 = 0} \qquad (۱۶\_۱۱)$$

↓

سر اول اتصال کوتاه است.

ادمیتانس انتقالی معکوس:

$$y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1 = 0} \qquad (۱۷\_۱۱)$$

ادمیتانس انتقالی مستقیم:

$$y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2 = 0} \qquad (۱۸\_۱۱)$$

یک نکتهٔ ساده کننده و جالب[۱] :

حال اگر در سرهای (۱) و (۲)، منبع I_{s_1} و I_{s_2} بگذاریم و روابط ذهنی ماتریس گره $I = Y \cdot V$ را به دست آوریم، در **مدارهای دوگره‌ای**[۲]، پارامترهای ادمیتانس اتصال کوتاه دوقطبی برابر همان ماتریس ادمیتانس گره می‌شود.[۳]

۱ـ این نکته نیز، فوق‌العاده در مدارهای دوگره‌ای، کارآمد است.

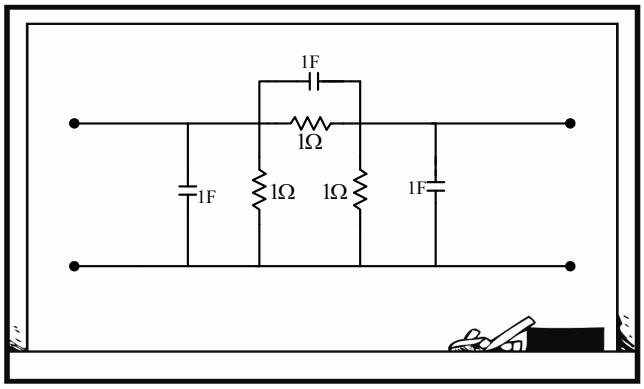
۲ـ در مدارهای دوگره‌ای، در قدم اول فوراً به سراغ ماتریس ادمیتانس گره می‌رویم که به روش ذهنی خیلی سریع با چشم به دست می‌آید؛ یعنی اگر مدار دوگره‌ای بود و حتی ماتریس امپدانس Z را می‌خواستیم، باز هم عاقلانه‌ترین و کوتاه‌ترین راه آن است که اول ماتریس Y را پیدا کنیم و بعد...

۳ـ روابط شدیداً دوگان پارامترهای Z است. من سعی می‌کنم جمله‌بندی‌ها را نیز عوض نکنم.

www.ControlMakers.ir

www.ControlMakers.ir

۳ـ ماتریس ادمیتانس دوقطبی شکل زیر کدام است؟

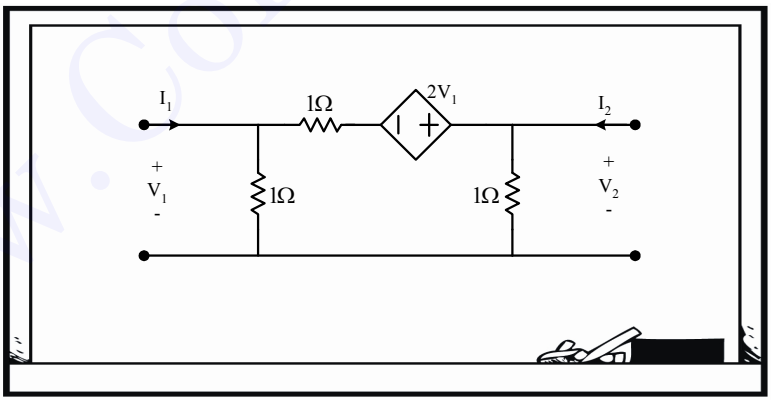


شکل (۷.۱۱) مدار تمرین ۳

مدار دوحلقه‌ای است، با کمک نکتهٔ قبل و عینک لاپلاس، جواب معلوم است دیگر:

$$Y=\begin{pmatrix}2s+2 & -s-1\\ -s-1 & 2s+2\end{pmatrix}$$

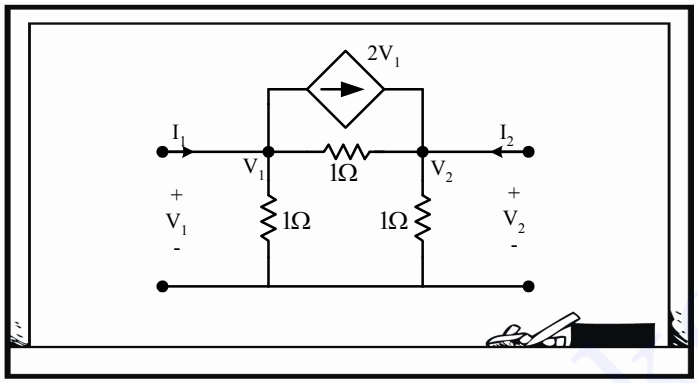
۴ـ ماتریس ادمیتانس Y دوقطبی شکل زیر را بیابید.



شکل (۸.۱۱) مدار تمرین ۴

www.ControlMakers.ir

ابتدا منبع وابسته را به منبع جریان تبدیل می‌کنیم (معادل نورتن) تا مدارمان دوگره‌ای شود:



شکل (۱۱-۹) مدار ساده‌شدهٔ تمرین ۴

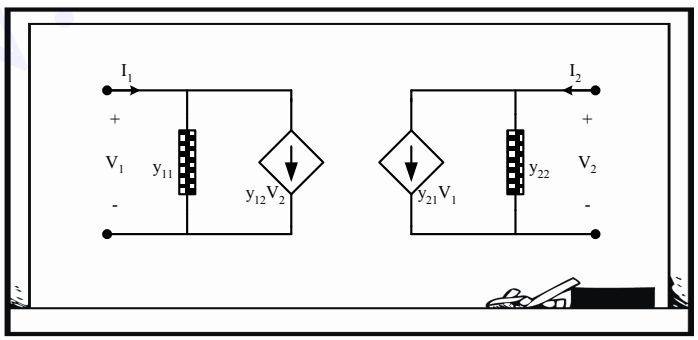
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2V_1 \\ 2V_1 \end{pmatrix}$$

و جواب به این صورت می‌شود:

$$Y=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

مدار معادل

برای ماتریس Y مدار معادل دوقطبی این‌گونه می‌شود:



شکل (۱۱-۱۰) مدار معادل دوقطبی برحسب پارامترهای Y

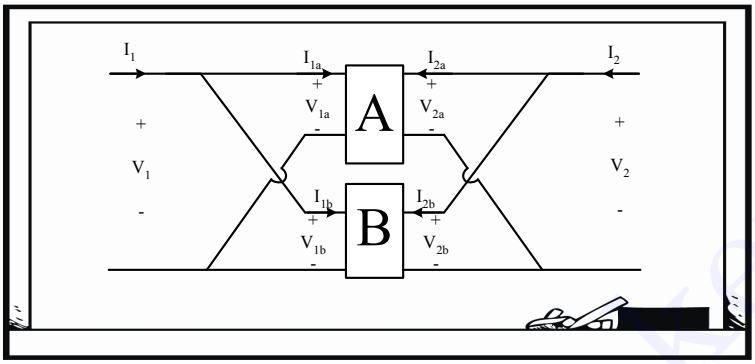
اینجا هم اثباتی دارد ساده‌تر از ساده! دو تا KCL در گره‌های چپ و راست حلاّل ماجراست!

www.ControlMakers.ir

www.ControlMakers.ir

به هم بستن دوقطبی‌ها

به این نوع به هم بستن (شکل (۱۱ـ۸)) موازی می‌گویند:



شکل (۱۱ـ۱۱) به هم بستن موازی دوقطبی‌ها

در این حالت داریم:

$$[V]=[V_a]=[V_b] \qquad (۱۹ـ۱۱)$$

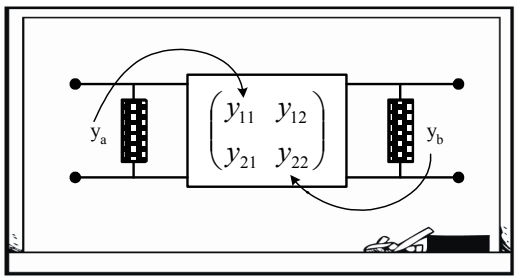
$$[I]=[I_a]+[I_b] \qquad (۲۰ـ۱۱)$$

و درنتیجه:

$$[Y_{کل}]=[Y_a]+[Y_b] \qquad (۲۱ـ۱۱)$$

یک نکته مفید:

در شکل (۱۱ـ۱۲) می‌توان ادمیتانس‌های y_a و y_b موجود در بازوهای موازی (۱) و (۲) را حذف کرد و مقادیر آن‌ها را به عناصر قطر اصلی ماتریس Y اضافه کرد؛ یعنی ماتریس ادمیتانس دوقطبی گُنده جدید برابر $\begin{bmatrix} y_{11}+y_a & y_{12} \\ y_{21} & y_{22}+y_b \end{bmatrix}$ می‌شود.



شکل (۱۱ـ۱۲) شبکهٔ دوقطبی با ادمیتانس‌های موازی در بازوها

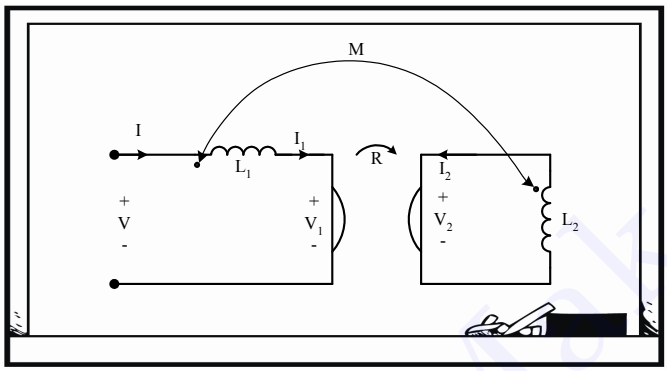
www.ControlMakers.ir

به عنوان جملهٔ آخر عرض می‌کنم که ماتریس‌های Y و Z معکوس یکدیگرند؛ یعنی:

$$Y = Z^{-1} \qquad (۲۲\_۱۱)$$

$$Y = \frac{1}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} \begin{pmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{pmatrix} \qquad (۲۳\_۱۱)$$

۵ـ در مدار شکل زیر امپدانس ورودی $Z_{in}(s)$ را بیابید.



شکل (۱۳ـ۱۱) مدار تمرین ۵

آن شکل وسطی ژیراتور است. درست می‌گویم؟

بله درست می‌فرمایید، روابط آن هم به شرح زیر است:

$$\begin{cases} V_1 = R \times I_2 \\ V_2 = -R \times I_1 \end{cases} \qquad (۲۴\_۱۱)$$

ژیراتور هم یک‌جور مبدل است، شبیه ترانسفورماتور؛ با این تفاوت که در ترانسفورماتور، ولتاژ به ولتاژ و جریان به جریان تبدیل می‌شود ولی در ژیراتور جریان به ولتاژ و یا ولتاژ به جریان تبدیل می‌شوند. البته یک فرق اساسی دیگر هم دارند؛ ترانسفورماتور یک عنصر دوطرفه (متقابل) است اما ژیراتور دوطرفه یا متقابل نیست. در فصل آخر ارزش این حرف را به طور کامل درک خواهید کرد.

حال خود شما مسئله را حل کنید:

ابتدا در حلقهٔ راستی KVL می‌زنیم:

$$V_2 = -SL_2 I_2 + SMI_1$$

www.ControlMakers.ir

$$SL_2 I_2 = SMI_1 + RI_1$$

و سپس با KVL زدن در حلقهٔ ورودی:

$$V = SL_1 I_1 - SMI_2 + RI_2 = SL_1 I + (R - MS) I_2$$

$$V = SL_1 I + (R - SM) \frac{1}{SL_2} (SM + R) I$$

و درنهایت زندگی شیرین می‌شود:

$$Z_{in} = \frac{V}{I} = SL_1 + \frac{R^2 - (SM)^2}{SL_2}$$

۱۱ـ۳ پارامترهای هایبرید H

ترجمهٔ خودمانی هایبرید یعنی قاطی؛ در اینجا یعنی در سر اول مانند Z و در سر دوم مانند Y است.

این امر به راحتی از روابط و شکل‌ها معلوم است؛ یعنی در سر اول V_1 برحسب I_1 نوشته می‌شود و در سر دوم I_2 برحسب V_2 نوشته می‌شود.

به این روابط نگاه کنید:

سر اول مثل Z

$$\begin{pmatrix} \uparrow V_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \qquad (۲۵ـ۱۱)$$

سر دوم مثل Y

و پس از بسط روابط:

$$\begin{cases} V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{cases} \qquad (۲۶ـ۱۱)$$

و درنتیجه برای تک‌تک درایه‌ها چنین داریم:

امپدانس ورودی سر اول وقتی سر دوم اتصال کوتاه است:

$$h_{11}(\Omega) = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2:0} \qquad (۲۷ـ۱۱)$$

ادمیتانس ورودی سر دوم وقتی سر اول مدار باز است:

$$h_{22}(\mho) = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1:0} \qquad (۲۸ـ۱۱)$$

بهره ولتاژ معکوس مدار باز:

$$h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1:0} = H_V \qquad (۲۹ـ۱۱)$$

www.ControlMakers.ir

بهره جریان مستقیم اتصال کوتاه:

$$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2:0} = H_I \qquad (۱۱\_۳۰)$$

از مقایسهٔ روابط (۱۱ـ۵) و (۱۱ـ۲۷) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

مشخص است دیگر:

$$h_{22} = \frac{1}{Z_{22}} \qquad (۱۱\_۳۱)$$

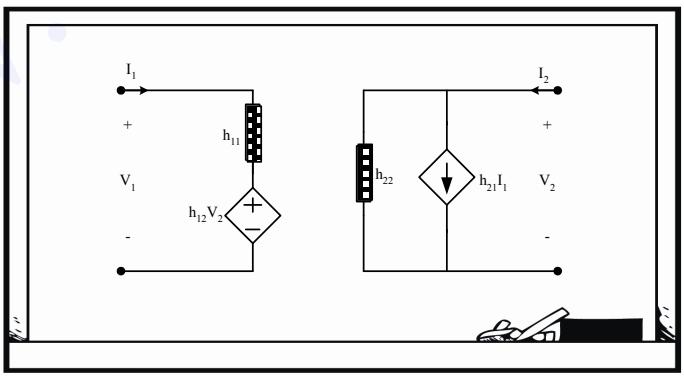
و به همین ترتیب از مقایسهٔ روابط (۱۱ـ۱۵) و (۱۱ـ۲۶) معلوم می‌شود که:

$$h_{11} = \frac{1}{y_{11}} \qquad (۱۱\_۳۲)$$

راستی یک سؤال، آیا مشابه روابط بالا می‌توانیم نتیجه بگیریم که $y_{11} = \frac{1}{Z_{11}}$ و یا $y_{22} = \frac{1}{Z_{22}}$ یا این حرف‌ها غلط است؟

به دو دلیل این حرف‌ها نه تنها غلط بلکه «فحش‌های علمی»اند؛ دلیل اول آنکه Z_{11} در حالی به دست می‌آید که سر دوم مدار باز است، درصورتی‌که برای به دست آوردن y_{11}، سر دوم اتصال کوتاه است و دلیل دوم اینکه مگر نگفتیم $Y = Z^{-1}$، پس Y_{22} برابر با $\frac{Z_{11}}{\det Z}$ می‌شود. مگر نه؟

مدار معادل: نیازی به توضیح نیست دیگر، سر ورودی مثل Z و سر خروجی مثل Y است؛ یعنی:



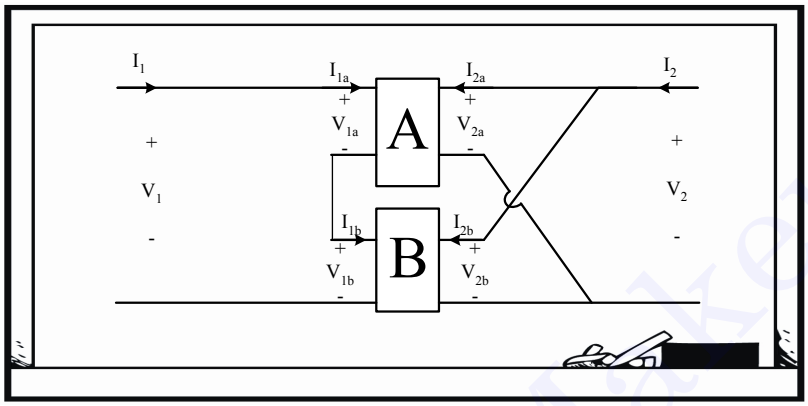
شکل (۱۱ـ۱۴) مدار معادل دوقطبی برحسب پارامترهای H

www.ControlMakers.ir

www.ControlMakers.ir

به هم بستن دوقطبی‌ها

به این مدار، موازی ـ سری می‌گوییم. می‌بینید چقدر جالب است؟ باز سر چپی مثل Z و سر راستی مثل Y است:



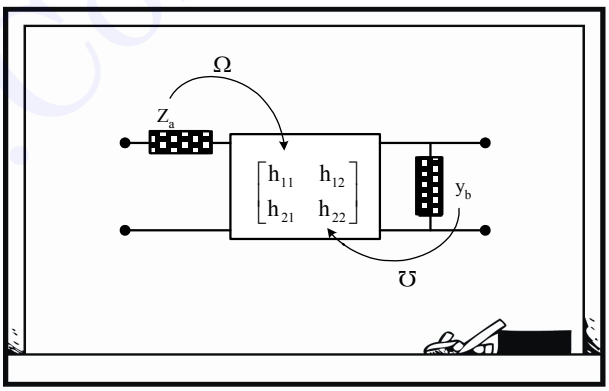
شکل (۱۵ـ۱۱) به هم بستن موازی ـ سری دوقطبی‌ها

و در این حالت:

$$[H_{کل}] = \left[H_a\right] + \left[H_b\right] \qquad (۳۳ـ۱۱)$$

و بالاخره همان یک نکتهٔ جالب:

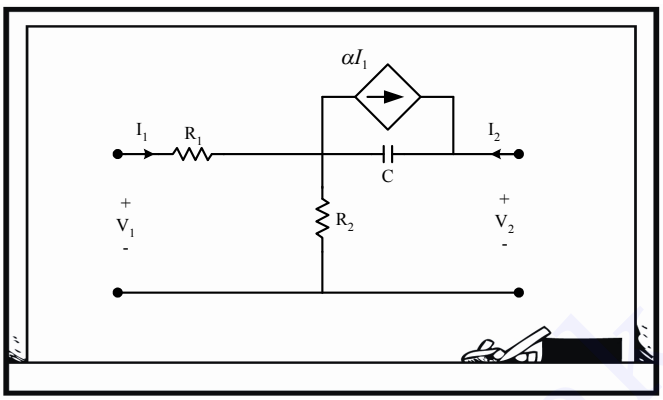
مشابه حالت قبل می‌توان مقادیر Z_a و y_b را حذف کرد و مقادیر آن‌ها را (به ترتیب با واحدهای Ω و $\mho$) به عناصر قطر اصلی ماتریس H اضافه کرد. از لحاظ دیمانسیون هم فراموش نمی‌کنیم که h_{11} از جنس Ω و h_{22} از جنس $\mho$ است.



شکل (۱۶ـ۱۱) شبکهٔ دوقطبی با امپدانس سری و ادمیتانس موازی

۶ـ در مدار شکل زیر پارامتر h_{21} از کدام گزینه به دست می‌آید؟

۱) $-\dfrac{\alpha+j\omega R_2 C}{1+j\omega R_2 C}$ ۲) $\dfrac{\alpha+j\omega R_2}{1+j\omega R_2}$ ۳) $\dfrac{1+j\omega R_2 C}{1+j\omega}$ ۴) هیچ‌کدام

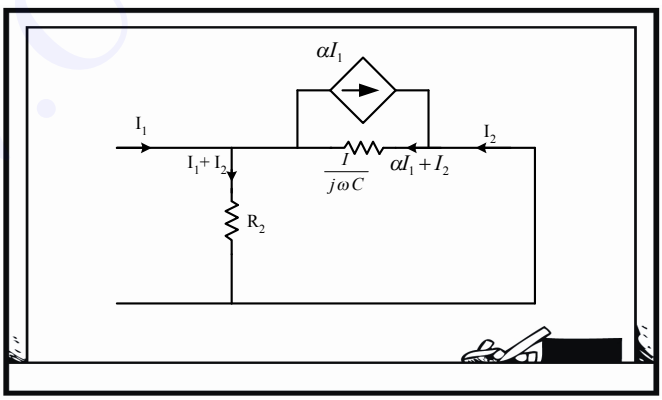


شکل (۱۷ـ۱۱) مدار تمرین ۶

طبق تعریف داریم:

$$h_{21}=\left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0}$$

حالا با اتصال کوتاه کردن سمت راست $(V_2=0)$ و عینک فازوری، قیافهٔ مدار به شکل زیر درمی‌آید:



شکل (۱۸ـ۱۱) ساده‌شدهٔ مدار تمرین ۶

www.ControlMakers.ir

www.ControlMakers.ir

و حالا با KVL چنین داریم:

$$\frac{1}{j\omega C}\left(\alpha I_1 + I_2\right) + R_2\left(I_1 + I_2\right) = 0$$

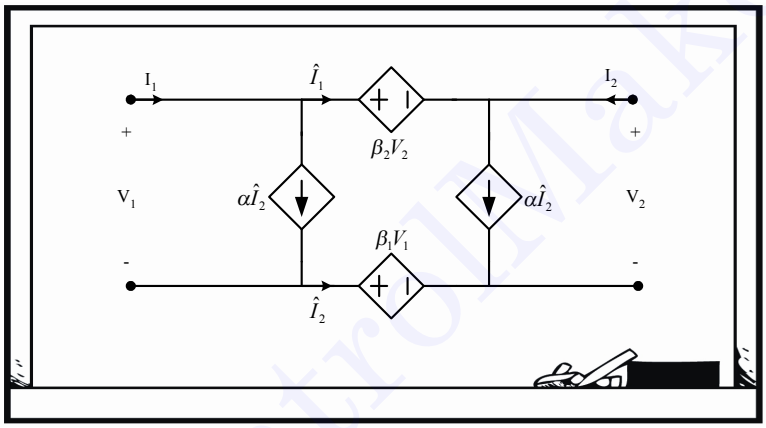
$$\left(\frac{1}{j\omega C} + R_2\right) I_2 = -\left(\frac{\alpha}{j\omega C} + R_2\right) I_1$$

$$\frac{I_2}{I_1} = -\frac{\alpha + j\omega R_2 C}{1 + j\omega R_2 C}$$

ضمناً اگر در این مسئله گزینهٔ هیچ‌کدام[1] نبود، می‌توانستیم در حالتی خاص، مثلاً $\omega = 0$، گزینه‌ها را چک کنیم و با رد گزینه به پاسخ برسیم.[2]

پس گزینه ۱ درست است.

۷ـ پارامترهای h دوقطبی شکل زیر را تعیین کنید.



شکل (۱۹.۱۱) مدار تمرین ۷

۱) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1-\beta_1}{1+\beta_2} \\ -\frac{1+\alpha_1}{1+\alpha_2} & 0 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1+\beta_2}{1+\beta_1} \\ -\frac{1+\alpha_2}{1+\alpha_1} & 0 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1-\alpha_1}{1+\alpha_2} \\ -\frac{1+\beta_1}{1+\beta_2} & 0 \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1-\alpha_2}{1+\alpha_1} \\ -\frac{1+\beta_2}{1+\beta_1} & 0 \end{bmatrix}$

۱ـ گاهی قیافهٔ عبارت «هیچ‌کدام»، اعصاب تست‌زن را خرد می‌کند!

۲ـ لطفاً بین گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ با این روش گزینه درست را پیدا کنید؛ یعنی تست را به بن‌بست ببرید، مثلاً مدار را با $\omega = 0$ رسم کنید؛ می‌بینید که خازن، مدار باز می‌شود؛ پس $\frac{I_2}{I_1} = -\alpha$ به دست می‌آید و می‌گوییم گزینه‌ای درست است که به ازای $\omega = 0$ بدهد $-\alpha$ و... (اکیداً پیشنهاد می‌کنم از این‌گونه بازی‌ها هنگام حل تست کمک بگیرید البته اگر با من موافقید. باید از هم‌اکنون دست‌به‌کار «بازی» شوید!)

فکر کنم این سؤال، یکی از تست‌های کنکور ارشد سراسری باشد؛ درسته؟

بله، همین‌طور است. اکثر مسایلی که تاکنون حل کرده‌ایم نیز از همین دست بوده‌اند.

در حلقهٔ بیرونی یک KVL می‌زنیم و به راحتی به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$KVL: V_1+\beta_1 V_1 = V_2+\beta_2 V_2$$

$$V_1 = \underbrace{0}_{h_{11}} I_1 + \underbrace{\frac{1+\beta_2}{1+\beta_1}}_{h_{12}} V_2$$

از مقایسهٔ سطر اول ماتریس H و رابطهٔ بالا درمی‌یابیم که فقط گزینهٔ ۲ می‌تواند درست باشد.

۱۱ـ۴ پارامترهای هایبرید G

عیناً دوگان پارامترهای H است، به طوری که:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \qquad (۱۱ـ۳۴)$$

یعنی در اینجا سر اول مثل Y و سر دوم مثل Z است؛ پس پارامتر H و G وارون یکدیگرند:

$$G = H^{-1} \qquad (۱۱ـ۳۵)$$

و به نظرم توضیح بیشتر در این باب، اتلاف وقت است[1]؛ یعنی برای یادگیری ماتریس هایبرید G، قسمت ماتریس هایبرید H را از اول مرور کنید، فقط کتاب را $180°$ بچرخانید!!!

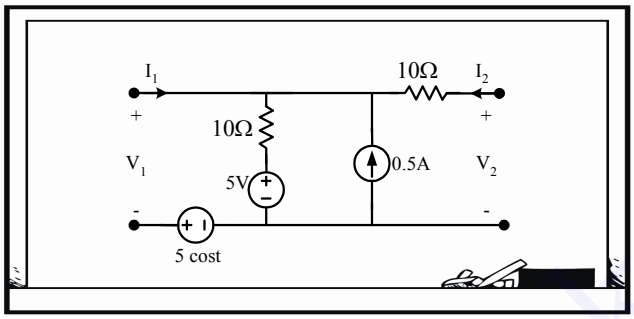
۱ـ در خانه اگر کس است، یک حرف بس است!

www.ControlMakers.ir

۸ـ اگر برای دوقطبی شکل زیر روابط ماتریس G را به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{cases} I_1 = g_{11} V_1 + g_{12} I_2 + I_s \\ V_2 = g_{21} V_1 + g_{22} I_2 + V_s \end{cases}$$

مقادیر I_s و V_s برابر با کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟



شکل (۲۰ـ۱۱) مدار تمرین ۸

۱) $V_s = 5\cos t$ ، $I_s = 0.5\cos t - 1$

۲) $V_s = 5\cos t + 1$ ، $I_s = 0.5\cos t$

۳) $V_s = 5\cos t - 1$ ، $I_s = 0.5\cos t + 1$

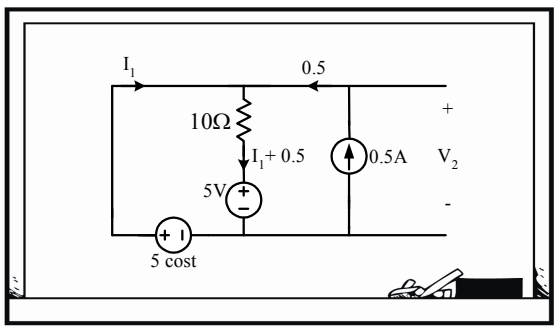
۴) $V_s = 5\cos t - 2$ ، $I_s = 0.5\cos t + 1$

این مسئله بسیار زیباست! برای یافتن V_s و I_s این‌طور می‌گوییم:

$$V_s = V_2 \Big|_{V_1=0\ ,\ I_2=0}$$

$$I_s = I_1 \Big|_{V_1=0\ ,\ I_2=0}$$

قدم اول اعمال آن شرط‌هاست؛ پس در مدار، سر ورودی را اتصال کوتاه می‌کنیم و در خروجی مدار باز قرار می‌دهیم؛ در این صورت مدار به شکل زیر درمی‌آید:



شکل (۲۱ـ۱۱) مدار ساده‌شدهٔ تمرین ۸

با KVL در حلقهٔ خروجی:

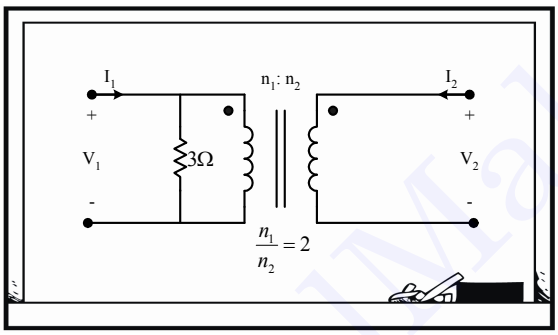
$$V_s = V_2 = 5\cos t$$

پس از همین‌جا درستی گزینهٔ (۱) روشن است و چقدر این‌جوری مسئله حل کردن لذیذ! است.
البته می‌توانیم برای تمرین، I_S را هم پیدا کنیم:

$$10I_1 + 5 + 5 - 5\cos t = 0$$
$$I_s = I_1 = 0.5\cos t - 1$$

پس گزینه ۱ درست است.

۹ـ ماتریس هایبر H دوقطبی شکل زیر چیست؟



شکل (۲۲ـ۱۱) مدار تمرین ۹

به راحتی پاسخ معلوم است؛ با دانستن تعاریف درایه‌های ماتریس هایبرید و سرِ سوزنی مدار، قصه تمام است:

$$h_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0} = 0$$
$$h_{12} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_1=0} = 2$$
$$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0} = -2$$

و به کمک قضیهٔ انتقال در ترانسفورماتور:

$$h_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1=0} = \frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{1}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

و اما آخرین پارامترهای دوقطبی:

www.ControlMakers.ir

۱۱ـ۵ پارامترهای انتقال T (ماتریس ABCD)

در چهار ماتریس قبلی، یا ولتاژ برحسب جریان بود یا برعکس و یا ترکیبی از آن‌ها؛ اما در ماتریس انتقال، کاری به این حرف‌ها نداریم و ورودی را برحسب خروجی می‌نویسیم، البته منظور از ورودی $\overset{+}{V_1}\ \overset{-}{} \rightarrow i_1$ و منظور از خروجی $\overset{+}{V_2}\ \overset{-}{} \rightarrow i_2$ است. (لطفاً به جهت جریان i_2 بیشتر دقت کنید.) حال با این توصیفات ماتریس انتقال T یا همان $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ به شرح زیر می‌شود:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \qquad (۳۶\_۱۱)$$

و با بسط آن چنین حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} V_1 = AV_2 - BI_2 \\ I_1 = CV_2 - DI_2 \end{cases} \qquad (۳۷\_۱۱)$$

و تعریف آن‌ها این‌گونه می‌شود:

$$A^{(1)} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0} \qquad (۳۸\_۱۱)$$

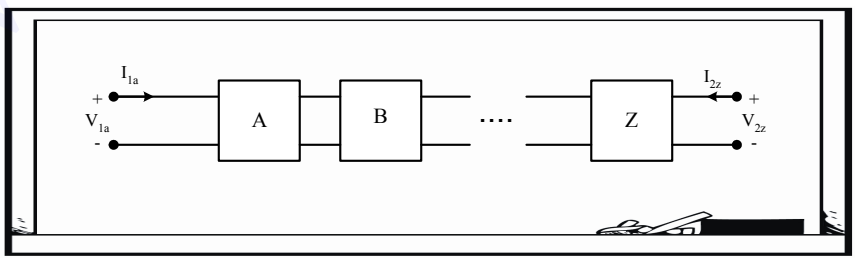
$$B^{(\Omega)} = -\left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{V_2=0} \qquad (۳۹\_۱۱)$$

$$C^{(\mho)} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0} \qquad (۴۰\_۱۱)$$

$$D^{(1)} = -\left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_2=0} \qquad (۴۱\_۱۱)$$

به هم بستن دوقطبی‌ها (پشت سر هم)

اگر چند دوقطبی را پشت سر هم، مانند شکل زیر ببندیم:



شکل (۱۱ـ۲۳) به هم بستن پشت سر هم دوقطبی‌ها

www.ControlMakers.ir

در این صورت طبق تعریف ماتریس T داریم:

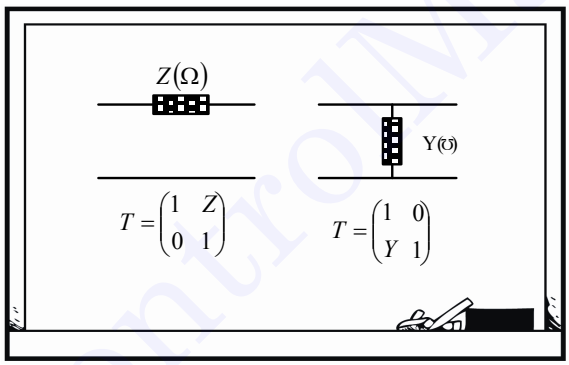
$$T_{کل} = T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_N \qquad (۴۲\_۱۱)$$

یعنی ماتریس‌های T در هم ضرب می‌شوند. حالا فلسفهٔ علامت منفی پشت I_2 را فهمیدید؟

به خاطر آنکه جریان خروجی هر دوقطبی، برابر جریان ورودی دوقطبی بعدی باشد.

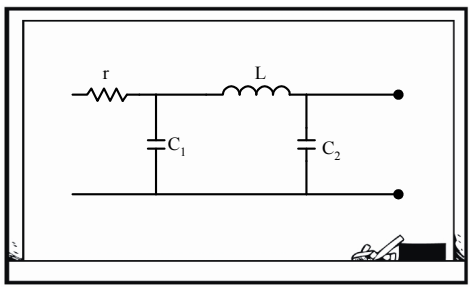
اصلاً اسم ماتریس انتقال، این‌جوری اسم بامسمّاتری می‌شود؛ ورودی دوقطبی n ام را به خروجی‌اش مربوط می‌سازد، پس اگر nتا دوقطبی پشت سر هم (مثل لوله‌کشی!) به همدیگر متصل شوند، $T_{کل}$ از ضرب تک‌تک Tها معلوم می‌شود.

نکته: ماتریس T این دوتا دوقطبیِ خیلی ساده را به خاطر بسپارید؛ چراکه خیلی وقت‌ها می‌توان دوقطبی‌های پیچیده را به صورت اتصال پشت سر همِ این دوقطبی‌های ساده در نظر گرفت.



شکل (۲۴ـ۱۱) دوقطبی‌های بسیار ساده به همراه ماتریس T آن‌ها

۱۰ـ ماتریس انتقال T را در دوقطبی شکل زیر بیابید.



شکل (۲۵ـ۱۱) دوقطبی تمرین ۱۰

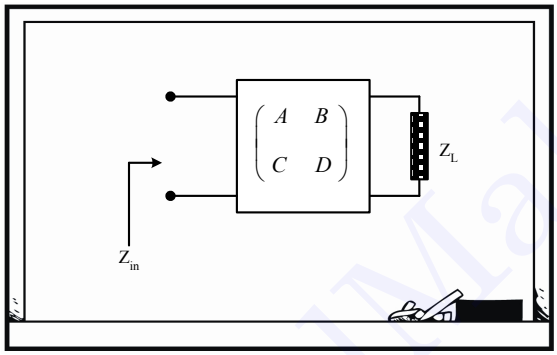
www.ControlMakers.ir

www.ControlMakers.ir

این دوقطبی را به صورت 4 دوقطبی ساده پشت سر هم لحاظ می‌کنیم و با توجه به رابطهٔ (۱۱ـ۴۱)، جواب معلوم است دیگر:

$$T_{\text{کل}} = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_1 s & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & LS \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_2 s & 1 \end{pmatrix} = \cdots$$

۱۱ـ در مدار شکل زیر، Z_{in} را برحسب عناصر ماتریس انتقال T پیدا کنید.



شکل (۱۱ـ۲۶) مدار تمرین ۱۱

طبق تعریف امپدانس ورودی و ماتریس T داریم:

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{AV_2 - BI_2}{CV_2 - DI_2}$$

و با توجه به KVL در حلقهٔ راستی:

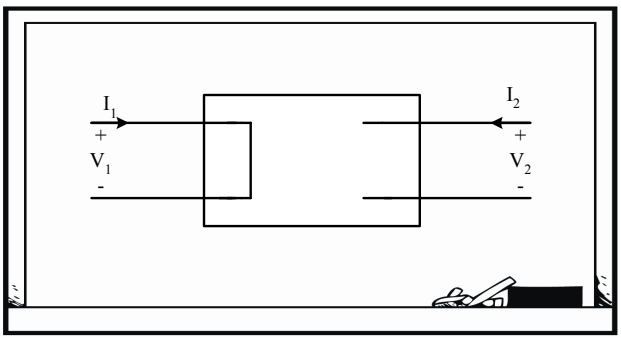
$$V_2 = -Z_L I_2 \quad \Rightarrow \quad Z_{in} = \frac{-AZ_L I_2 - B_2 I_2}{-CZ_L I_2 - DI_2}$$

درنهایت امپدانس ورودی معلوم می‌شود:

$$Z_{in} = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D} \qquad (۱۱ـ۴۳)$$

www.ControlMakers.ir

۱۲ـ دوقطبی زیر کدام توصیف را دارد؟ آن را بیابید.



شکل (۱۱ـ۲۷) دوقطبی تمرین ۱۲

من دوست دارم مسئله را حل کنم. ظاهراً هم ساده است، ولی نمی‌دانم از کجا شروع کنم.

اشکالی ندارد، این جملات را به آرامی و به دقت بخوانید و زیر لب زمزمه کنید:

وقتی یک دوقطبی، ماتریس Z دارد که بتوان V_1 و V_2 را برحسب I_1 و I_2 نوشت.
وقتی یک دوقطبی، ماتریس Y دارد که بتوان I_1 و I_2 را برحسب V_1 و V_2 نوشت.
وقتی یک دوقطبی، ماتریس H دارد که بتوان V_1 و I_1 را برحسب I_1 و V_2 نوشت.
وقتی یک دوقطبی، ماتریس G دارد که بتوان I_1 و V_2 را برحسب V_1 و I_2 نوشت.
و بالاخره وقتی یک دوقطبی، ماتریس T دارد که بتوان V_1 و I_1 را برحسب V_2 و I_2 نوشت.
ازطرفی فکر کنم این را هم در پیش‌دبستانی برق! خوانده‌اید که:

$$V_{S.C.} = 0 \quad \text{و} \quad I_{O.C.} = 0$$

پس در دوقطبی شکل (۱۱ـ۲۷) داریم:

$$V_1 = 0 = 0I_1 + 0V_2$$
$$I_2 = 0 = 0I_1 + 0V_2$$

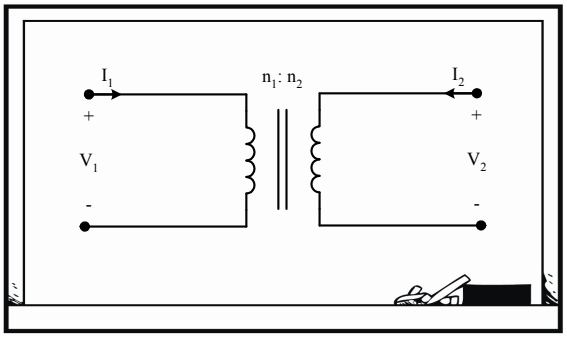
یعنی فقط ماتریس H را دارد و آن هم برابر است با:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

www.ControlMakers.ir

www.ControlMakers.ir

۱۳ـ ترانسفورماتور زیر کدام توصیف‌ها را دارد؟ آن‌ها را بنویسید.



شکل (۲۸.۱۱) ترانسفورماتور

برطبق توضیحاتی که گفته شد و بر اساس روابط ترانسفورماتور:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{n_1}{n_2} \quad \Rightarrow \quad V_1 = 0\,I_1 + \frac{n_1}{n_2}V_2$$

$$\frac{I_1}{I_2}=-\frac{n_2}{n_1} \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{-n_1}{n_2}I_1 + 0\,V_2$$

پس ماتریس هایبرید این‌چنین است:

$$H=\begin{pmatrix} 0 & \frac{n_1}{n_2} \\ -\frac{n_1}{n_2} & 0 \end{pmatrix}$$

به همین ترتیب G هم پیداست، برای T هم داریم:

$$V_1 = \frac{n_1}{n_2}V_2 + 0\left(-I_2\right)$$

$$I_1 = 0\,V_2 + \frac{n_2}{n_1}\left(-I_2\right)$$

پس:

$$T=\begin{pmatrix} \frac{n_1}{n_2} & 0 \\ 0 & \frac{n_2}{n_1} \end{pmatrix}$$

www.ControlMakers.ir

آفرین! نکته مهم آنکه ترانسفورماتور، توصیف‌های Z و Y را ندارد؛ چراکه نمی‌توان V_1 یا V_2 را برحسب I_1 و I_2 نوشت و همچنین نمی‌توان I_1 یا I_2 را برحسب V_1 و V_2 نوشت. حالا به این جمله دقت کنید:

شرط آنکه یک دوقطبی ماتریس Z نداشته باشد آن است که:

$$\det Y = 0 \qquad (۴۴\_۱۱)$$

و برعکس. (گاهی این موضوع در حل تست‌ها مفید است.[۱])

۱۱ـ۶ روابط بین پارامترهای دوقطبی

هدف اصلی آن است که از روی پارامترهایی به پارامترهای دیگر برسیم. به نظرم به خاطر سادگی، فقط به روابط! نگاه کنید. من ساکت می‌شوم و چیزی نمی‌گویم:

$$Y = Z^{-1} \qquad (۴۵\_۱۱)$$

$$y_{11} = \frac{Z_{22}}{\det Z} \qquad (۴۶\_۱۱)$$

$$y_{12} = \frac{-Z_{12}}{\det Z} \qquad (۴۷\_۱۱)$$

$$y_{21} = \frac{-Z_{21}}{\det Z} \qquad (۴۸\_۱۱)$$

$$y_{22} = \frac{Z_{11}}{\det Z} \qquad (۴۹\_۱۱)$$

و

$$h_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0} = \frac{1}{\left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0}} = \frac{1}{y_{11}} \qquad (۵۰\_۱۱)$$

$$h_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1=0} = \frac{1}{\left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0}} = \frac{1}{Z_{22}} \qquad (۵۱\_۱۱)$$

$$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0} = \frac{\left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0}}{\left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0}} = \frac{y_{21}}{y_{11}} = \frac{-Z_{21}}{Z_{22}} \qquad (۵۲\_۱۱)$$

$$h_{12} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_1=0} = \frac{\left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0}}{\left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0}} = \frac{Z_{12}}{Z_{22}} = -\frac{y_{12}}{y_{11}} \qquad (۵۳\_۱۱)$$

۱ـ مثلاً می‌گویند ظرفیت فلان خازن را طوری تعیین کنید که فلان دوقطبی، توصیف Z نداشته باشد؛ در آن صورت ماتریس Y آن را پیدا می‌کنیم و $\det Y = 0$ قرار می‌دهیم؛ آن‌گاه تا حل مسئله دیگر قدمی باقی نیست!

www.ControlMakers.ir

www.ControlMakers.ir

در چهار خط بالا، از روشی استفاده کردم که اسمش را «تقسیم صورت و مخرج به اون یکیِ اونی که صفره!» گذاشتم؛ یعنی وقتی $V_2 = 0$ بود، V_1 را به مخرج می‌بردیم و وقتی $I_1 = 0$ بود، I_2 را به مخرج می‌بردیم، تا هم‌فُرم با تعریف پارامترهای Z یا Y شود و یا حرف‌هایی از این جنس:

$$V_1 = AV_2 - BI_2 = \frac{A}{C}\left(I_1 + DI_2\right) - BI_2$$

$$V_1 = \frac{A}{C}I_1 + \frac{AD-BC}{C}I_2$$

یعنی:

$$Z_{11} = \frac{A}{C} \quad , \quad Z_{12} = \frac{\det T}{C} \qquad (۵۴\_۱۱)$$

و برای تمامی تبدیلات می‌توان از روش‌هایی مشابه آنچه ملاحظه فرمودید، بهره گرفت. در پیوست، جدول تبدیل پارامترهای مختلف دوقطبی‌ها را ملاحظه می‌فرمایید.

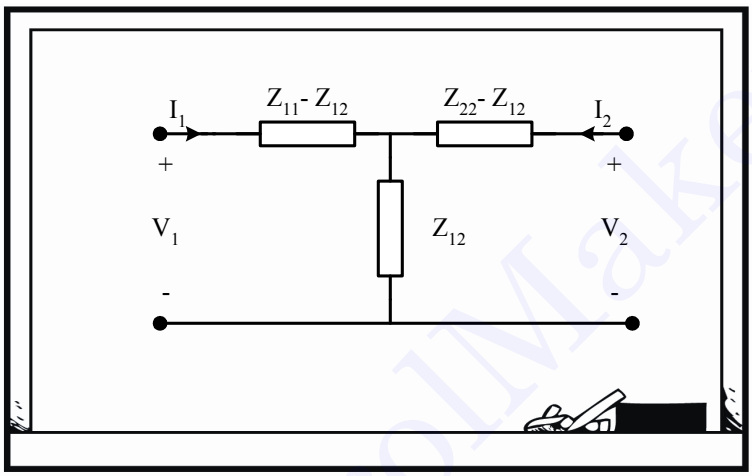
z_{11}	z_{12}	$\frac{y_{22}}{\Delta Y}$	$\frac{-y_{12}}{\Delta Y}$	$\frac{A}{C}$	$\frac{\Delta T}{C}$	$\frac{D'}{C'}$	$\frac{1}{C'}$	$\frac{\Delta H}{h_{22}}$	$\frac{h_{12}}{h_{22}}$	$\frac{1}{g_{11}}$	$\frac{-g_{12}}{g_{11}}$
z_{21}	z_{22}	$\frac{-y_{21}}{\Delta Y}$	$\frac{y_{11}}{\Delta Y}$	$\frac{1}{C}$	$\frac{D}{C}$	$\frac{\Delta T'}{C'}$	$\frac{A'}{C'}$	$\frac{-h_{21}}{h_{22}}$	$\frac{1}{h_{22}}$	$\frac{g_{21}}{g_{11}}$	$\frac{\Delta G}{g_{11}}$
$\frac{z_{22}}{\Delta Z}$	$\frac{-z_{12}}{\Delta Z}$	y_{11}	y_{12}	$\frac{D}{B}$	$\frac{\Delta T}{B}$	$\frac{A'}{B'}$	$\frac{-1}{B'}$	$\frac{1}{h_{11}}$	$\frac{-h_{12}}{h_{11}}$	$\frac{\Delta G}{g_{22}}$	$\frac{g_{12}}{g_{22}}$
$\frac{-z_{21}}{\Delta Z}$	$\frac{z_{11}}{\Delta Z}$	y_{21}	y_{22}	$\frac{-1}{B}$	$\frac{D}{B}$	$\frac{-\Delta T'}{B'}$	$\frac{D'}{B'}$	$\frac{h_{21}}{h_{11}}$	$\frac{\Delta H}{h_{11}}$	$\frac{-g_{21}}{g_{22}}$	$\frac{1}{g_{22}}$
$\frac{z_{22}}{z_{21}}$	$\frac{\Delta Z}{Z_{21}}$	$\frac{-y_{22}}{y_{21}}$	$\frac{-1}{y_{21}}$	A	B	$\frac{D'}{\Delta T'}$	$\frac{B'}{\Delta T'}$	$\frac{-\Delta H}{h_{21}}$	$\frac{h_{11}}{h_{21}}$	$\frac{1}{g_{21}}$	$\frac{g_{22}}{g_{21}}$
$\frac{1}{z_{21}}$	$\frac{z_{11}}{z_{21}}$	$\frac{-\Delta Y}{y_{21}}$	$\frac{-y_{11}}{y_{21}}$	C	D	$\frac{C'}{\Delta T'}$	$\frac{A'}{\Delta T'}$	$\frac{-h_{22}}{h_{21}}$	$\frac{-1}{h_{21}}$	$\frac{g_{11}}{g_{21}}$	$\frac{\Delta G}{g_{21}}$
$\frac{z_{22}}{z_{12}}$	$\frac{\Delta Z}{z_{12}}$	$\frac{-y_{11}}{y_{12}}$	$\frac{-1}{y_{12}}$	$\frac{D}{\Delta T}$	$\frac{B}{\Delta T}$	A'	B'	$\frac{1}{h_{12}}$	$\frac{h_{11}}{h_{12}}$	$\frac{-\Delta G}{g_{12}}$	$\frac{-g_{22}}{g_{12}}$
$\frac{1}{z_{12}}$	$\frac{z_{22}}{z_{12}}$	$\frac{\Delta Y}{y_{12}}$	$\frac{-y_{22}}{y_{12}}$	$\frac{C}{\Delta T}$	$\frac{A}{\Delta T}$	C'	D'	$\frac{h_{22}}{h_{12}}$	$\frac{\Delta H}{h_{12}}$	$\frac{-g_{11}}{g_{12}}$	$\frac{-1}{g_{12}}$
$\frac{\Delta Z}{z_{22}}$	$\frac{z_{12}}{z_{22}}$	$\frac{1}{y_{11}}$	$\frac{-y_{12}}{y_{11}}$	$\frac{B}{D}$	$\frac{\Delta T}{D}$	$\frac{B'}{A'}$	$\frac{1}{A'}$	h_{11}	h_{12}	$\frac{g_{22}}{\Delta G}$	$\frac{-g_{12}}{\Delta G}$
$\frac{-z_{21}}{z_{22}}$	$\frac{1}{z_{22}}$	$\frac{y_{21}}{y_{11}}$	$\frac{\Delta Y}{y_{11}}$	$\frac{-1}{D}$	$\frac{C}{D}$	$\frac{-\Delta T'}{A'}$	$\frac{C'}{A'}$	h_{21}	h_{22}	$\frac{-g_{21}}{\Delta G}$	$\frac{g_{11}}{\Delta G}$
$\frac{1}{z_{11}}$	$\frac{-z_{12}}{z_{11}}$	$\frac{\Delta Y}{y_{22}}$	$\frac{y_{12}}{y_{22}}$	$\frac{C}{A}$	$\frac{-\Delta T}{A}$	$\frac{C'}{D'}$	$\frac{-1}{D'}$	$\frac{h_{22}}{\Delta H}$	$\frac{-h_{12}}{\Delta H}$	g_{11}	g_{12}
$\frac{z_{21}}{z_{11}}$	$\frac{\Delta Z}{z_{11}}$	$\frac{-y_{21}}{y_{22}}$	$\frac{1}{y_{22}}$	$\frac{1}{A}$	$\frac{B}{A}$	$\frac{\Delta T'}{D'}$	$\frac{B'}{D'}$	$\frac{-h_{21}}{\Delta H}$	$\frac{h_{11}}{\Delta H}$	g_{21}	g_{22}
$z_{12} = z_{21}$		$y_{12} = y_{21}$		$\Delta T = 1$		$\Delta T' = 1$		$h_{12} = -h_{21}$		$g_{12} = -g_{21}$	

شکل (۲۹_۱۱) جدول تبدیل عناصر ماتریس‌های دوقطبی‌ها و شرط هم‌پاسخی

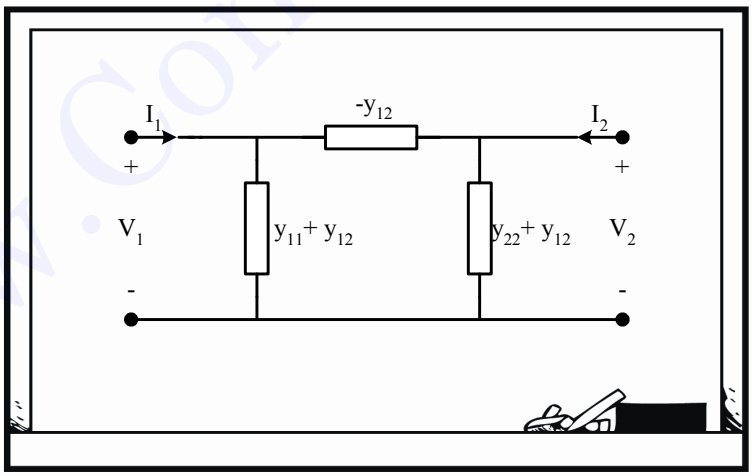
در این جدول، درایه‌های متناظر ماتریس‌های هم‌ردیف برابرند و سطر آخر نیز، بیانگر شرط هم‌پاسخی است.

مدار معادل T و Π

هر دوقطبی را می‌توان به صورت‌های T و Π مدل کرد و در دوقطبی‌های متقابل[۱] ($Z_{12} = Z_{21}$ یا $y_{12} = y_{21}$)، این مدارهای معادل این‌گونه‌اند:



شکل (۳۰.۱۱) مدار معادل T برای یک دوقطبی هم‌پاسخ



شکل (۳۱.۱۱) مدار معادل π برای یک دوقطبی هم‌پاسخ

۱ـ در فصل آخر درباره شبکه‌های متقابل یا هم‌پاسخ به طور مفصل بحث خواهیم کرد.

www.ControlMakers.ir

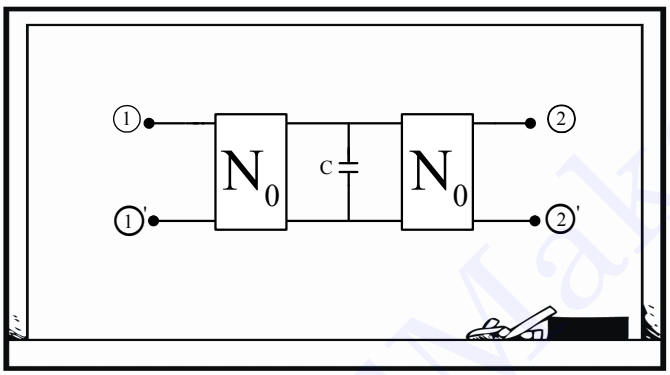
در تعیین مرتبه مدار، آن‌گاه که به دوقطبی برسیم، گاهی تبدیلات مدار معادل T و Π خیلی راهگشاست. برای همین است که سلف‌های تزویج را در حکم 3 تا سلف در نظر می‌گیریم و یا یک دوقطبی پُر از فقط خازن را در حکم فقط 3 خازن لحاظ می‌کنیم.

و اکنون آخرین تمرین از این مبحث:

۱۴ـ در شکل (۱۱ـ۳۲) اگر مشخصهٔ شبکه N_0 با روابط زیر مشخص شود:

$$V_{in} = R\, I_{out} \quad , \quad V_{out} = -R\, I_{in}$$

دوقطبی کل معادل بین ترمینال‌های ① ① و ② ② معادل چیست؟



شکل (۱۱ـ۳۲) دوقطبی (شبکه) مدار تمرین ۱۴

۱) تنها یک عنصر سری به صورت خازنی خالص برابر R^2C است. ۲) تنها یک عنصر سری به صورت سلفی خالص برابر R^2C است.

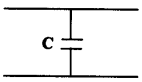
۳) تنها یک عنصر سری به صورت خازنی خالص برابر $\frac{1}{R^2C}$ است. ۴) تنها یک عنصر سری به صورت سلفی خالص برابر $\frac{1}{R^2C}$ است.

با توجه به روابط داده‌شده در صورت سؤال (که مخصوص جناب ژیراتور است!)، ماتریس T دوقطبی N_0 مشخص می‌شود.

$$V_{in} = 0\, V_{out} - R\left(-I_{out}\right)$$

$$I_{in} = -\frac{1}{R} V_{out} + 0\left(-I_{out}\right)$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -R \\ -\frac{1}{R} & 0 \end{pmatrix}$$

و ازطرفی ماتریس T دوقطبی فسقلی  هم که این‌گونه است:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ cs & 1 \end{pmatrix}$$

پس $T_{کل}$ برابر است با:

$$T_{کل}=\begin{pmatrix}0 & -R\\ -\frac{1}{R} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ cs & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -R\\ -\frac{1}{R} & 0\end{pmatrix}$$

$$T_{کل}=\begin{pmatrix}0 & -R\\ -\frac{1}{R} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -R\\ -\frac{1}{R} & -RCS\end{pmatrix}$$

$$T_{کل}=\begin{pmatrix}1 & R^2CS\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

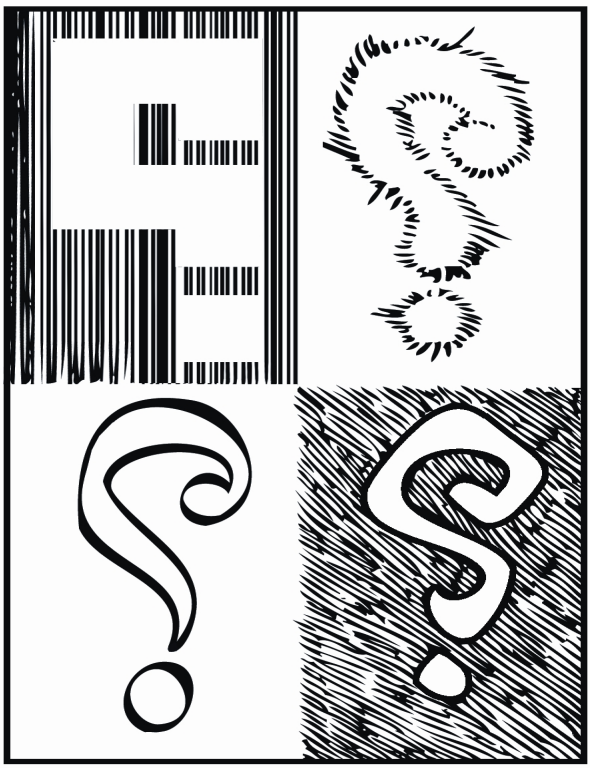
یعنی معادل با یک عنصر سری به صورت سلفی خالص برابر R^2C است.

بنابراین گزینه ۲ درست است.

حالا که فصل دوقطبی تمام شد، این را می‌گویم که فصل بیش از حد ساده‌ای بود! و برخلاف فصل قبلی که لبریز از مفاهیم زیبا و عمیق بود، در این فصل فقط تعدادی تعریف و قرارداد وجود داشت؛ بنابراین اگر کسی در KCL و KVL قدرتمند باشد، در حل مسایل این فصل مشکلی نخواهد داشت. البته این را هم بگویم که در مهندسی برق، توصیف دوقطبی‌ها بسیار مهم است؛ در تبدیل خطوط انتقال به دوقطبی‌ها، در تحلیل آنتن‌های مایکرو استریپ، در بررسی سیستم‌های چندلایه و... پس با اینکه فصل خیلی عمیقی نیست ولی درعوض فوق‌العاده پُرکاربرد است.

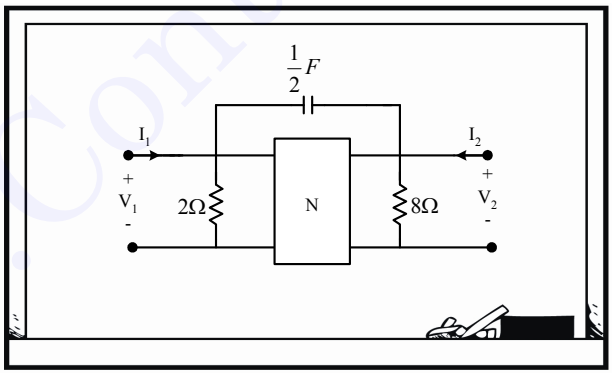
www.ControlMakers.ir

تمرینات فصل یازدهم



۱ـ ماتریس پارامترهای امپدانس دوقطبی N به صورت زیر است:

$$Z=\begin{bmatrix} \frac{3}{S+1} & \frac{2}{S+1} \\ \frac{2}{S+1} & \frac{4}{S+1} \end{bmatrix}$$



دوقطبی N را مطابق شکل بالا توسعه می‌دهیم. ماتریس پارامترهای ادمیتانس دوقطبی توسعه‌یافته کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} S+1 & -\frac{3}{4}S-\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4}S-\frac{1}{4} & \frac{7}{8}S+\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

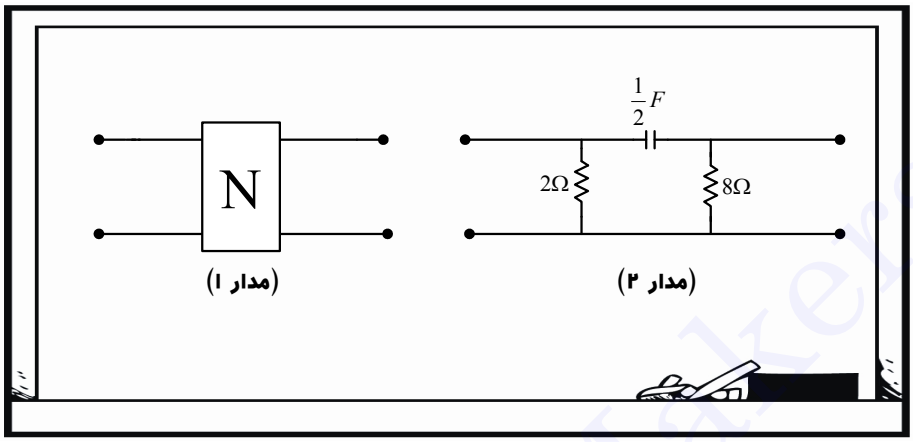
۲) $\begin{bmatrix} S+1 & -\frac{3}{4}S-\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4}S-\frac{1}{2} & \frac{7}{8}S+\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}S+1 & -\frac{1}{4}S-\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4}S-\frac{1}{4} & \frac{3}{8}S+\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} S+\frac{1}{2} & -\frac{3}{4}S-\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4}S-\frac{1}{4} & \frac{3}{8}S+\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

www.ControlMakers.ir

مدار را می‌توان به صورت دو مدار موازی در نظر گرفت، Y هر کدام را به دست آورد و درنهایت با هم جمع کرد. دو مدار عبارت‌اند از:



ماتریس ادمیتانس مدار 1 که از معکوس کردن ماتریس امپدانس آن به دست می‌آید:

$$Y_1=\frac{(S+1)^2}{8}\begin{bmatrix}\frac{4}{S+1} & -\frac{2}{S+1}\\ -\frac{2}{S+1} & \frac{3}{S+1}\end{bmatrix}$$

و ماتریس ادمیتانس مدار 2 را با توجه به ادمیتانس‌هایی که به گره‌های 1 و 2 آن رسیده‌اند، می‌نویسیم:

$$Y_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}S & -\frac{1}{2}S\\ -\frac{1}{2}S & \frac{1}{8}+\frac{1}{2}S\end{bmatrix}$$

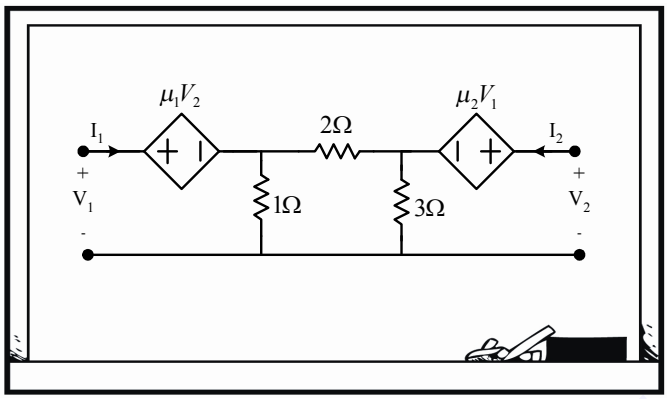
ادمیتانس کل مدار هم عبارت است از:

$$Y=Y_1+Y_2=\begin{bmatrix}S+1 & -\frac{3}{4}S-\frac{1}{4}\\ -\frac{3}{4}S-\frac{1}{4} & \frac{7}{8}S+\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

پس گزینه ۱ درست است.

www.ControlMakers.ir

۲ـ در مدار شکل زیر چه رابطه‌ای میان μ_1 و μ_2 برقرار باشد تا این مدار متقابل باشد؟ (مهندسی برق ۶۸)



۱) $\mu_1 = 1.8\mu_2$ ۲) $\mu_2 = 1.8\mu_1$ ۳) $\mu_2 = 2.4\mu_1$ ۴) $\mu_1 = 2.4\mu_2$

باید یکی از ماتریس‌ها را که راحت‌تر است بنویسیم و شرایط تقابل را برقرار کنیم.

فکر کنم به دلیل گره کمتر، نوشتن ماتریس ادمیتانس ساده‌تر باشد. با نوشتن دو KCL در گره‌ها داریم:

$$\begin{cases} -I_1 + \dfrac{V_1 - \mu_1 V_2}{1} + \dfrac{V_1 - \mu_1 V_2 - (V_2 - \mu_2 V_1)}{2} = 0 \\ -I_2 + \dfrac{V_2 - \mu_2 V_1}{3} + \dfrac{V_2 - \mu_2 V_1 - (V_1 - \mu_1 V_2)}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} I_1 = \left(\frac{3}{2} + \frac{\mu_2}{2}\right)V_1 + \left(-\frac{3}{2}\mu_1 - \frac{1}{2}\right)V_2 \\ I_2 = \left(-\frac{5}{6}\mu_2 - \frac{1}{2}\right)V_1 + \left(\frac{5}{6} + \frac{\mu_1}{2}\right)V_2 \end{matrix} \Rightarrow Y = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} + \frac{\mu_2}{2} & -\frac{3}{2}\mu_1 - \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{6}\mu_2 - \frac{1}{2} & \frac{5}{6} + \frac{\mu_1}{2} \end{bmatrix}$$

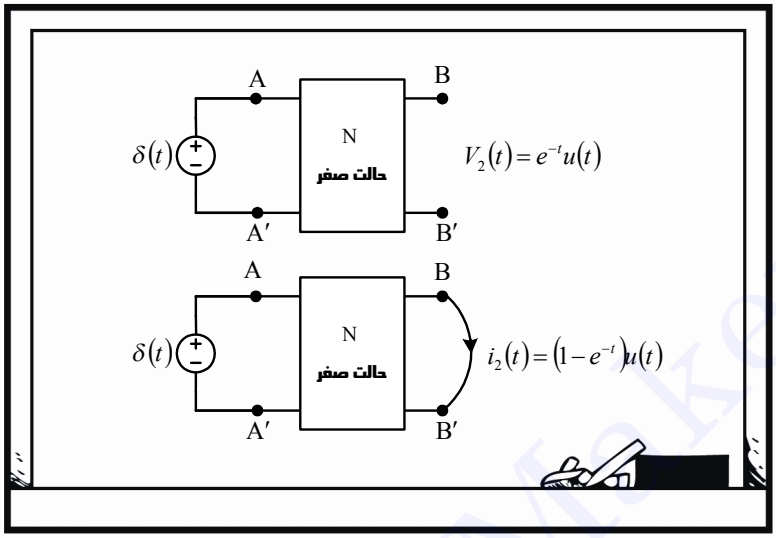
و برای متقابل بودن باید $Y_{12} = Y_{21}$ باشد؛ پس:

$$-\frac{3}{2}\mu_1 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{6}\mu_2 - \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \quad \mu_2 = 1.8\mu_1$$

پس گزینه ۲ درست است.

www.ControlMakers.ir

۳ـ دوقطبی N فقط از اجزای RLC پسیو خطی تغییرناپذیر با زمان تشکیل شده و متقارن است. برای این دوقطبی، نتایج دو آزمایش داده شده است. پارامتر y_{11} این دوقطبی کدام است؟



۱) $\frac{1}{S+1}$ ۲) $\frac{1}{S}$ ۳) $\frac{1}{S(S+1)}$ ۴) $-\frac{1}{S(S+1)}$

ماتریس ادمیتانس را می‌نویسیم و اطلاعاتی را که داریم جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

در آزمایش اول داریم:

$$V_2(t)=e^{-t}u(t) \quad \Rightarrow \quad V_2(S)=\frac{1}{S+1}$$

$$V_1(t)=\delta(t) \quad \Rightarrow \quad V_1(S)=1$$

$$i_2(t)=0 \quad \Rightarrow \quad I_2(S)=0$$

پس باید این مقادیر را در سطر دوم قرار دهیم:

$$I_2=Y_{21}V_1+Y_{22}V_2$$

$$0=Y_{21}\times 1+Y_{22}\times\frac{1}{S+1} \quad \Rightarrow \quad Y_{22}=-Y_{21}(S+1)$$

و از آزمایش دوم داریم:

$$i_2(t)=-\left(1-e^{-t}\right)u(t) \quad \Rightarrow \quad I_2(S)=-\frac{1}{S}+\frac{1}{S+1}=-\frac{1}{S(S+1)}$$

www.ControlMakers.ir

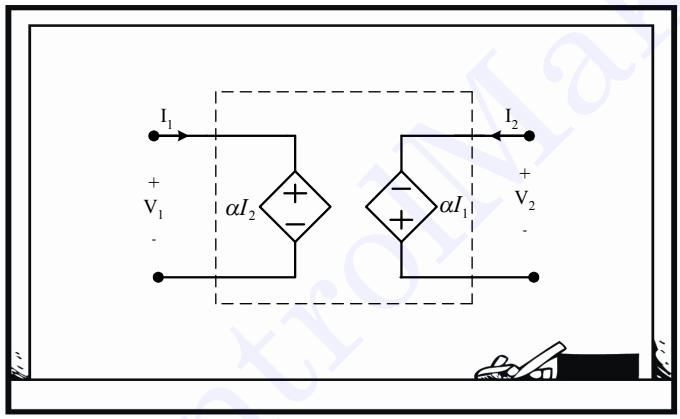
دوباره باید نتایج را در سطر دوم جایگذاری کنیم:

$$\frac{-1}{S(S+1)}=Y_{21}\times 1+Y_{22}\times 0 \quad \Rightarrow \quad Y_{21}=\frac{-1}{S(S+1)} \quad \Rightarrow \quad Y_{22}=+\frac{1}{S}$$

و چون مدار متقارن است، $Y_{11}=Y_{22}=+\frac{1}{S}$ خواهد بود.

پس گزینه ۲ درست است.

۴ـ شبکه دوقطبی N به صورت زیر را در نظر می‌گیریم. دو عدد از این شبکه‌ها به صورت پشت سر هم بسته شده‌اند. در مورد شبکه دوقطبی مجموعه کدام‌یک از عبارات زیر برای ماتریس Z و Y و H درست است؟



۱) هر سه ماتریس وجود دارد.

۲) ماتریس پارامترهای Z و H وجود ندارد و Y وجود دارد.

۳) فقط پارامترهای Z وجود دارد.

۴) ماتریس پارامتر Z و Y وجود ندارد و H وجود دارد.

به نظرم چون دو شبکه پشت سر هم قرار می‌گیرند، بهتر است از ماتریس انتقال T استفاده کنیم:

$$\begin{bmatrix}V_1\\I_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_2\\-I_2\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}V_1\\I_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\alpha\\-\frac{1}{\alpha} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_2\\-I_2\end{bmatrix}$$

و زمانی که دو شبکه پشت سر هم قرار می‌گیرند، داریم:

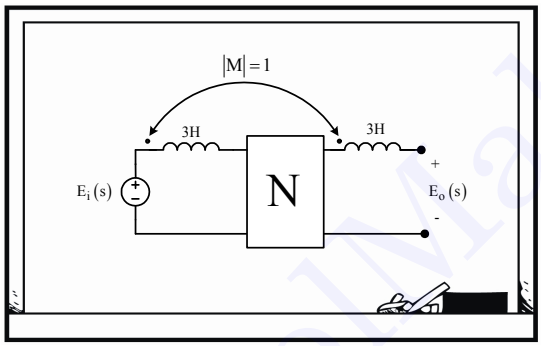
$$T=T_1.T_2=\begin{bmatrix}0 & -\alpha\\-\frac{1}{\alpha} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -\alpha\\-\frac{1}{\alpha} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}+1 & 0\\0 & +1\end{bmatrix}$$

و درنهایت برای کل شبکه داریم:

$$V_1 = +V_2 \quad , \quad I_1 = -I_2$$

با توجه به روابط بالا متوجه می‌شویم که ماتریس Z و Y وجود ندارد، ولی ماتریس H موجود است.
پس گزینه ۴ درست است.

۵ـ ماتریس امپدانس دوقطبی N شکل زیر به صورت $Z=\begin{bmatrix} S & 4S \\ 3S & 2S \end{bmatrix}$ معلوم است. نسبت $\frac{E_o(S)}{E_i(S)}$ را تعیین کنید.



۱) صفر ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 3

با توجه به ماتریس امپدانس داده‌شده، برای دوقطبی N داریم:

$$V_1 = SI_1 + 4SI_2$$
$$V_2 = 3SI_1 + 2SI_2$$

و برای E_i و E_o هم با دو KVL خواهیم داشت:

$$E_i = 3SI_1 - SI_2 + V_1$$
$$E_o = 3SI_2 - SI_1 + V_2$$

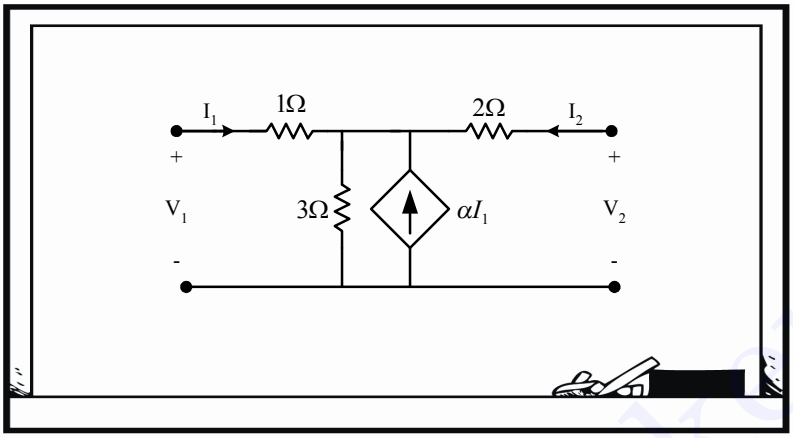
و V_1 و V_2 را هم در روابط E_i , E_o قرار می‌دهیم. قبل از قرار دادن، باید توجه داشته باشیم که I_2 برابر صفر است؛ پس:

$$E_i = 3SI_1 + SI_1 = 4SI_1$$
$$E_o = -SI_1 + 3SI_1 = 2SI_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{E_o}{E_i} = \frac{1}{2}$$

پس گزینه ۳ درست است.

www.ControlMakers.ir

۶ـ به ازای چه مقدار از α، دوقطبی زیر دارای پارامترهای ادمیتانس نیست؟



۱) $\frac{11}{6}$ ۲) $-\frac{11}{6}$ ۳) $\frac{6}{11}$ ۴) $-\frac{6}{11}$

خُب، دترمینان ماتریس امپدانس، باید صفر باشد تا ماتریس ادمیتانس نداشته باشیم.

برای رسیدن به ماتریس امپدانس هم باید بعد از KCL بازی، دو KVL درحلقه‌ها بزنیم:

$$V_1 = I_1 + 3\left(I_1 + \alpha I_1 + I_2\right)$$

$$V_2 = 2I_2 + 3\left(I_1 + \alpha I_1 + I_2\right)$$

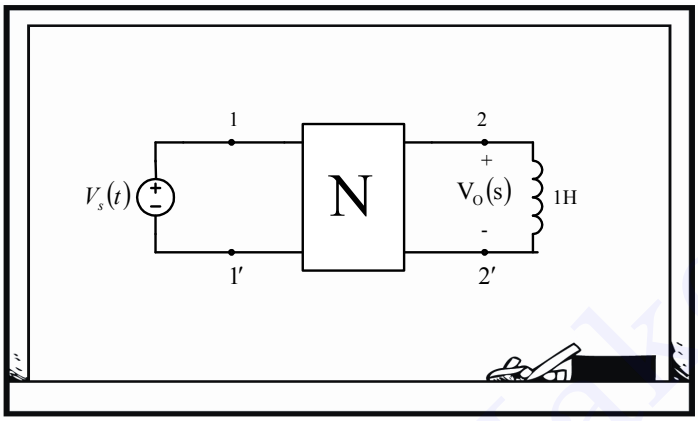
$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\alpha+4 & 3 \\ 3\alpha+3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad |Z| = 5(3\alpha+4) - 3(3\alpha+3) = 6\alpha + 11 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{-11}{6}$$

پس گزینهٔ ۲ درست است.

www.ControlMakers.ir

۷ـ پارامترهای C و D از ماتریس انتقال $T=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ برای یک دوقطبی متقارن و متقابل N به صورت $D=2S^2+1$ و $C=4S$ داده شده است. اگر از این دوقطبی در ترکیبی به صورت زیر استفاده شود، در این صورت تابع شبکه $H(S)=\frac{V_o(S)}{V_s(S)}$ برابر است با:



۱) $\frac{2S^2+1}{2S^6+3S^4+7S^2+1}$ ۲) $\frac{2S^2+1}{2S^4+19S^2+2}$ ۳) $\frac{1}{S^4+3S^2+1}$ ۴) $\frac{1}{3S^2+2}$

چون دوقطبی متقارن است، پس:

$$A=D=2S^2+1$$

و چون متقابل است، داریم:

$$AD-BC=1$$

$$\Rightarrow \left(2S^2+1\right)^2-B4S=1 \Rightarrow B=S^3+S$$

پس ماتریس انتقال به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2S^2+1 & S^3+S \\ 4S & 2S^2+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_o \\ -I_o \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow V_s=\left(2S^2+1\right)V_o-\left(S^3+S\right)I_o$$

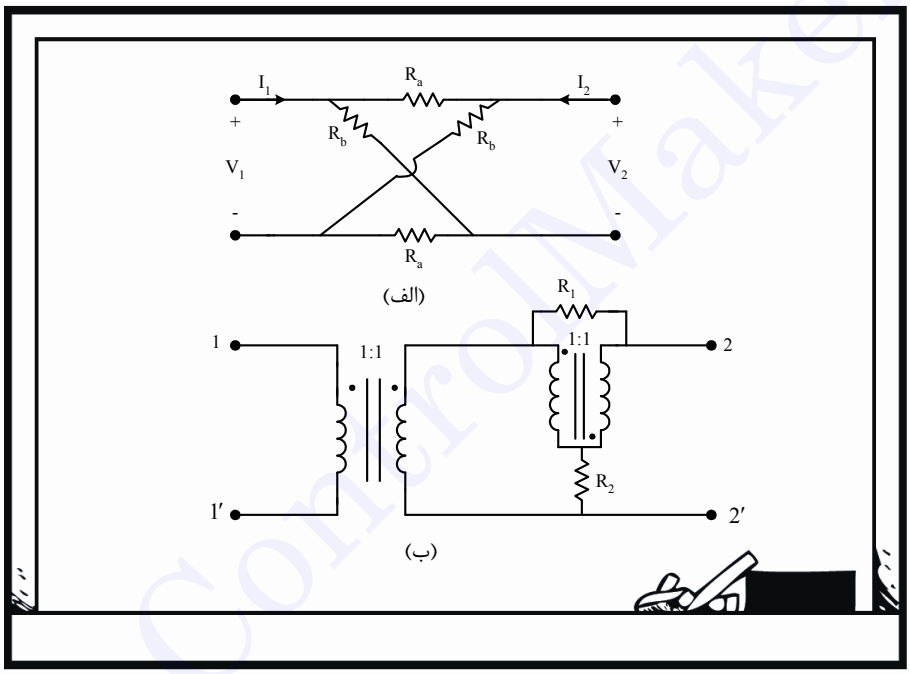
www.ControlMakers.ir

و درضمن می‌دانیم که $V_o=-SI_o$، پس:

$$V_s=\left(2S^2+1\right)V_o-\left(S^3+S\right)\frac{V_o}{-S} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_o}{V_s}=\frac{1}{3S^2+2}$$

پس گزینه ۴ درست است.

۸ـ شرط اینکه دوقطبی شکل (ب) معادل دوقطبی شکل (الف) باشد، آن است که: (مهندسی برق ۷۶)



۱) $R_2=2R_b \quad , \quad R_1=\frac{1}{2}R_a$

۲) $R_2=\frac{1}{2}R_b \quad , \quad R_1=2R_a$

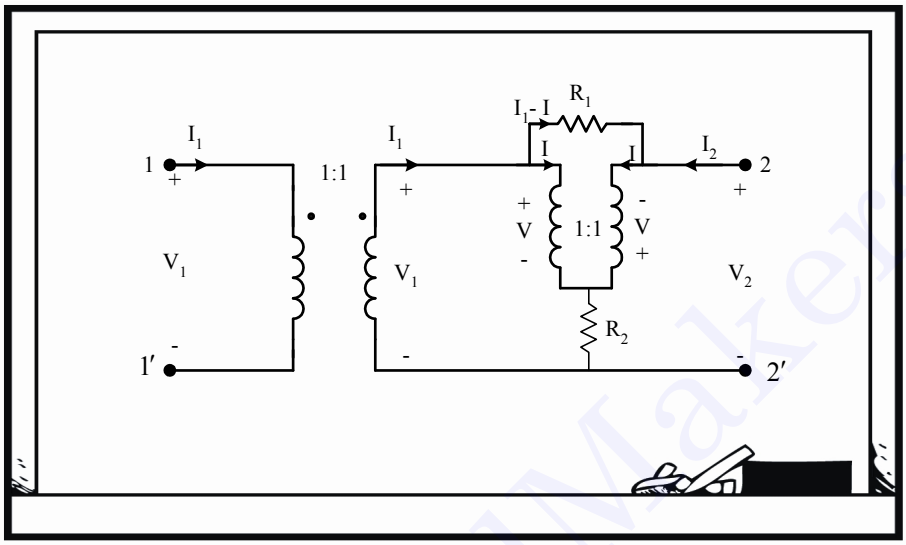
۳) $R_2=2R_a \quad , \quad R_1=\frac{1}{2}R_b$

۴) $R_2=\frac{1}{2}R_a \quad , \quad R_1=2R_b$

باید یکی از ماتریس‌ها را که راحت‌تر است، برای دو مدار بنویسیم و معادل قرار دهیم. مثلاً برای مدار (الف) داریم:

$$Z=\begin{bmatrix}\frac{R_a+R_b}{2} & \frac{R_b-R_a}{2}\\ \frac{R_b-R_a}{2} & \frac{R_a+R_b}{2}\end{bmatrix}$$

و برای مدار (ب) بعد از KCL و KVL بازی داریم:



$$I_1 - I + I_2 = I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{I_1 + I_2}{2}$$

حالا کافی است V را هم برحسب I_1 و I_2 به دست آوریم. با نوشتن KVL در حلقه وسطی داریم:

$$V + V = R_1\left(I_1 - I\right) \quad \Rightarrow \quad V = \frac{R_1\left(I_1 - I\right)}{2} = \frac{R_1}{2}\left(\frac{I_1}{2} - \frac{I_2}{2}\right)$$

با نوشتن KVL در حلقهٔ 1، سطر اول ماتریس Z به دست می‌آید:

$$V_1 = V + R_2 2I = \frac{R_1}{2}\left(\frac{I_1}{2} - \frac{I_2}{2}\right) + R_2 I_1 + R_2 I_2 = \left(\frac{R_1}{4} + R_2\right) I_1 + \left(R_2 - \frac{R_1}{4}\right) I_2$$

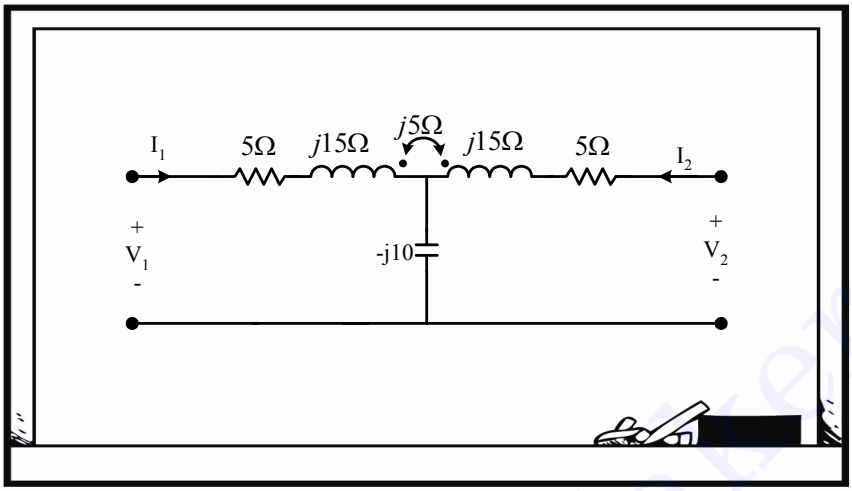
حالا می‌توانیم پارامترهای دو ماتریس را برابر قرار دهیم:

$$\begin{aligned} \frac{R_a + R_b}{2} &= \frac{R_1}{4} + R_2 \\ \frac{R_b - R_a}{2} &= R_2 - \frac{R_1}{4} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} R_2 &= \frac{R_b}{2} \\ R_1 &= 2R_a \end{aligned}$$

پس گزینه ۲ درست است.

www.ControlMakers.ir

۹ـ پارامترهای ماتریس انتقال T دوقطبی شکل زیر کدام است؟ (مهندسی برق ۷۷)



۱) $\begin{bmatrix} 1-j1 & 10-j5 \\ -j-j0.2 & 1-j1 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -1+j1 & -10-j5 \\ j0.2 & 1-j1 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 1+j1 & -10+j5 \\ j0.2 & -1+j1 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 1-j1 & -10+j5 \\ -j0.2 & -1+j1 \end{bmatrix}$

با KVL زدن در حلقه‌ها داریم:

$$V_1=(5+j15)I_1+j5I_2-j10(I_1+I_2)$$
$$V_2=(5+j15)I_2+j5I_1-j10(I_1+I_2)$$

پس، از رابطه دوم داریم:

$$I_1=j0.2V_2+(1-j)I_2$$

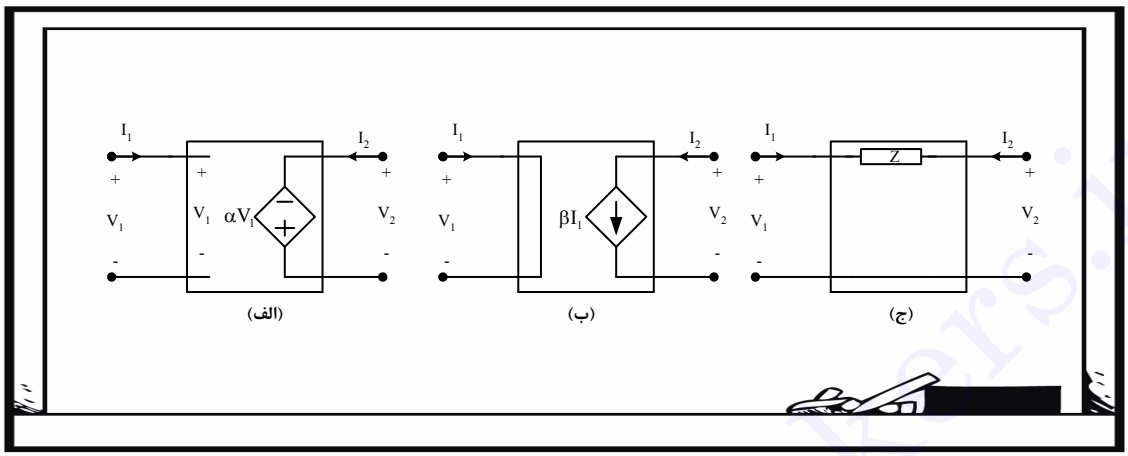
که تنها در گزینه ۳ صدق می‌کند و برای حل کامل...

باید رابطه اخیر را در رابطه اول جایگزین کنیم.

پس گزینه ۳ درست است.

www.ControlMakers.ir

۱۰ـ کدام دوقطبی دارای پارامترهای H نیست؟ (مهندسی برق ۷۷)



۱) الف ۲) ب ۳) الف و ج ۴) ج و ب

برای ماتریس H داریم:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

پس برای مدار (ب) داریم:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

و برای مدار (ج) داریم:

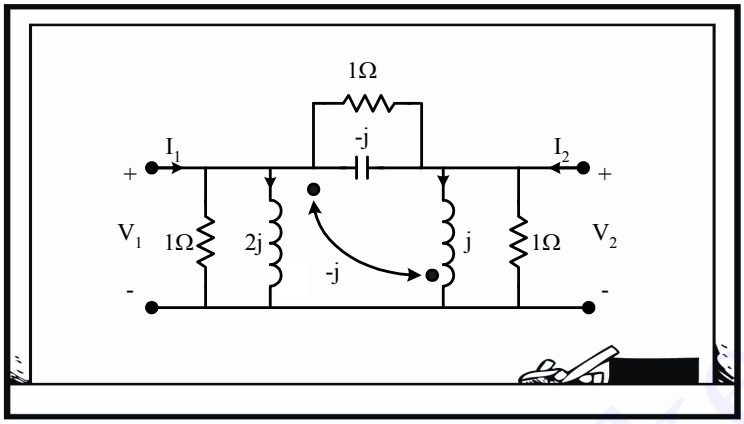
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

پس مدار الف، پارامتر H ندارد و این هم از ابتدا مشخص بود. چون $I_1 = 0$ است، ضرایب I_1 که h_{11} و h_{21} هستند، نامشخص خواهند بود.

گزینه ۱ درست است.

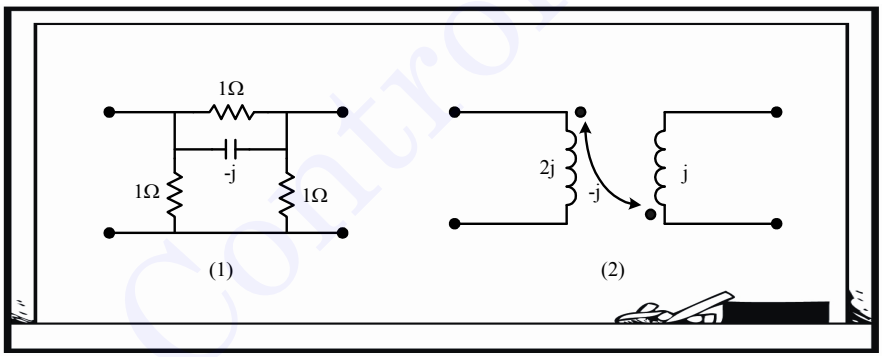
www.ControlMakers.ir

۱۱ـ در دوقطبی شکل زیر، پارامتر ادمیتانس y_{12} در حالت دایمی سینوسی کدام است؟ (مهندسی برق ۸۲)



۱) 2 ۲) $-(1+2j)$ ۳) $1-2j$ ۴) $2-j$

مثل تمرینی که قبلاً حل کردیم، دو دوقطبی موازی یکدیگر در نظر می‌گیریم:



برای مدار ۱ داریم:

$$Y=\begin{bmatrix} 2+j & -(1+j) \\ -(1+j) & 2+j \end{bmatrix}$$

و برای مدار ۲، نوشتن ماتریس Z آسان‌تر است:

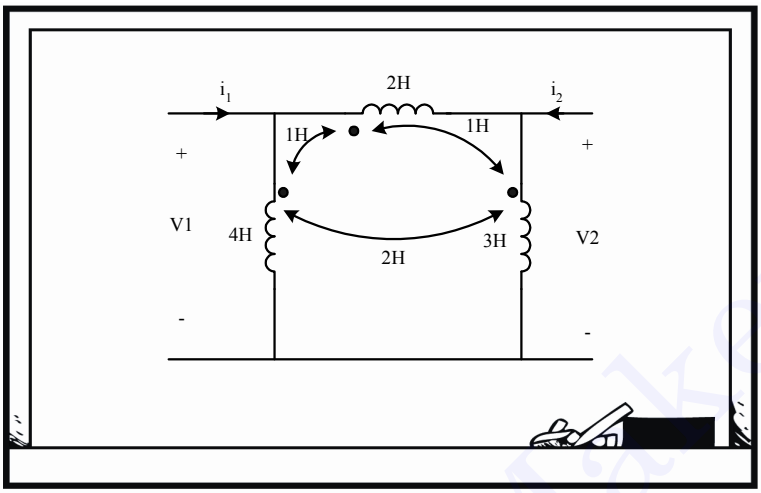
$$Z=\begin{bmatrix} 2j & -j \\ -j & j \end{bmatrix} \Rightarrow Y=Z^{-1}=\begin{bmatrix} -j & -j \\ -j & -2j \end{bmatrix}$$

و حالا دو ماتریس را با یکدیگر جمع کنیم:

$$Y=Y_1+Y_2=\begin{bmatrix} 2 & -1-2j \\ -1-2j & 2-j \end{bmatrix} \Rightarrow Y_{12}=-(1+2j)$$

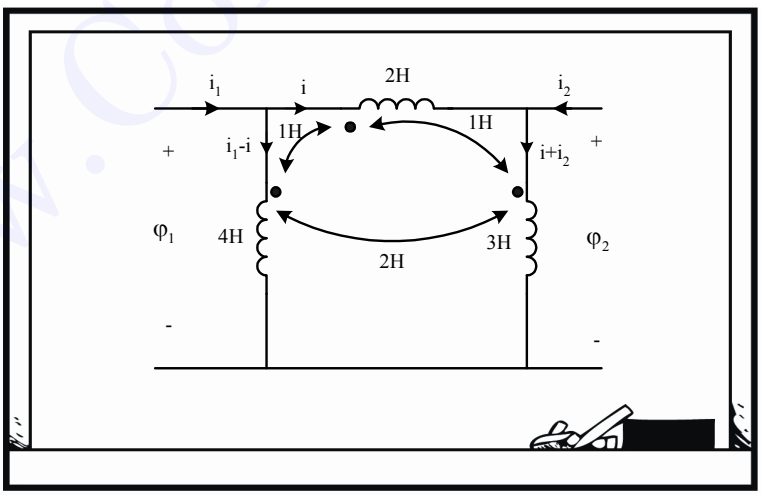
پس گزینه ۲ درست است.

۱۲ـ ماتریس پارامترهای z دوقطبی شکل زیر کدام است؟ (تمام کمیت‌ها برحسب هانری) (مهندسی برق ۸۳)



۱) $\begin{bmatrix} 3.8s & 2.4s \\ 2.4s & 2.2s \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 3.2s & 2.2s \\ 2.2s & 3.8s \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 3.8s & 2.4s \\ 2.4s & 3.2s \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 3.2s & 2.4s \\ 2.4s & 2.2s \end{bmatrix}$

با i_1 و i_2 نمی‌توانیم KCL بازی را شروع کنیم، پس یک متغیر i اضافه کرده و برای پرهیز از تکرار s ، از KφL به‌جای KVL استفاده می‌کنیم. اگر یک KφL در کل حلقه بزنیم، i برحسب i_1 و i_2 به دست می‌آید و مسئله حل است.



$$4(i_1-i)+i+2(i+i_2)=\left[2i+(i_1-i)+(i+i_2)\right]+\left[3(i+i_2)+2(i_1-i)+i\right]$$

$$\Rightarrow \quad 4i_1+2i_2-i=\left[i_1+i_2+2i\right]+\left[2i_1+3i_2+2i\right]$$

www.ControlMakers.ir

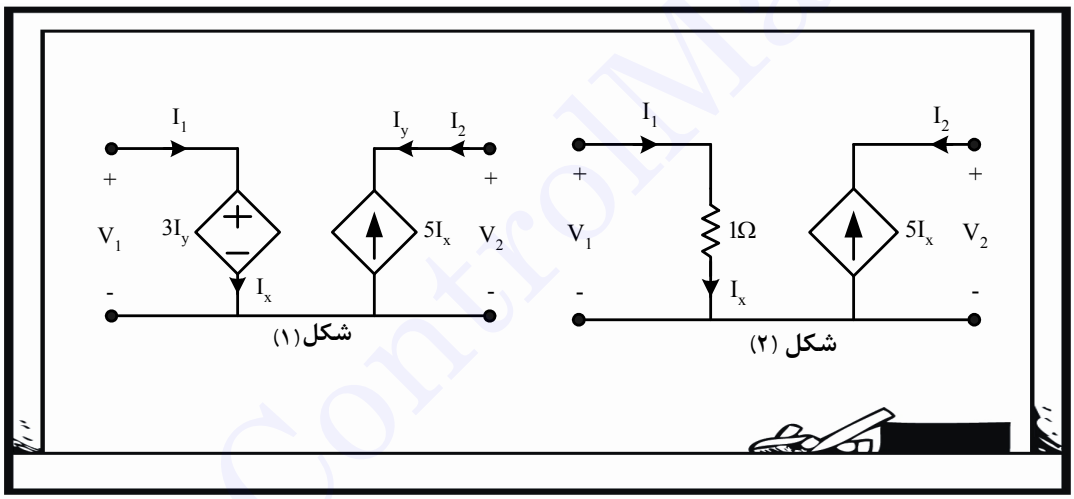
$$\Rightarrow \quad i=\frac{i_1}{5}-\frac{2}{5}i_2 \quad \Rightarrow \quad Z_{11}=\left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0}=\frac{S\left(4I_1-\frac{1}{5}I_1\right)}{I_1}=3.8s$$

حالا برویم دنبال Z_{22} :

$$Z_{22}=\left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0}=\frac{S\left(3I_2-\frac{4}{5}I_2\right)}{I_2}=2.2s$$

پس گزینه ۱ درست است.

۱۳ـ برای دو مدار دوقطبی شکل زیر کدام‌یک از عبارات داده‌شده درست است؟ (مهندسی برق ۸۴)



۱) برای هر دو شکل، مدل امپدانسی وجود دارد ولی مدل ادمیتانسی وجود ندارد.

۲) برای هر دو شکل، مدل ادمیتانسی وجود دارد ولی مدل امپدانسی وجود ندارد.

۳) مدار شکل (۲) مدل ادمیتانس و امپدانسی ندارد ولی مدار (۱) مدل امپدانسی دارد.

۴) مدار شکل (۱) مدل امپدانسی ندارد ولی مدل ادمیتانسی دارد و مدار شکل (۲) مدل امپدانسی و امیتانسی ندارد.

برای مدار شکل (۱) داریم:

$$\begin{matrix} V_1=I_1 \\ I_2=-5I_1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad Y=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

ولی چون رابطه‌ای برای V_2 نداریم، ماتریس Z وجود ندارد.

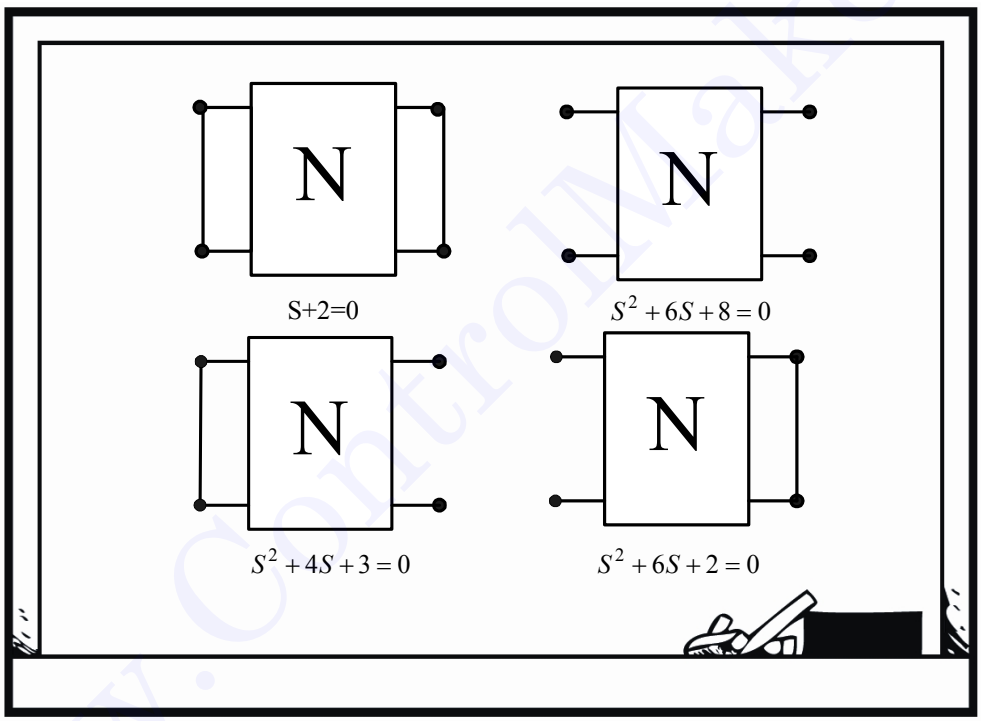
www.ControlMakers.ir

مدار شکل (۲) هم وضعیت مشابهی دارد و باز رابطه‌ای برای V_2 نداریم و ماتریس Z وجود ندارد:

$$\begin{matrix} V_1 = 3I_2 \\ I_2 = -5I_1 \end{matrix} \Rightarrow Y = \begin{bmatrix} -\frac{1}{15} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

پس گزینه ۲ درست است.

۱۴ـ معادله مشخصه یک دوقطبی در حالت‌های زیر مشخص شده است. $Z_{11}(s)$ کدام گزینه است؟ (مهندسی برق ۸۴)



۱) $\frac{s+2}{s^2+4s+3}$ ۲) $\frac{s^2+6s+2}{s+2}$ ۳) $\frac{s^2+6s+2}{s^2+6s+8}$ ۴) $\frac{s^2+4s+3}{s^2+6s+8}$

باید ببینیم برای Z_{11} از کدام‌یک از این حالت‌ها باید استفاده کنیم:

دو تا از حالت‌ها $I_2 = 0$ صفر دارند.

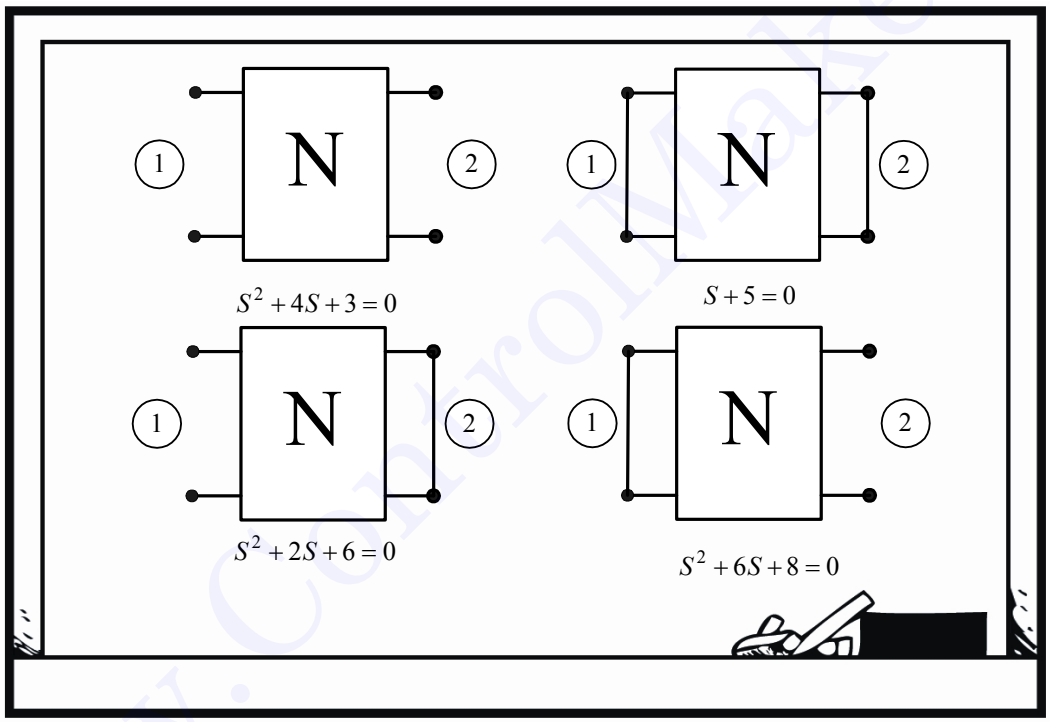
www.ControlMakers.ir

$$Z_{11}=\left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0}=\frac{\text{صورت}}{\text{مخرج}}$$

حالا اگر مخرج Z_{11} را بخواهیم، باید I_1 را به عنوان ورودی صفر کنیم و بعد معادله مشخصه آن حالت، ضریب خروجی V_1 یا همان مخرج Z_{11} می‌شود که در اینجا $\left(S^2+6s+8\right)$ است. برای صورت هم باید V_1 را صفر کنیم و معادله مشخصه حاصل، صورت Z_{11} و ضریب I_1 است که برابر $\left(S^2+4S+3\right)$ است.

پس گزینه ۴ صحیح است.

۱۵ـ معادله مشخصه یک دوقطبی در حالت‌های زیر مشخص شده است. ادمیتانس y_{22} کدام است؟ (مهندسی برق ۸۵)



۱) $\frac{s^2+4s+3}{s+5}$ ۲) $\frac{s+5}{s^2+6s+8}$ ۳) $\frac{s+5}{s^2+2s+6}$ ۴) $\frac{s^2+6s+8}{s+5}$

صورت و مخرج را جداگانه با استفاده از این چهار حالت باید به دست آوریم:

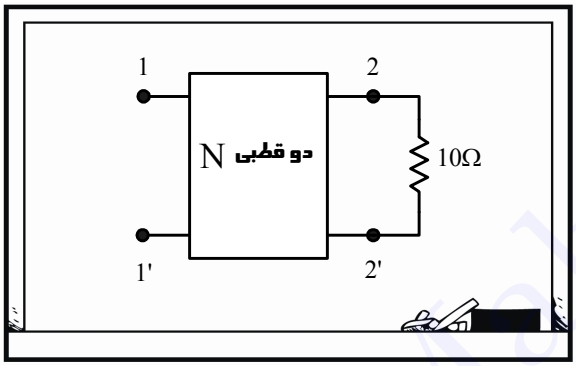
$$Y_{22}=\left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0}=\frac{\text{صورت}}{\text{مخرج}}$$

برای مخرج علاوه بر V_1، V_2 را هم صفر می‌کنیم و $(s+5)$ ضریب I_2 می‌شود.

و برای صورت هم برعکس علاوه بر V_1 باید I_2 را هم صفر کنیم که (s^2+6s+8) ضریب V_2 خواهد بود.

پس گزینه ۴ درست است.

۱۶ـ دوقطبی N دارای ماتریس پارامترهای امپدانس $Z=\frac{10s}{s^2+25}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ است. این دوقطبی را به مقاومت 10 اهمی ختم می‌کنیم. Q مدار را تعیین کنید. (مهندسی برق ۸۵)

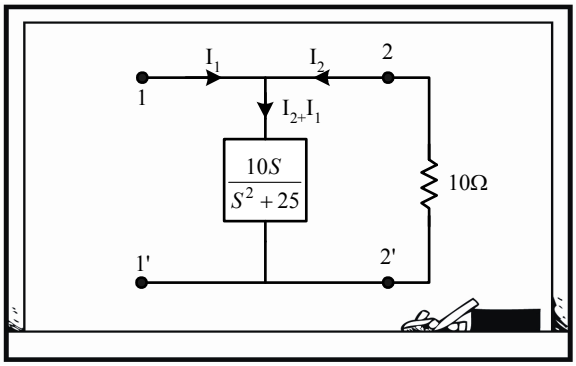


۱) 1 ۲) 5 ۳) 10 ۴) $\frac{1}{5}$

استاد یک فرمولی ضمن درس گفته بودند که از روی ماتریس Z دوقطبی و Z_L، می‌توانستیم Z_{in} را به دست آوریم. صبر کنید، الان پیدایش می‌کنم...، آها اینجاست:

$$Z_{in}=Z_{11}-\frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22}+Z_L}$$

بله. خوبه یادآوری شد که حتماً حفظش کنیم ولی به نظرم ماتریس Z این سؤال خیلی سر راست داده شده و مشخص است. معلومه که داخل شبکهٔ N چه خبره:



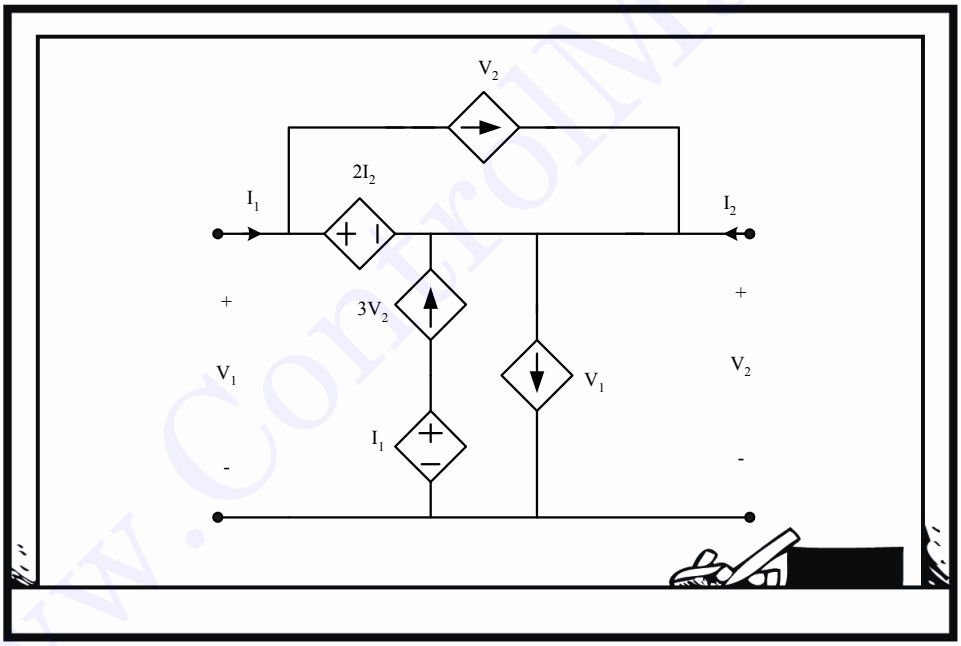
جالب بود، پس ادمیتانس ورودی راحت به دست می‌آید:

$$Y_{in} = \frac{s^2+25}{10s} + \frac{1}{10} = \frac{s^2+25+s}{10s}$$

حالا می‌توانیم بگوییم $I = VY = 0$ یعنی صورت Y، معادله مشخصه سیستم است؛ پس داریم:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\sqrt{25}}{1} = 5$$

۱۷ـ ماتریس پارامترهای هایبرید H دوقطبی شکل زیر کدام است؟ (مهندسی برق ۸۵)



۱) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

معادله ماتریس هایبرید به این شکل است:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [H] \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

www.ControlMakers.ir

حالا شروع می‌کنیم هرچقدر می‌توانیم رابطه بنویسیم، مثلاً KVL در کل حلقه و KCL در گره پایینی:

$$\left.\begin{aligned}&KVL: V_1 = 2I_2 + V_2\\&KCL: I_1 + 3V_2 - V_1 + I_2 = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow I_1 + 3V_2 - \left(2I_2 + V_2\right) + I_2 = 0$$

حالا سطر دوم ماتریس هایبرید را به دست می‌آوریم:

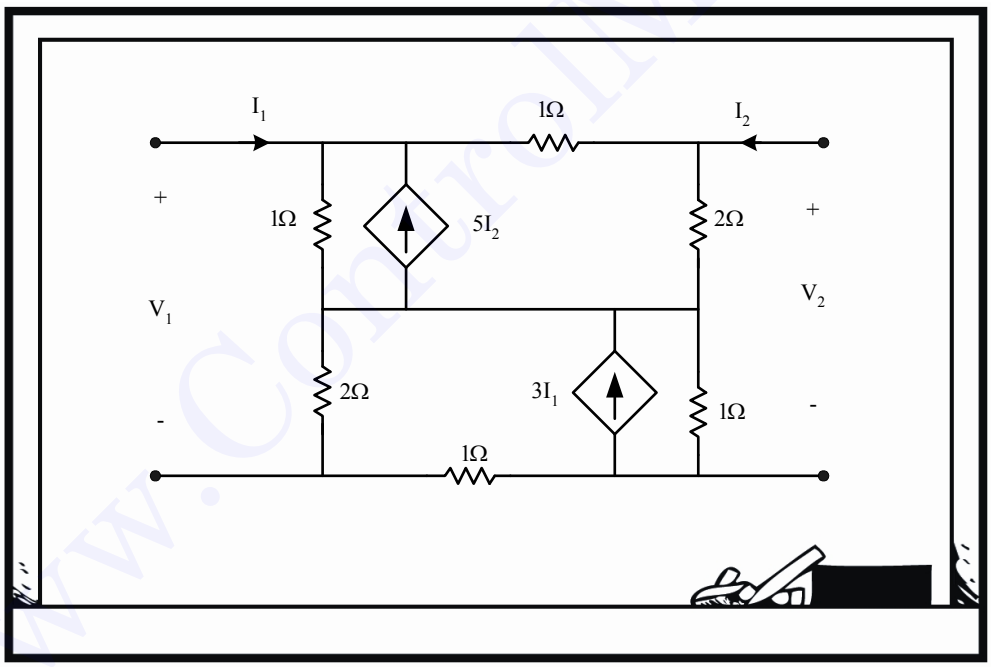
$$I_2 = I_1 + 2V_2$$

البته این همه دردسر لازم نبود، همان KVL که نوشتید کافی بود تا رابطهٔ زیر را بین گزینه‌ها چک کنید:

$$V_1 - 2I_2 = V_2 \Rightarrow \begin{cases}h_{11} - 2h_{21} = 0\\h_{12} - 2h_{22} = 1\end{cases}$$

پس گزینه ۴ درست است.

۱۸ـ ماتریس پارامترهای z دوقطبی شکل زیر کدام است؟ (مهندسی برق ۸۵)



۱) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}13 & 19\\13 & 17\end{pmatrix}$

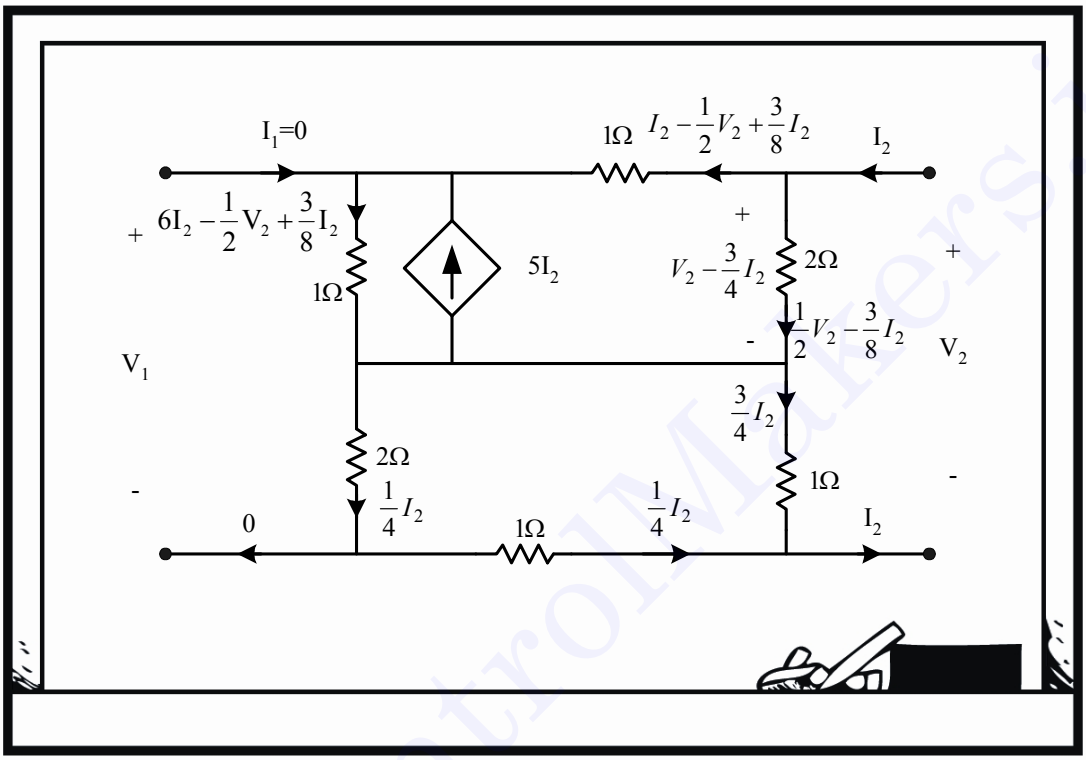
۲) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}13 & 19\\17 & 13\end{pmatrix}$

۳) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}13 & 17\\13 & 19\end{pmatrix}$

۴) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}13 & 17\\19 & 13\end{pmatrix}$

www.ControlMakers.ir

مثلاً می‌توانیم I_1 را صفر بگیریم و بعد Z_{22} یا Z_{12} را پیدا کنیم که شکل مدار بعد از KCL و KVL بازی این‌طور می‌شود:



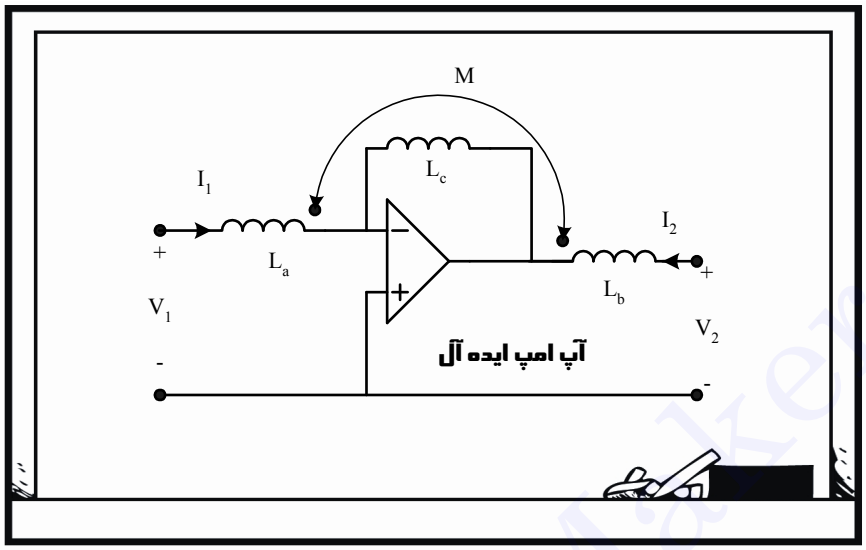
$$V_2 = 1\left(I_2 - \frac{1}{2}V_2 + \frac{3}{8}I_2\right) + 1\left(6I_2 - \frac{1}{2}V_2 + \frac{3}{8}I_2\right) + (2+1)\frac{1}{4}I_2$$

$$\Rightarrow \quad V_2 = \frac{17}{4}I_2 \quad \Rightarrow \quad Z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = \frac{17}{4}$$

پس گزینه ۱ درست است.

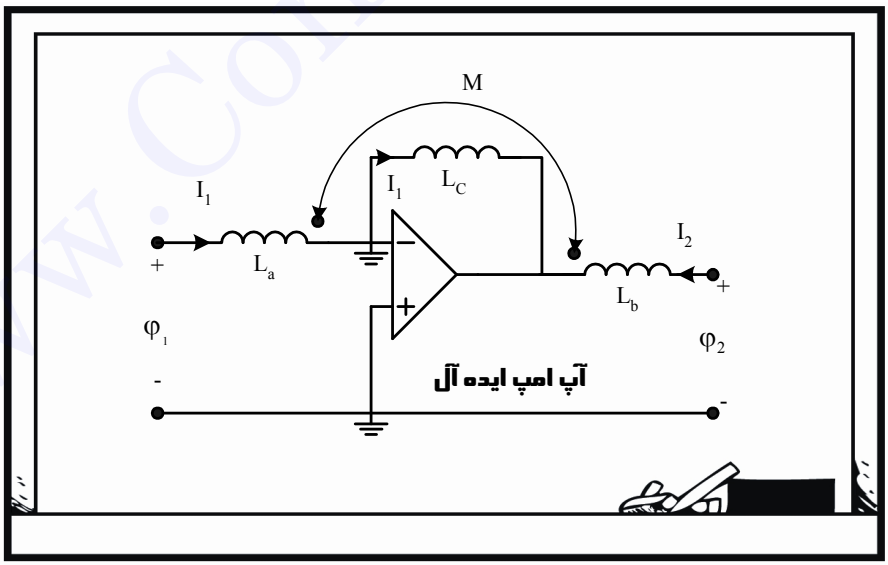
www.ControlMakers.ir

۱۹ـ ماتریس اندوکتانس دوقطبی شکل زیر کدام است؟ (مهندسی برق ۸۶)



۱) $\begin{bmatrix} L_a & -M \\ -L_c - M & L_b \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} L_a & -M \\ L_c - M & L_b \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} L_a & M \\ -L_c - M & L_b \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} L_b & -M \\ -L_c - M & L_a \end{bmatrix}$

با زمین در نظر گرفتن سرهای ورودی آپ‌امپ و دو $K\varphi L$ در طرفین داریم:



$$\varphi_1 = L_a I_1 - M I_2$$

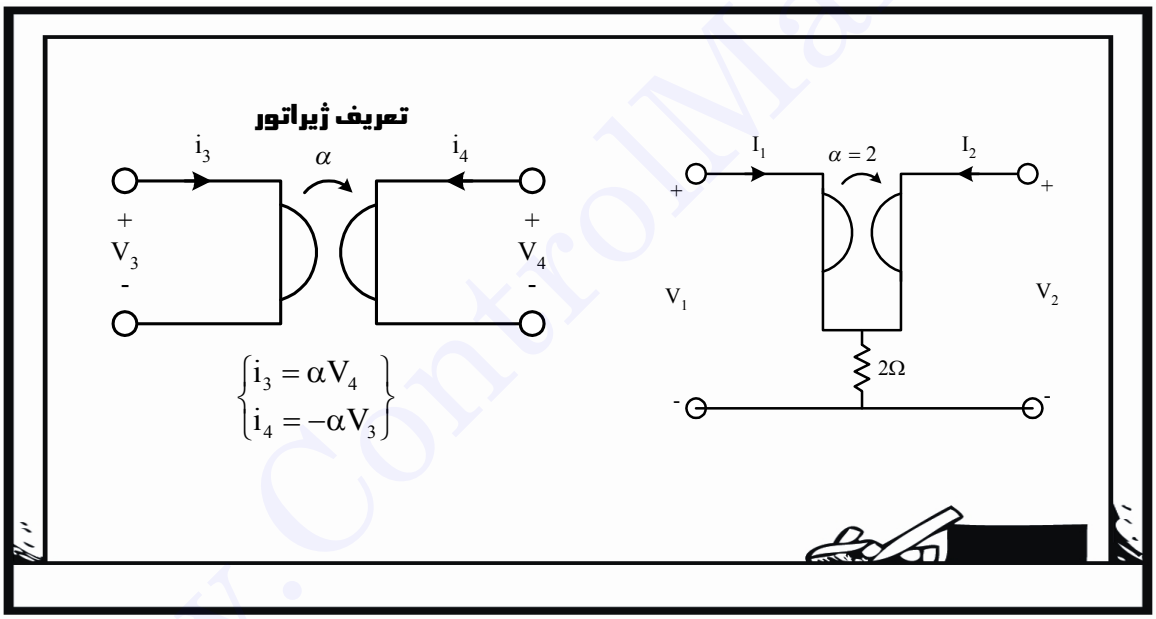
$$\varphi_2 = L_b I_2 - M I_1 - L_c I_1$$

آخرش جریان L_c را چطور نوشتید؟

در مورد آپ‌امپ دو نکته اساسی داشتیم، یکی اینکه ولتاژ سرهای ورودی با هم برابرند و دوم اینکه جریان سرهای ورودی صفر است؛ پس کل I_1 وارد L_c می‌شود.

پس گزینه ۱ درست است.

۲۱ـ در دوقطبی شکل زیر، ماتریس انتقال T کدام است؟ (تعریف ژیراتور در شکل داده شده است) (مهندسی برق ۸۶)



۱) $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

در این مدار هم نوشتن معادلات ماتریس Z کار راحتی است؛ پس باز باید سطر دوم را بنویسیم و با مرتب کردن سطر دوم، ماتریس T را بیابیم.

www.ControlMakers.ir

یادم آمد، من ادامه می‌دهم:

$$V_2 = V_4 + 2(I_1 + I_2) = \frac{I_1}{2} + 2(I_1 + I_2)$$

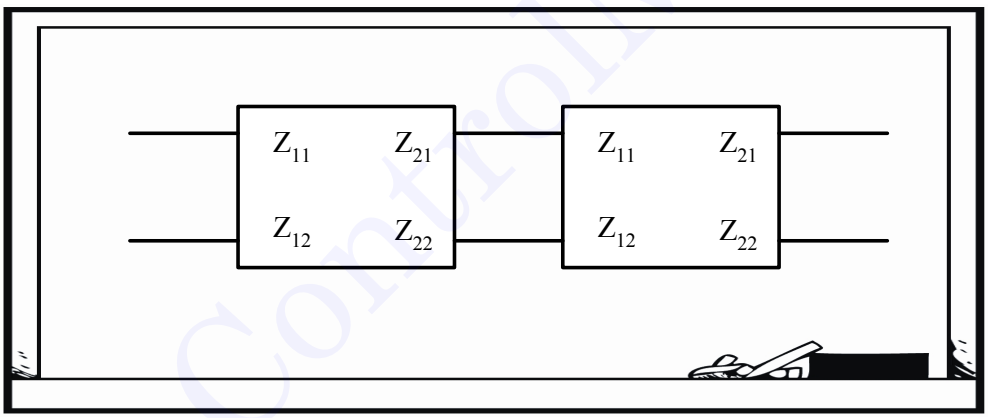
$$V_2 = \frac{5}{2} I_1 + 2I_2$$

$$\left.\begin{array}{l} V_2 = \frac{5}{2} I_1 + 2I_2 \\ \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad I_1 = \frac{2}{5} V_2 - \frac{4}{5} I_2$$

پس گزینه ۱ درست است.

۲۲ـ دو شبکه دوقطبی مشابه (با پارامترهای Z) به طور متوالی به یکدیگر متصل شده‌اند. پارامترهای Z_{12} شبکه معادل کدام است؟

(مهندسی برق ۸۷)



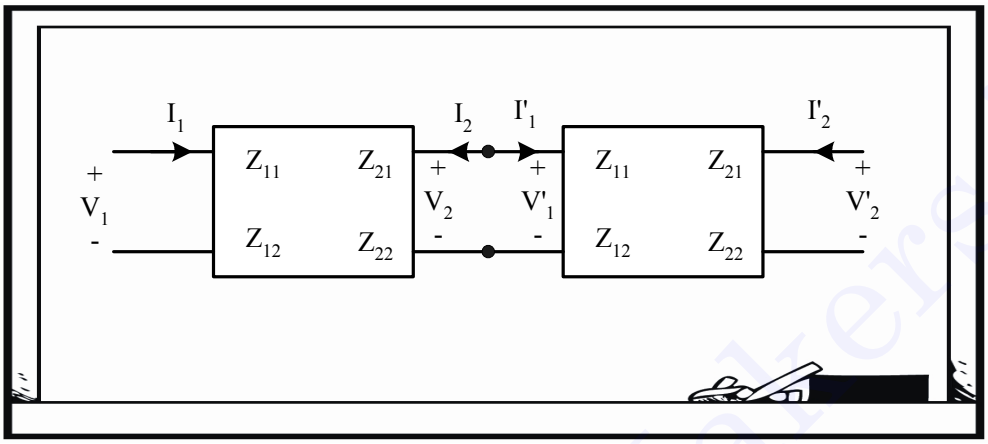
۱) $\frac{Z_{12}}{Z_{11} + Z_{22} + Z_{12}}$

۲) $\frac{Z_{11} Z_{12}}{Z_{11} + Z_{22}}$

۳) $\frac{Z_{22}}{Z_{11} + Z_{22}}$

۴) $\frac{(Z_{12})^2}{Z_{11} + Z_{22}}$

اگر سرهای دوقطبی‌ها را مانند شکل زیر نامگذاری کنیم، داریم:



$$Z_{12t}=\left.\frac{V_1}{I'_2}\right|_{I_1=0}$$

برای V_1 یک رابطه بیشتر نمی‌توانیم بنویسیم و آن هم $V_1=Z_{21}I_2$ است. پس باید به دنبال یافتن I_2 برحسب I'_2 باشیم.

و رابطه دیگری که I_2 در آن وارد می‌شود، به دست آوردن V_2 است:

$$V_2=Z_{22}I_2$$

و از طرف دیگر $V_2=V'_1$ است، پس:

$$Z_{22}I_2=Z_{11}I'_1+Z_{21}I'_2=Z_{11}\left(-I_2\right)+Z_{21}I'_2$$

$$\Rightarrow\quad I_2=\frac{Z_{21}I'_2}{Z_{11}+Z_{22}}\quad\Rightarrow\quad Z_{12t}=\left.\frac{V_1}{I'_2}\right|_{I_1=0}=\frac{\left(Z_{21}\right)^2}{Z_{11}+Z_{22}}$$

پس گزینه ۴ درست است.

فصل ۱۲

قضایای شبکه

مقدمه

و سرانجام فصل آخر هم رسید! به همین زودی! سفر خوبی بود؛ به من که خیلی خوش گذشت؛ و بالاخره در فصل آخر چند قضیه جالب در درس مدار فرا می‌گیریم. اگرچه تاکنون از برخی از آن‌ها استفاده کرده‌ایم؛ اما امروز می‌خواهیم به چشم «قضیه» به آن‌ها نگاه کنیم و می‌خواهیم به مدارها نگاه شبکه‌ای بکنیم. این بحث از جمله مباحث بسیار ظریف و زیباست. ما در این قسمت به ۵ قضیه می‌پردازیم که البته دوتای آن‌ها در این مجال مهم‌تر به نظر می‌آیند.

۱۲ـ۱ قضیهٔ جمع آثار

اگر شبکهٔ N ، خطی و دارای پاسخ یکتا باشد، واجد شرایط این قضیه است به این ترتیب که:

«پاسخ حالت صفر ناشی از اعمال همزمان چند ورودی برابر است با مجموع پاسخ‌های حالت صفر ناشی از اعمال تک‌تک منابع[۱]»

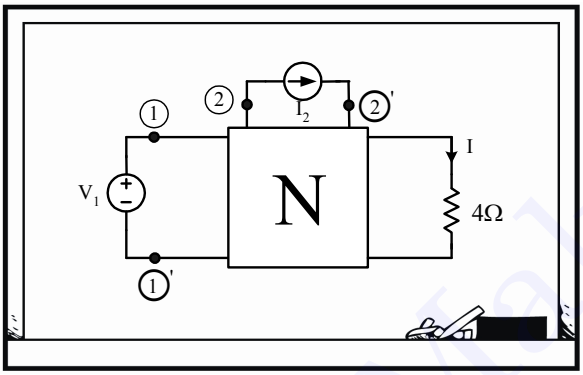
۱ـ البته باید منابع از هم مستقل باشند تا قضیهٔ جمع آثار برقرار باشد.

www.ControlMakers.ir

www.ControlMakers.ir

به عبارت دیگر برای به دست آوردن خروجی، اثر تک‌تک منابع را جداجدا به دست می‌آوریم و چون شبکهٔ مورد نظرمان خطی است، خروجی کل برابر مجموع آن پاسخ‌ها می‌شود.

۱ـ در شکل (۱۲ـ۱)، شبکهٔ N مقاومتی و خطی تغییرناپذیر با زمان است. اگر $V_1 = 3\,V$ و $I_2 = 3\,A$ انتخاب شوند، $I = 6\,A$ می‌شود. اگر قطب $1'$ 1 اتصال کوتاه و $I_2 = -2\,A$ باشد، مقدار $I = 2\,A$ به دست خواهد آمد. اکنون $V_1 = -2\,V$ و قطب $2'$ 2 مدار باز می‌شود، در این صورت I چقدر می‌شود؟



شکل (۱ـ۱۲) شبکهٔ تمرین ۱

این مسئله مثل یک بازی است؛ از فرض وسطی شروع می‌کنم:

$$\begin{cases} I_2 = -2\,A \\ V_1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\times(-1)} \rightarrow \quad I = 2\,A$$

یعنی اثر I_2 روی I، آن است که باید (-1) برابرش کنیم؛ بنابراین در فرض اولیه که $I_2 = 3\,A$ است، اثر ناشی از آن $I = -3\,A$ می‌شود، پس اثر ناشی از منبع ولتاژ $V_1 = 3\,V$، $9A$ می‌شود، چراکه:

$$\begin{cases} I_2 = 3\,A \xrightarrow{\times(-1)} \\ V_1 = 3\,V \end{cases} \rightarrow \quad I = -3 + 9 = 6 \xrightarrow{\times 3}$$

پس اثر منبع ولتاژ V_1 روی جریان I، آن است که سه برابر شود، درنتیجه:

$$\begin{cases} I_2 = 0 \\ V_1 = -2\,V \end{cases} \rightarrow \quad I = -6\,A \xrightarrow{\times 3}$$

می‌توانستیم به این شبکه قدری سیستماتیک‌تر هم نگاه کنیم و بگوییم چون سیستم خطی است، پس خروجی برابر ترکیب خطی از ورودی‌هاست؛ یعنی:

$$I = \alpha I_2 + \beta V_1$$

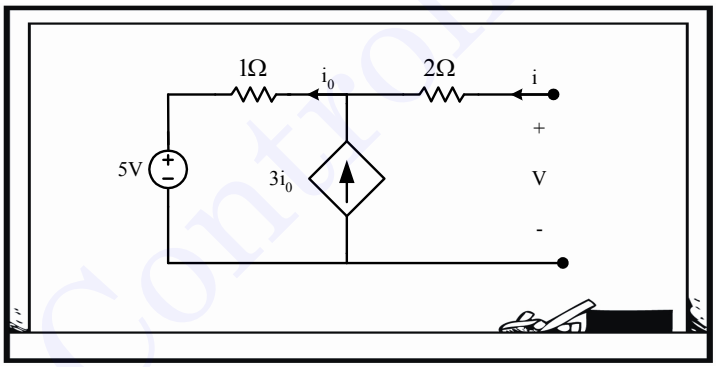
و در اصل اطلاعاتی که صورت مسئله داده، به ما کمک می‌کند تا α و β را به دست بیاوریم؛ $(+3,-1)$ لطفاً شما هم به این چشم به این مسئله نگاه کنید.

۲ـ۱۲ قضیهٔ شبکه‌های معادل تونن ـ نورتن[۱]

تنها محدودیت قضیهٔ تونن ـ نورتن، خطی بودن مدار است.[۲] در این صورت هر شبکهٔ N را می‌توان با یک منبع ولتاژ سری با یک امپدانس یا یک منبع جریان موازی با یک ادمیتانس جایگزین کرد.[۳]

۲ـ در شکل زیر مدار معادل تونن از دو سر A و B کدام است؟

۱) $5\,V$ و 1.5Ω ۲) $4\,V$ و 3Ω ۳) $5\,V$ و 2Ω ۴) $4\,V$ و 1Ω



شکل (۲ـ۱۲) مدار تمرین ۲

خیلی ساده است دیگر، از یک KCL بازی ساده می‌فهمیم که:

$$3i_0 - i_0 = 2i_0 = -i \quad \Rightarrow \quad i_0 = -\frac{1}{2}i$$

۱ـ البته این بحث را که قبلاً داشته‌ایم.

۲ـ یعنی لزومی ندارد که حتماً تغییرناپذیر با زمان هم باشد.

۳ـ فصل دوم را مرور کنید؛ لبریز بود از همین مفهوم.

www.ControlMakers.ir

و با یک KVL در حلقهٔ بیرونی مسئله حل است:

$$V = 2i - \frac{1}{2}i + 5 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{3}{2}i + 5$$

یعنی گزینهٔ ۱ درست است.

۱۲ـ۳ قضیهٔ جانشینی

تنها شرط مورد نیاز برای برقراری این قضیه، یکتایی پاسخ است.

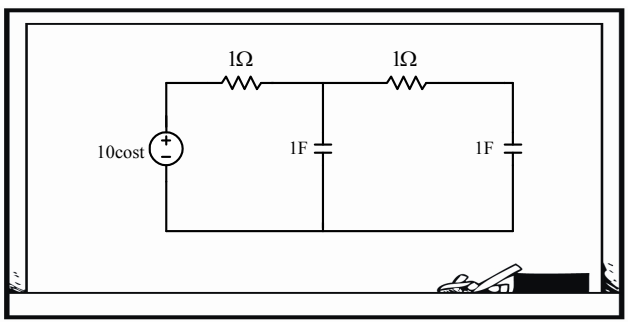
حال در مداری با شرایط بالا، اگر برای شاخهٔ K ام ـ که تزویجی با سایر شاخه‌ها ندارد ـ $V_K(t)$ و $I_K(t)$، شکل موج‌های ولتاژ و جریان باشند، می‌توان این شاخه‌ها را با منبع ولتاژ مستقلی با مقدار $V_K(t)$ و یا منبع جریان مستقلی با مقدار $I_K(t)$ تعویض کرد؛ در این صورت تمامی پاسخ‌ها در شبکهٔ جدید با شبکهٔ اولیه یکسان است.

البته مفهوم این قضیه در آزمایشگاه خیلی جالب است؛ این قضیه به ما اجازه می‌دهد که یک مقاومت را برداریم و به‌جایش یک باتری بگذاریم و آب هم از آب تکان نخورد؛ و این خیلی جالب است؛ اما در کنکور نمی‌شود مسئله خیلی عجیبی از این قضیه داد؛ چون از صورت مسئله اصل قضیه پیداست.

ببخشید، از این مبحث چگونه سؤال می‌دهند؟

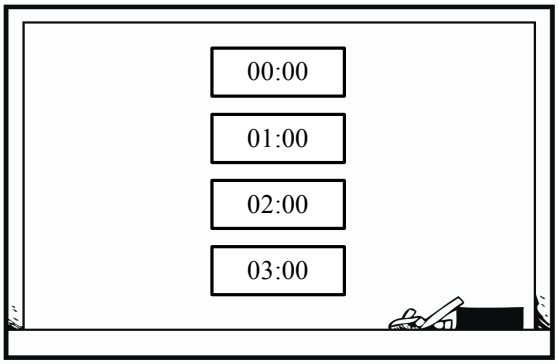
مثلاً این‌جوری:

۳ـ در مدار شکل زیر اگر بخواهیم هیچ پاسخی از مدار تغییر نکند، به‌جای خازن سمت راستی چه منبع ولتاژی بگذاریم؟



شکل (۱۲ـ۳) مدار تمرین ۳

این حرف دقیقاً قضیهٔ جانشینی است؛ به عبارت دیگر ترجمهٔ صورت این مسئله یعنی ولتاژ خازن سمت راستی را پیدا کنید. حالا یک خواهش[۱]! به خودتان ۳ دقیقه وقت بدهید و ولتاژ V_0 را پیدا کنید.

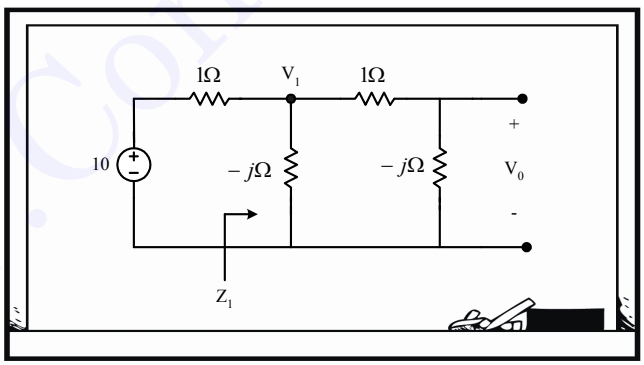


شکل (۴.۱۲) بدون شرح[۲]

حالا یک سؤال غیرتی! چند نفر به جواب آخر رسیدند؟

اگر به جواب آخر نرسیدید، لطفاً تا جایی که زورتان می‌رسد، به‌جای هر کار دیگری مسئله حل کنید، تا دستانتان شود.

اجازه بدهید حل کنم.



شکل (۵.۱۲) مراحل حل تمرین ۳

۱ـ این خواهش را لطفاً رد نکنید.

۲ـ اولاً یعنی: چیزی که عیان است، چه حاجت به بیان است؛ ثانیاً خوشا به حال آن‌هایی که قدر فاکتور زمان را دانستند و برتر از طلا بودن نعمت زمان و وقت و عمر را با عمق وجودشان چشیدند و درنتیجه مثل خورشید درخشیدند و...

www.ControlMakers.ir

www.ControlMakers.ir

مطابق شکل (۱۲ـ۵) داریم:

$$Z_1 = \frac{(1-j)(-j)}{1-j-j} = \frac{-1-j}{-2j+1} = \frac{1+j}{-1+2j}$$

و با دوبار تقسیم ولتاژ داستان تمام است.

$$V_1 = \frac{Z_1}{1+Z_1} \times 10 = \frac{10}{3}(1-j)$$

$$V_0 = \frac{-j}{1-j} \times V_1 = -\frac{10}{3}j$$

$$V_0(t) = \frac{10}{3}\sin t$$

۱۲ـ۴ قضیهٔ هم‌پاسخی (شبکه‌های متقابل)

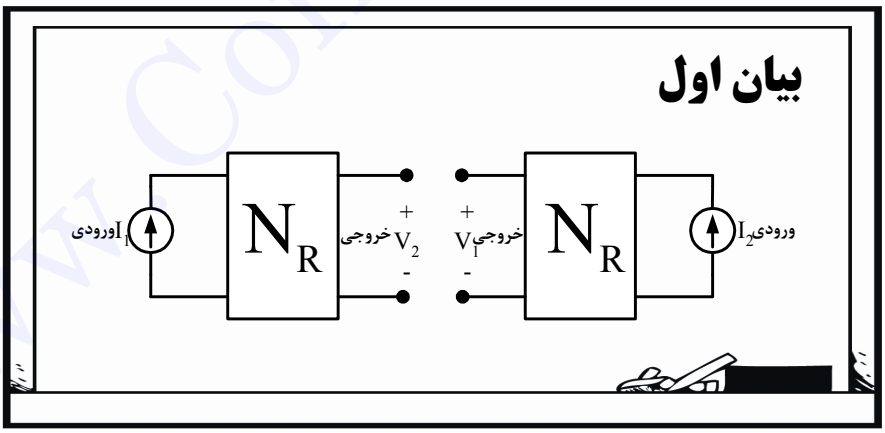
در مورد شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان به کار می‌رود که منبع وابسته و منبع مستقل و ژیراتور و شرایط اولیه نداشته باشند.

مفهوم: اگر محل اِعمال ورودی و پاسخ را تعویض کنیم، پاسخ تغییری نمی‌کند اما در **محل اِعمال** ورودی و خروجی و **نوع** ورودی و خروجی باید دقت شود.

اگر خروجی جریان بود، در سر خروجی اتصال کوتاه داریم؛ به عبارت دیگر آمپرسنج ایده‌آل (با مقاومت صفر)

و اگر خروجی ولتاژ بود، در سر خروجی مدار باز داریم؛ به عبارت دیگر ولت‌سنج ایده‌آل (با مقاومت بی‌نهایت)

بیان‌های قضیهٔ هم‌پاسخی[۱]:



شکل (۱۲ـ۶) بیان اول قضیهٔ هم‌پاسخی[۲]

۱ـ این قسمت را لطفاً با دقت و بیش از یک‌بار مطالعه کنید.

۲ـ منظور از N_R شبکهٔ هم‌پاسخ است.

اگر محل منبع جریان I_1 را با ولت‌متری با امپدانس بی‌نهایت عوض کنیم، قرائت ولت‌متر تغییری نخواهد کرد؛ یعنی در شکل (۱۲ـ۶)، هرگاه $I_1 = I_2$ باشد، آن‌گاه $V_1 = V_2$ می‌شود.

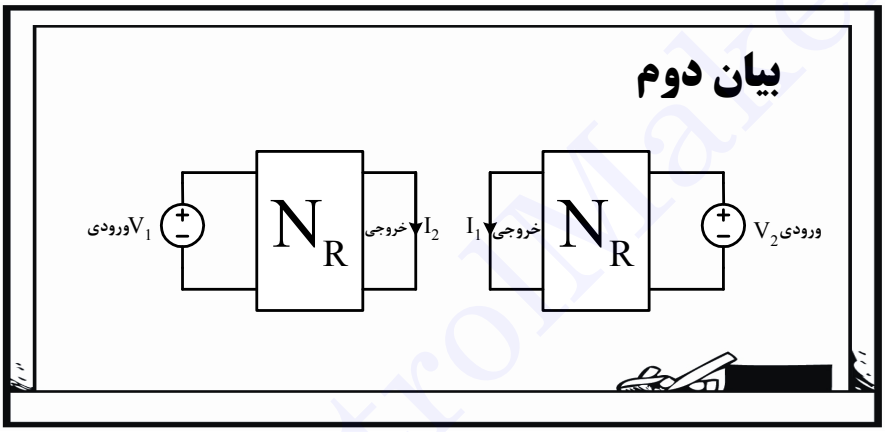
اما این بیان، یک حالت خاص است؛ در حالت کلی‌تر می‌گوییم نسبت $\frac{V_2}{I_1}$ با $\frac{V_1}{I_2}$ برابر است؛ به عبارت دیگر:

$$\frac{V_2}{I_1} = \frac{V_1}{I_2} \qquad (۱ـ۱۲)$$

و یا:

$$Z_{21} = Z_{12} \qquad (۲ـ۱۲)$$

یادتان باشد که این دو رابطه اخیر در حوزهٔ s هم درست است. یعنی اگر به $Z_{21}(s)$ و $Z_{12}(s)$ به چشم تابع تبدیل نگاه کنیم، این دو تابع تبدیل در مدارهای متقابل یا هم‌پاسخ با یکدیگر برابرند.



شکل (۱۲ـ۷) بیان دوم قضیهٔ هم‌پاسخی

اگر محل منبع ولتاژ V_1 را با آمپرمتری با امپدانس صفر عوض کنیم، قرائت آمپرمتر تغییری نخواهد کرد؛ یعنی در شکل (۱۲ـ۷)، هرگاه $V_1 = V_2$ باشد، آن‌گاه $I_1 = I_2$ می‌شود.

باز این بیان هم خاص است؛ در حالت کلی‌تر، می‌گوییم نسبت $\frac{I_2}{V_1}$ با $\frac{I_1}{V_2}$ برابر است؛ به عبارت دیگر:

$$\frac{I_2}{V_1} = \frac{I_1}{V_2} \qquad (۳ـ۱۲)$$

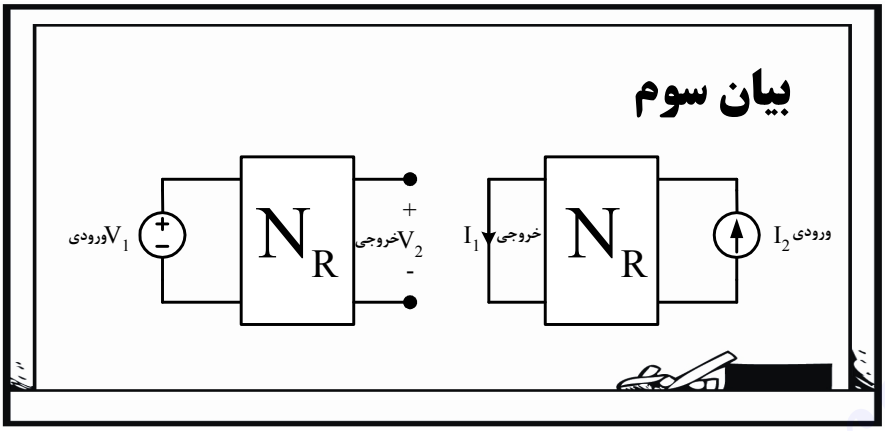
و با توجه به جهت جریان‌های I_1 و I_2 و مقایسه با شکل (۱۲ـ۱) چنین به دست می‌آید:

$$-y_{21} = -y_{12} \quad \Rightarrow \quad y_{21} = y_{12} \qquad (۴ـ۱۲)$$

طبیعتاً y_{12} و y_{21} هم یه‌جورایی تابع تبدیل هستند و در شبکه‌های متقابل این دو تابع تبدیل برابرند. حالا مفصلاً با این مفهوم سروکار خواهیم داشت اما یک توضیح ساده برای فهم بیشتر این است که: «اگر در سر اول منبع ولتاژ $u(t)$ بگذاریم، در سر دوم آمپرمتر جریان e^{-2t} را نشان می‌دهد؛ حال اگر در سر دوم منبع ولتاژ $\delta(t)$ بگذاریم، آمپرمتر در سر اول جریان $-2e^{-2t}$ را نشان می‌دهد.»

لطفاً این عبارت آخر را یک‌بار دیگر بخوانید و به آن فکر کنید.

www.ControlMakers.ir



شکل (۸ـ۱۲) بیان سوم قضیهٔ هم‌پاسخی

به شرط آنکه منبع ولتاژ V_1 و منبع جریان I_2 دارای شکل موج یکسانی باشند، یعنی $V_1(t) = I_2(t)$، آن‌گاه ولتاژ خروجی V_2 و جریان خروجی I_1 با یکدیگر برابرند، یعنی $V_2(t) = I_1(t)$ و به عبارت کلی‌تر:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{I_1}{I_2} \qquad (۵ـ۱۲)$$

و با توجه به جهت جریان خروجی یعنی I_1[۱]، داریم:

$$h_{21} = -h_{12} \qquad (۶ـ۱۲)$$

و به عبارتی:

$$H_V = H_I \qquad (۷ـ۱۲)$$

یعنی مثلاً اگر در سر اول منبع ولتاژ «فلان» بدهیم، در سر دوم ولتاژ «بهمان» می‌گیریم؛ حال اگر در سر دوم منبع جریان «انتگرال فلان» بدهیم، در سر اول جریانی برابر «انتگرال بهمان» خواهیم داشت؛ فقط باید به جهت جریان خروجی توجه جدی بکنیم.

استاد، من یک سؤال دارم؛ شما در ابتدای بحث هم‌پاسخی فرمودید که این قضیه در مورد شبکه‌های LTIیی درست است که منبع وابسته و مستقل و ژیراتور و شرایط اولیه نداشته باشند؛ آیا این بدان معنی است که اگر مداری شامل این‌ها باشد، دیگر در آن قضیهٔ هم‌پاسخی برقرار نیست؟

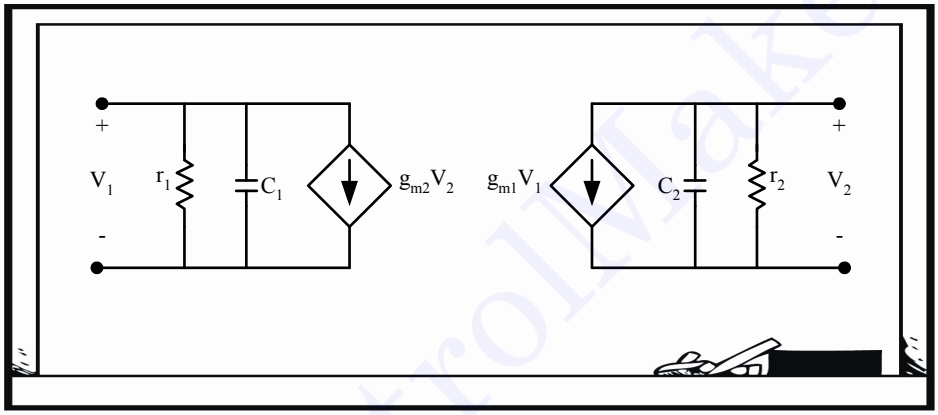
۱ـ در بیان سوم قضیهٔ هم‌پاسخی توجه به جهت جریان خروجی بسیار بسیار مهم است، یعنی اگر به آن دقت نکنیم ممکن است مرتکب اشتباه بدی بشویم ...

سؤال بسیار جالبی است. جواب شما منفی است، یعنی نخیر!

ببینید من یک مثال می‌زنم؛ می‌گوییم: «اگر باران بیاید، آن‌گاه ابر بوده است.» این درست است، اما آیا عکس آن نیز لزوماً درست است؟ یعنی: «اگر ابر باشد، حتماً باران آمده است؟» واضح است که «نه»[۱].

در اینجا هم می‌گوییم: اگر مداری این شرایط را داشت، حتماً «هم‌پاسخ» است ولی اگر این شرایط را نداشت، باید هم‌پاسخی آن مورد بررسی قرار بگیرد. به این مثال دقت کنید:

۴ـ مدار شکل زیر تحت چه شرایطی هم‌پاسخ است؟



شکل (۹.۱۲) مدار تمرین ۴

طبق بیان دوم قضیهٔ هم‌پاسخی، پس از نوشتن ماتریس ادمیتانس گره داریم:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{r_1}+c_1 s & g_{m_2} \\ g_{m_1} & \frac{1}{r_2}+c_2 s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g_{m_2} V_2 \\ -g_{m_1} V_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

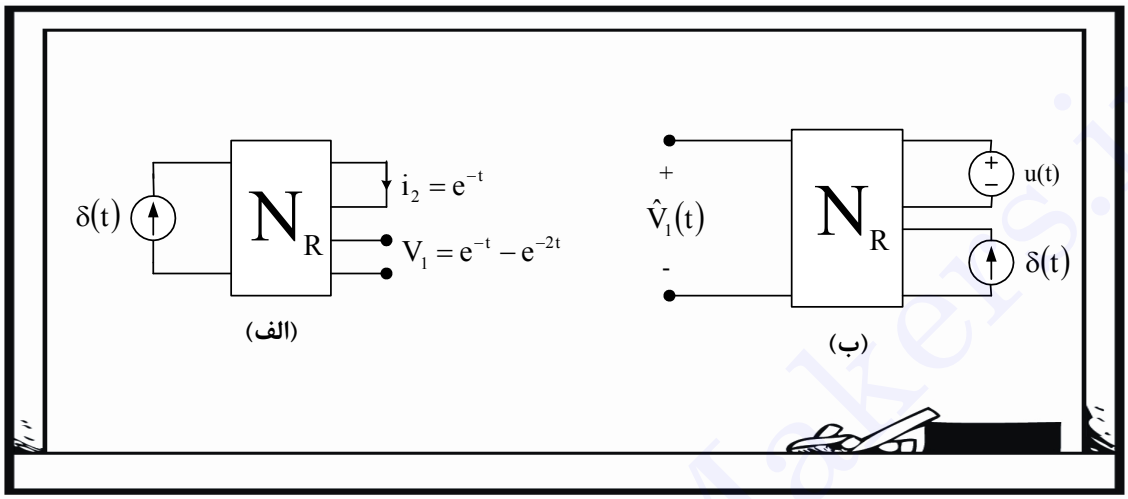
$$y_{12} = y_{21} \quad \Rightarrow \quad g_{m_1} = g_{m_2}$$

یعنی به شرط برابری g_{m_1} و g_{m_2} ، این شبکه هم‌پاسخ است، با آنکه منبع وابسته هم دارد.

۱ـ به قول اساتید منطق چنانچه $p \Rightarrow q$ درست باشد، لزوماً نقیض آن یعنی $q \Rightarrow \sim q$ درست نیست؛ اما قطعاً عکس نقیض آن $(\sim q \Rightarrow \sim p)$ درست است. کمی با این مفهوم کلنجار بروید؛ بازی شیرینی است؛ حیف که درس «منطق» از ریاضیات دبیرستان و برخی جاهای دیگر حذف شده است!!

www.ControlMakers.ir

۵ـ در مدار خطی تغییرناپذیر با زمان شکل (۱۲ـ۱۰ـ الف) اطلاعات روی شکل مفروض است؛ اکنون مدار را به شکل (۱۲ـ۱۰ـ ب) وصل می‌کنیم. ولتاژ $\hat{V}_1$ چقدر است؟



شکل (۱۲ـ۱۰) شبکه‌های تمرین ۵

با هم‌پاسخی، مسئله حل است. ابتدا با بیان اول هم‌پاسخی:

$\delta(t)$ پاسخ در اثر ورودی منبع جریان $\hat{V}_1(t) = e^{-t} - e^{-2t}$

ازطرفی طبق شکل (۱۲ـ۱۰ـ الف) پاسخ منبع جریان $\delta(t)$ برابر e^{-t} است؛ پس پاسخ $u(t)$، برابر انتگرال آن است و نهایتاً طبق بیان سوم هم‌پاسخی:

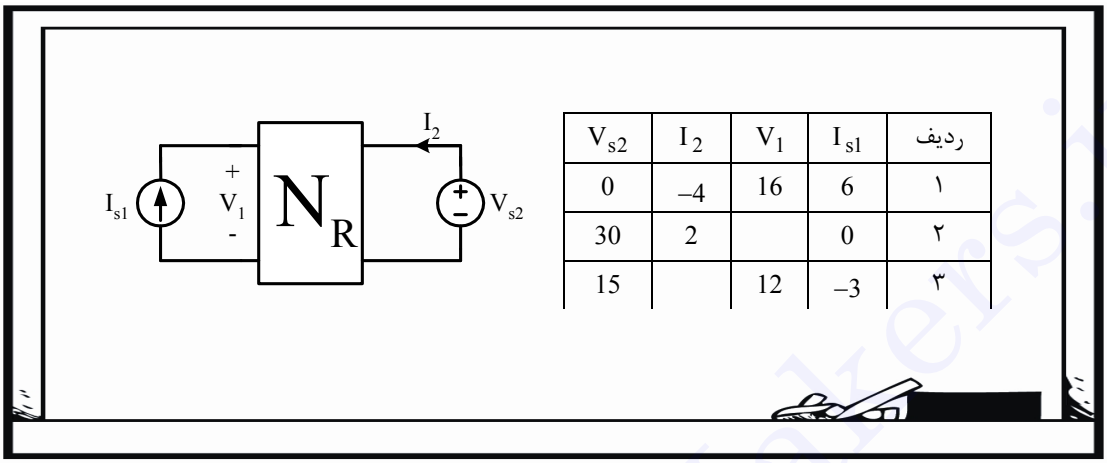
$u(t)$ پاسخ در اثر ورودی منبع ولتاژ $\hat{V}_1(t) = \int_0^t e^{-t}\,dt = 1 - e^{-t}$

نهایتاً به کمک قضیه ارزشمند جمع آثار خروجی معلوم می‌شود:

$$\hat{V}_1(t) = \cancel{e^{-t}} - e^{-2t} + 1 - \cancel{e^{-t}} = 1 - e^{-2t}$$

حل دوستتان عالی بود؛ اما پیشنهاد می‌کنم که خودتان این مسئله را دوباره در حوزهٔ s نیز حل کنید و دقیقاً به همین نتیجه برسید.

۶ـ در دو قطبی شکل زیر که متقابل و هم پاسخ است، ۳ آزمایش انجام داده‌ایم، که نتایج آن در جدول ذیل داده شده است. مقادیر خانه‌های خالی جدول را بیابید.



ردیف	I_{s1}	V_1	I_2	V_{s2}
۱	6	16	–4	0
۲	0		2	30
۳	–3	12		15

شکل (۱۱.۱۲) دوقطبی تمرین ۶ و اطلاعات سه آزمایش

ابتدا با بیان سوم هم‌پاسخی و **توجه به جهت جریان خروجی**، داریم:

$$\text{آزمایش (۱)} \quad \rightarrow \quad H_I = \frac{I_2}{I_{s_1}} = -\frac{-4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$H_V = \frac{2}{3} \quad \rightarrow \text{آزمایش (۲)} \rightarrow \quad V_1 = 30 \times \frac{2}{3} = 20\ \text{V}$$

پس V_1 با توجه به بیان سوم هم‌پاسخی و توجه به جهت جریان در خروجی به دست آمد. حالا برای I_2 با توجه به آزمایش‌های (۱) و (۲) و جمع آثار داریم:

$$I_2 = \left(-\frac{3}{6}\right) \times (-4) + \left(\frac{15}{30}\right) \times 2 = 2 + 1 = 3\,\text{A}$$

آفرین؛ چقدر قشنگ حل کردی! معلومه که مغز «هم‌پاسخی» را فهمیده‌ای.

www.ControlMakers.ir

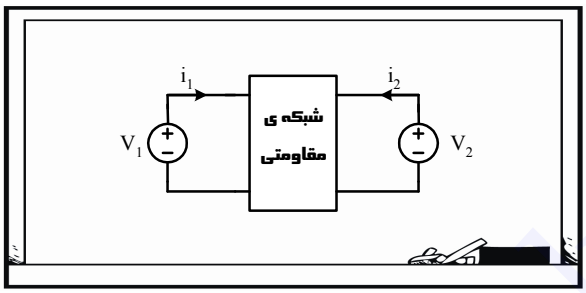
www.ControlMakers.ir

۷ـ در شبکهٔ مقاومتی LTI شکل زیر این اطلاعات داده شده است:

$V_1(t)=30t \quad , \quad V_2(t)=0$

$i_1(t)=5t \quad , \quad i_2(t)=2t$

به ازای $V_1(t)=30t+60$ و $V_2(t)=60t+15$، مقدار $i_1(t)$ کدام است؟



شکل (۱۲.۱۲) شبکهٔ تمرین ۷

۱) $5t+10$ ۲) $-4t-1$ ۳) $t+9$ ۴) $9t+11$

به عبارت‌هایی که می‌گویم دقت کنید، هر جا لازم بود، بفرمایید که توضیح بدهم:[۱]

$$y_{11}=\frac{I_1}{V_1}=\frac{5t}{30t}=\frac{1}{6}\text{℧}$$

پس خروجی در اثر ورودی V_1 معلوم شد؛ چراکه ادمیتانس ورودی مدار مقدار ثابتی است، بنابراین:

$$V_1 \text{ در اثر } i_1=\frac{1}{6}\times(30t+60)=5t+10$$

تا اینجا چه استفاده‌ای از قضیهٔ هم‌پاسخی شد؟

هیچی، مگر قرار است لحظه به لحظه از هم‌پاسخی کمک بگیریم؟

۱ـ شیرین‌ترین لحظه برای یک معلم، لحظه‌ای است که می‌بیند شاگردش از خودش بهتر درس می‌دهد؛ بهتر تفهیم می‌کند و خلاصه دیدن پرواز شاگرد دیروز و استاد امروز آن‌قدر شور و شعف دارد که نگو و نپرس؛ و خدا را شکر که شما دو نفر به این نقطه رسیده‌اید. مطمئنم که شماها معلم‌هایی خواهید شد بی‌نظیر و عالی و... ان‌شاءا...

ادامه می‌دهم:

$$y_{12} = y_{21} = \frac{I_2}{V_1} = \frac{2t}{30t} = \frac{1}{15}$$

و حالا با بیان دوم هم‌پاسخی:

$$V_2 \text{ در اثر } i_1 = \frac{1}{15} \times (60t + 15) = 4t + 1$$

درنتیجه به کمک روابط به‌دست‌آمده برای i_1 و جمع آثار داریم:

$$\text{کل } i_1 = 5t + 10 + 4t + 1 = 9t + 11$$

یعنی گزینه ۴ درست است.

حالا محبت کنید همین مسئله را عیناً با همین اطلاعات یک‌بار دیگر حل کنید، با این تفاوت که این بار، جهت جریان i_2 را برعکس کنید.

حل قسمت اول دوست من یعنی i_1 در اثر V_1 که ربطی به جهت i_2 نداشت، پس این رابطه کماکان برقرار است. آنچه تغییر می‌کند مقدار i_2 در اثر V_2 است که قرینه می‌شود، پس:

$$\text{کل } i_1 = 5t + 10 - (4t + 1) = t + 9$$

دیدید که این پاسخ هم در گزینه‌ها موجود بود. پس باز می‌گویم، به جهت‌ها خیلی خوب توجه کنید. (خصوصاً در بیان سوم هم‌پاسخی)

و اما آخرین قضیهٔ شبکه:

۱۲ـ۵ قضیه تلگان

برای هر شبکهٔ فشرده (که در آن قوانین KVL و KCL برقرارند) اعم از خطی و غیرخطی، اکتیو یا پسیو، تغییرپذیر با زمان یا تغییرناپذیر با زمان برقرار است.

ابتدا یک بیان ساده و واضح:

اگر V_K و I_K ولتاژ و جریان شاخهٔ K ام از مدار طبق جهت‌های قراردادی متناظر باشند، طبق قضیه تلگان داریم:

$$\sum_{k=1}^{b} V_K I_K = 0 \qquad (۱۲ـ۸)$$

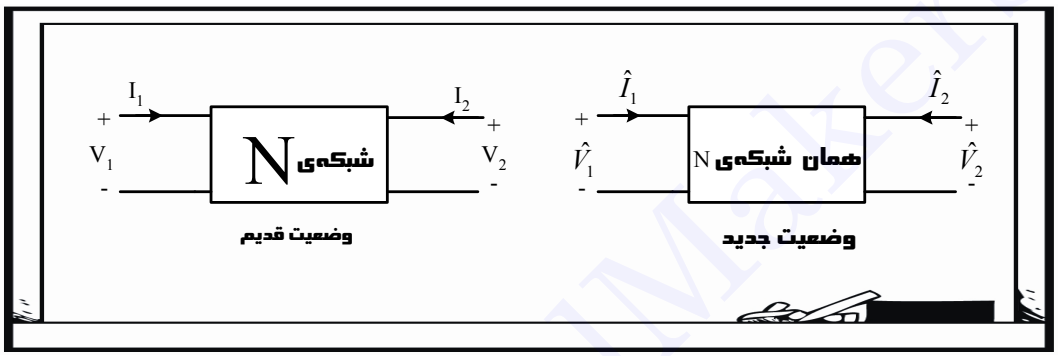
www.ControlMakers.ir

www.ControlMakers.ir

رابطهٔ بالا در اصل بیانگر همان اصل بقای انرژی است. همان‌طوری که می‌دانیم $V_K I_K$ برابر است با توان مصرفی شاخهٔ K ام. حال اگر مداری از محیط بیرون ایزوله باشد، جمع جبری این توان‌ها برای تمامی شاخه‌ها برابر صفر خواهد بود؛ یعنی عده‌ای از شاخه‌ها توان تولید می‌کنند و عده‌ای دیگر مصرف و جمع جبری این‌ها صفر است.

و حال یک بیان مفید، خصوصاً در تست‌ها که البته نتیجهٔ همین بیان ساده است:

اگر شبکهٔ N را در دو وضعیت (مثلاً به نام‌های قدیم و جدید) در نظر بگیریم، بین ولتاژها و جریان‌های دو قطب آن‌ها رابطهٔ (۱۲ـ۹) برقرار است:



شکل (۱۳ـ۱۲) یک شبکه دوقطبی در دو وضعیت قدیم و جدید

$$\underset{\text{قدیم}}{V_1}\ \underset{\text{جدید}}{\hat{I}_1} + \underset{\text{قدیم}}{V_2}\ \underset{\text{جدید}}{\hat{I}_2} = \overset{\text{ورودی}}{\underset{\text{جدید}}{\hat{V}_1}}\ \overset{\text{خروجی}}{\underset{\text{قدیم}}{I_1}} + \overset{\text{ورودی}}{\underset{\text{جدید}}{\hat{V}_2}}\ \overset{\text{خروجی}}{\underset{\text{قدیم}}{I_2}} \qquad (۱۲ـ۹)$$

رابطهٔ بالا در حل سریع بعضی تست‌ها، فوق‌العاده مفید است. به عنوان نمونه همین دو مسئله آخر یعنی تمرینات ۶ و ۷ را با روش قضیهٔ تلگان حل کنید.

۸ـ حل مجدد تمرین ۶ به روش تلگان:

با توجه به آزمایش‌های (۱) و (۲) در شکل (۱۲ـ۱۱) و رابطهٔ ارزشمند (۱۲ـ۹) داریم:

$$16\times 0 + 0\times 2 = \hat{V}_1 \times 6 + 30\times(-4)$$

$$\hat{V}_1 = \frac{30\times 4}{6} = 20\,\text{V}$$

که همان جواب حاصل از هم‌پاسخی است.

و با آزمایش‌های (۲) و (۳) داریم:

$$20\times(-3) + 30\times\hat{I}_2 = 12\times 0 + 15\times 2$$

$$\hat{I}_2 = \frac{30+60}{30} = 3\text{A}$$

باز هم، همان نتیجهٔ هم‌پاسخی حاصل شد.

یک چیزی را به شما لو می‌دهم؛ چون الان قضیه هم‌پاسخی را خیلی خوب یاد گرفته‌اید لو دادن این راز! اشکالی ندارد؛ ببینید قضیه هم‌پاسخی به‌جورایی معادل قضیه تلگان است؛ یعنی اگر در یک مسئله‌ای دیدید که در حل با هم‌پاسخی کمی به مشکل برمی‌خورید، مثل نوشیدن

و با به‌کارگیری رابطهٔ ارزشمند آقای تلگان (یعنی رابطهٔ (۱۲ـ۹)) مسئله را در چشم به هم زدنی می‌توانید حل کنید.

۹ـ حل مجدد تمرین ۷ به روش تلگان:

باز از رابطهٔ مفید (۱۲ـ۹) و اطلاعات تمرین ۷ بهره می‌گیریم؛ داریم:

$$\cancel{30t}\times\hat{i}_1(t)+0\times\hat{i}_2(t)=(30t+60)\times\cancel{5t}+(60t+15)\times\cancel{2t}$$

$$\hat{i}_1(t)=5t+10+4t+1=9t+11$$

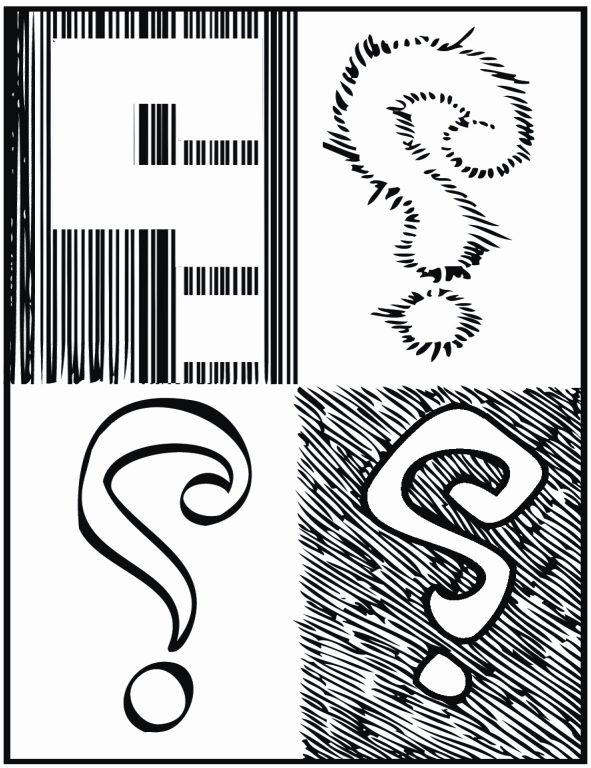
که باز هم پاسخ قبلی حاصل شد.

و اما یک تمرین دیگر که از همهٔ تمرین‌هایی که تا کنون داشتیم، مهم‌تر است:

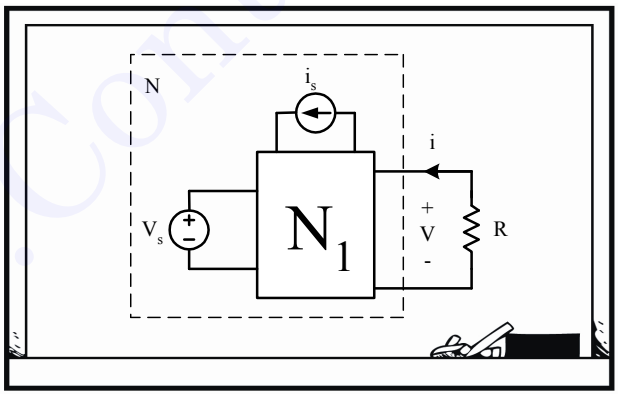
حل مجدد تمام تمرین‌های کتاب به روش و به فکر و به دست خودتان، تا رسیدن به مرز اشباع و وصول به مرزهای توانایی پس از این همه دانایی...

www.ControlMakers.ir

تمرینات فصل دوازدهم



۱ـ در مدار زیر N_1 شامل مقاومت‌های خطی مثبت دو سر است و رابطهٔ ولتاژ به جریان برای N با $i_s=2(A)$ و $V_s=2\cos t(V)$ به‌صورت $2V-3i-1+3\cos t=0$ است. اگر $i_s=2\cos t$ و $V_s=2$ شود، ماکزیمم توان R چند وات است؟



۱) $\frac{11}{12}$ ۲) $\frac{5}{24}$ ۳) $\frac{19}{48}$ ۴) $\frac{19}{288}$

می‌دانیم که رابطه $V-i$ برای مدارهای مقاومتی به صورت $V=R_{eq}i+e_{oc}$ است.

پس در اینجا:

$$V=\underbrace{\frac{3}{2}}_{R_{eq}} i+\underbrace{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\cos t}_{e_{oc}}$$

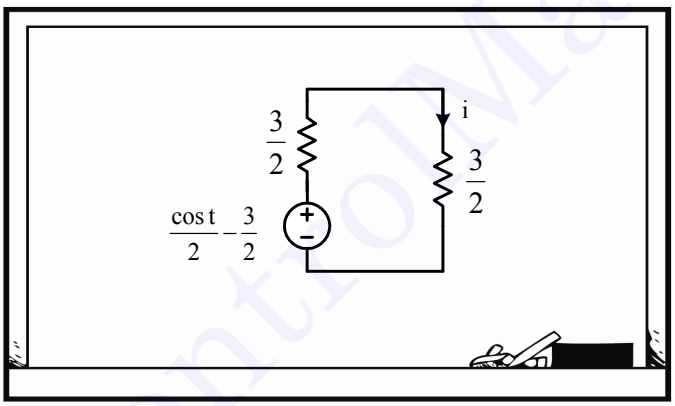
و مقدار R_{eq} هم مستقل از منابع است؛ حالا باید رابطهٔ e_{oc} را به صورت ترکیب خطی از i_s و V_s بنویسیم:

$$e_{oc}=\underbrace{\frac{1}{2}}-\underbrace{\frac{3}{2}\cos t}=\underbrace{\frac{1}{4}i_s}-\underbrace{\frac{3}{4}V_s}$$

حالا با ورودی‌های جدید، داریم:

$$e_{oc}=\frac{\cos t}{2}-\frac{3}{2}$$

و طبق قضیهٔ مچینگ باید $R=\frac{3}{2}\Omega$ باشد، پس مدار ساده‌شده این‌طور می‌شود:



$$i=\frac{1}{6}\cos t-\frac{1}{2}$$

و توان R برابر است با:

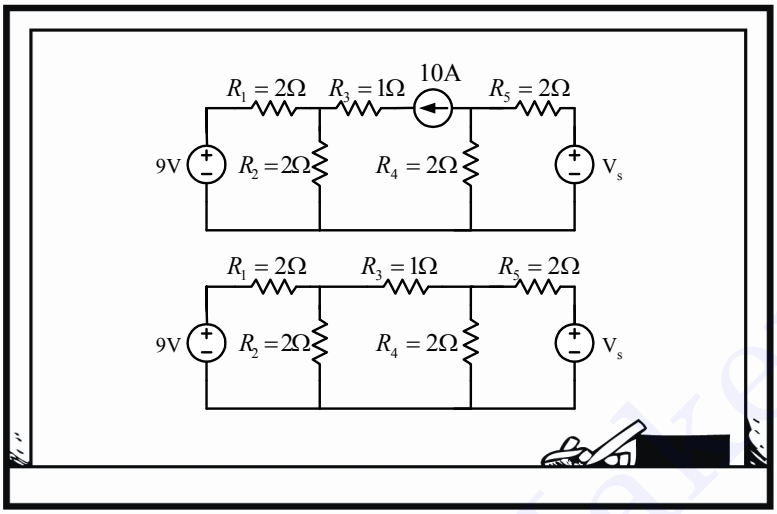
$$p=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{19}{48}W$$

پس گزینه ۳ درست است.

www.ControlMakers.ir

www.ControlMakers.ir

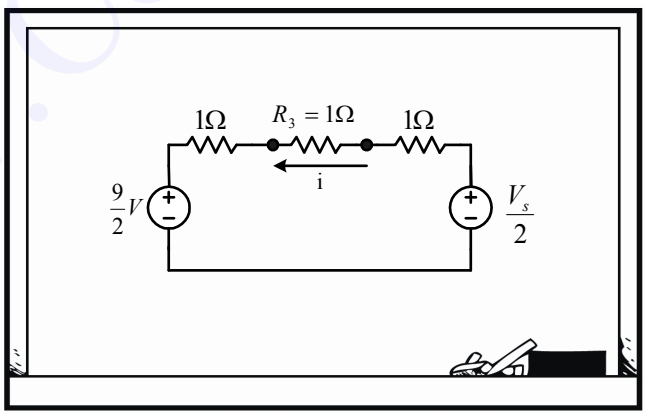
۲ـ در مدارهای شکل زیر درصورتی‌که ولتاژ و جریان مقاومت‌های مشابه در دو مدار دقیقاً یکسان شود، مقدار V_S چند ولت است؟



۱) 18　　۲) 51　　۳) 69　　۴) 72

برای معادل بودن دو مدار، باید جریان مقاومت R_3 در مدار پایینی برابر 10 آمپر شود؛ به همین سادگی!

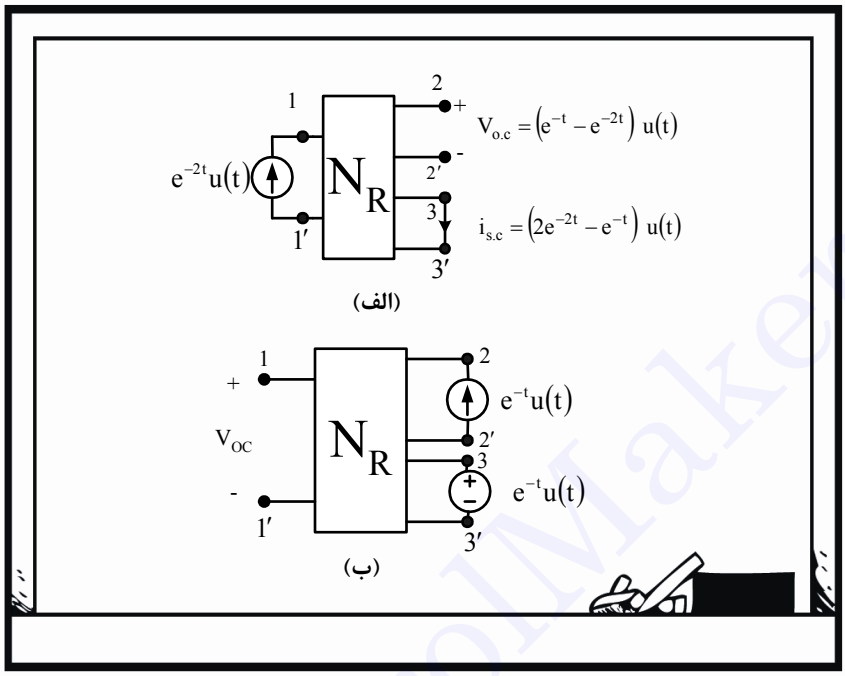
پس برویم i_{R3} را در این مدار حساب کنیم. اگر مدار معادل تونن طرفین R_3 را در مدار جایگزین کنیم، داریم:



$$i_{R3} = \frac{\frac{V_S}{2} - \frac{9}{2}}{3} = 10 \quad \Rightarrow \quad V_S = 69\,V$$

پس گزینه ۳ درست است.

۳ـ نتایج یک آزمایش بر روی سه‌قطبی متقابل N_R در شکل (الف) داده شده است. (پاسخ‌های حالت صفر). در آزمایش شکل (ب) ولتاژ V_{oc} برابر است با: (مهندسی برق ۷۶)



۱) $e^{-t}u(t)$ ۲) $(te^{-t} - e^{-t})u(t)$ ۳) $(te^{-t} - 2e^{-t})u(t)$ ۴) $(te^{-t} + e^{-t})u(t)$

با توجه به بیان‌های قضیهٔ هم‌پاسخی، مسئله حل می‌شود. ابتدا ارتباط قطب‌های $11'$ با $22'$:

$$Z_{21} = \frac{\frac{1}{S+1} - \frac{1}{S+2}}{\frac{1}{S+2}} = \frac{1}{S+1}$$

پس طبق قضیهٔ هم‌پاسخی:

$$Z_{21} = Z_{12} = \frac{1}{S+1} = \frac{V_1}{I_2} = \frac{V_1}{\frac{1}{S+1}}$$

یعنی:

$$V_1 = \left(\frac{1}{S+1}\right)^2$$

این شد اثر منبع جریان؛ حال بگذارید دوستتان اثر منبع ولتاژ را بگوید.

www.ControlMakers.ir

www.ControlMakers.ir

با توجه به شکل (الف) در سرهای $11'$ و $33'$ داریم:

$$H_I=\frac{I_3}{I_1}=\frac{\frac{2}{S+2}-\frac{1}{S+1}}{\frac{1}{S+2}}=\frac{S}{S+1}$$

اینجا بیان سوم قضیهٔ هم‌پاسخی به فریادمان می‌رسد که:

$$H_I=H_V=\frac{S}{S+1}=\frac{V_1}{V_3}=\frac{V_1}{\frac{1}{S+1}}$$

یعنی:

$$V_1=\frac{S}{(S+1)^2}$$

و حالا به کمک قضیهٔ جمع آثار داریم:

$$V_{oc}=\frac{S+1}{(S+1)^2}=\frac{1}{S+1}$$

و نهایتاً:

$$V_{oc}=e^{-t}\,u(t)$$

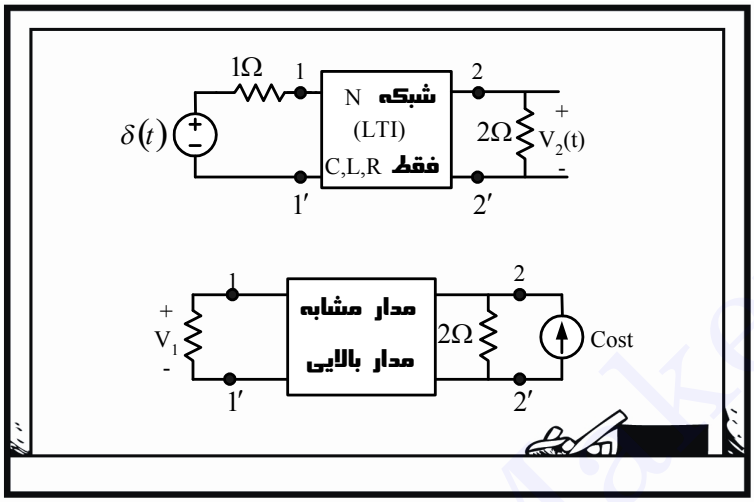
پس گزینه ۱ درست است.

این مسئله، مسئله جالبی است؛ به حل آن خوب توجه کنید [۱].

۱- البته مثل همیشه، حتماً ابتدا خودتان مسئله را حل کنید و بعداً به حل دوستانتان مراجعه کنید.

www.ControlMakers.ir

۴ـ در مدار زیر وقتی که ورودی در قطب $(1,1')$ برابر $\delta(t)$ باشد، ولتاژ خروجی در قطب $(2,2')$ برابر با $V_2(t)=2e^{-t}$ است. حال اگر منبع تغذیه ورودی را اتصال کوتاه کنیم و در خروجی یک منبع جریان برابر $\cos t$ قرار دهیم، ولتاژ $V_1'(t)$ در قطب $(1,1')$ چه می‌شود؟



۱) $\frac{2}{\sqrt{2}}\cos(t+30)$ ۲) $\frac{2}{\sqrt{2}}\cos(t+45^\circ)$ ۳) $\frac{2}{\sqrt{2}}\cos(t-45^\circ)$ ۴) $\frac{2}{\sqrt{2}}\cos(t-30^\circ)$

باز با بیان سوم قضیهٔ هم‌پاسخی من شروع می‌کنم:

$$H_V=\frac{V_2}{V_1}=\frac{\frac{2}{S+1}}{1}=\frac{2}{S+1}=H_I=\frac{I_1'}{I_2'}$$

ضمناً معلومه که:

$$i_2'=\cos t \Rightarrow I_2'=\frac{S}{S^2+1}$$

و...

ببخشید، ادامه ندهید، در این مسئله به‌جای استفاده از تبدیل لاپلاس و عکس آن برای یافتن i_1'، مانند مسایل فصل لاپلاس در تابع تبدیل S را به $j\omega$ تبدیل کرده و به‌جای ω فرکانس ورودی را که در اینجا فرکانس i_2' است قرار می‌دهیم:

$$H_I=\frac{2}{j\omega+1}=\frac{2}{j+1} \Rightarrow |H_I|=\frac{2}{\sqrt{2}},\ \angle H_I=-45^\circ$$

پس:

$$i_1'(t)=\frac{2}{\sqrt{2}}\cos(t-45^\circ)$$

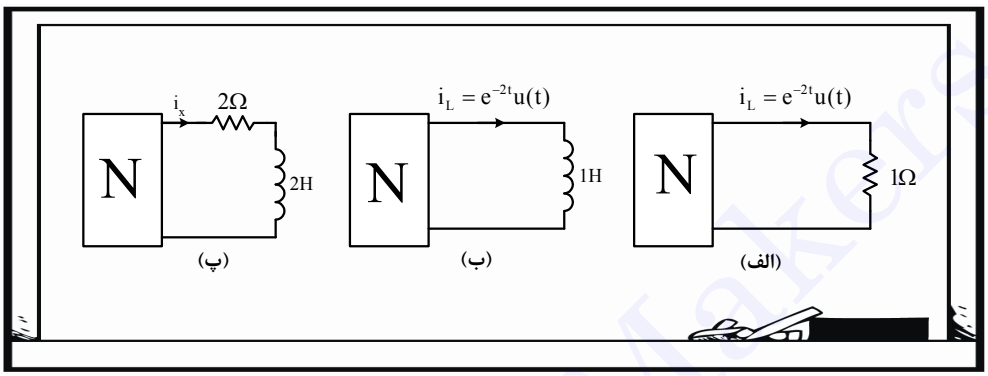
www.ControlMakers.ir

و چون $V_1'(t)$ ولتاژ دو سر مقاومت یک اهم است، مقدارش با $i_1'(t)$ برابر است.

پس گزینه ۳ درست است.

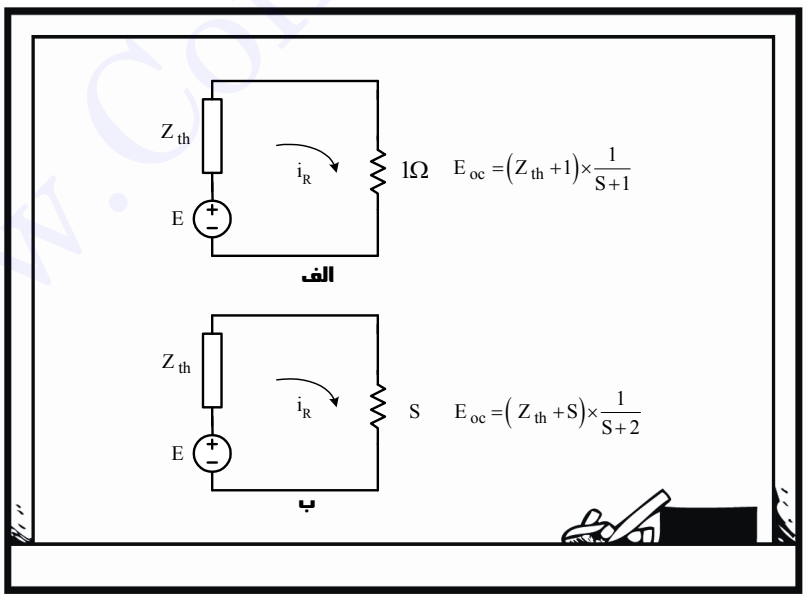
حال یک مسئلهٔ ترکیبی از قضایای مدار معادل تونن ـ نورتن و بحث لاپلاس.

۵ـ یک‌قطبی N متشکل از عناصر خطی تغییرناپذیر با زمان و منابع وابسته و نابسته است. در شکل‌های (الف) و (ب) نتایج آزمایش‌ها بر روی این یک‌قطبی داده شده است. (پاسخ‌های حالت صفر) در آزمایش شکل (پ) i_x برابر است با: (مهندسی برق ۷۸)



۱) $\frac{1}{2}\left(3e^{-2t}-1\right)u(t)$ ۲) $\frac{1}{2}\left(3e^{-2t}+1\right)u(t)$ ۳) $\left(3e^{-2t}-2e^{-t}\right)u(t)$ ۴) $\left(3e^{-2t}+2e^{-t}\right)u(t)$

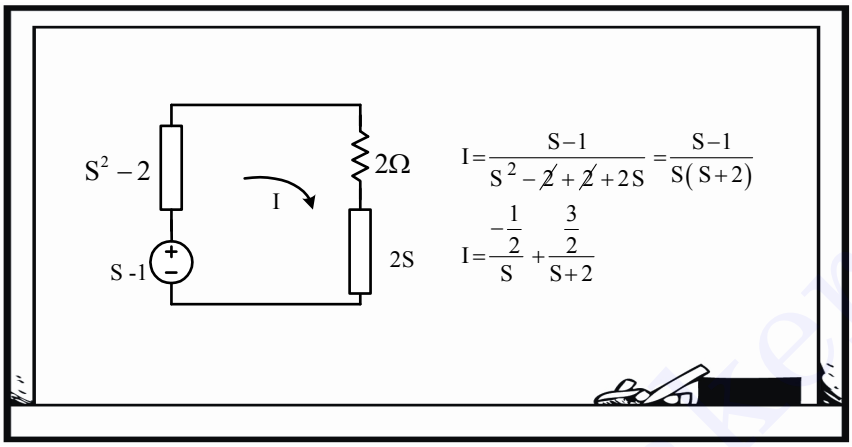
توضیح استاد، قبل از مسئله، یک کمک خوب برای حل است؛ حتماً شما هم موافقید که:



با حل این دو معادله، دو مجهول داریم:

$$E_{oc}=S-1 \quad و \quad Z_{th}=S^2-2$$

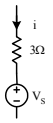
پس مدار شکل (پ) به صورت زیر خواهد بود:

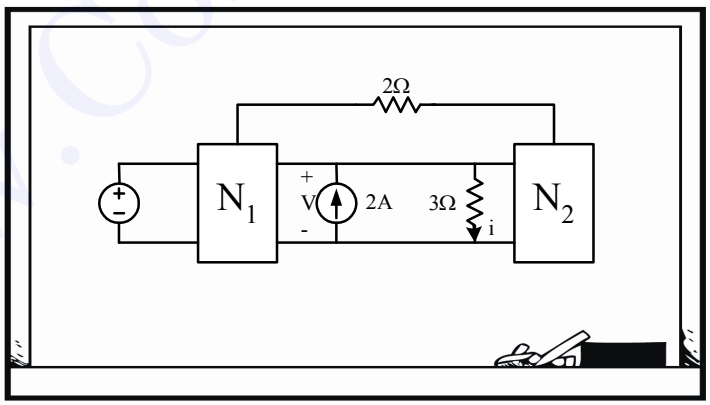


و سرانجام با عکس لاپلاس گرفتن:

$$i(t)=\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-2t}\right)u(t)$$

پس گزینه ۱ درست است.

۶ـ در مدار زیر N_1 و N_2 از مقاومت‌های خطی مثبت تشکیل شده و $v=\frac{1}{6}\cos t+\frac{1}{2}$ ولت است. اگر منبع ولتاژ $v_s=12$ ولت را با مقاومت 3Ω سری کنیم (به صورت ) جریان i به اندازه: (مهندسی برق ۸۳)



۱) $\frac{11}{3}$ آمپر کم می‌شود. ۲) 3 آمپر کم می‌شود. ۳) 4 آمپر کم می‌شود. ۴) 4 آمپر اضافه می‌شود.

www.ControlMakers.ir

در حالت اول از روی v داده‌شده، جریان i به دست می‌آید:

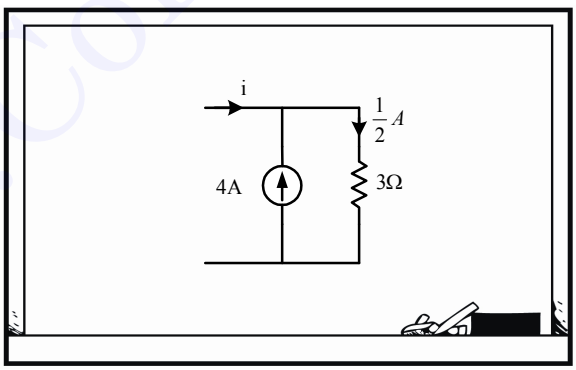
$$i_1 = \frac{1}{18}\cos t + \frac{1}{6}$$

و زمانی‌که مقاومت سه اهم با منبع ولتاژ سری می‌شود با یک تبدیل نورتن می‌توانیم بگوییم که منبع 2A قبلی به منبع $\left(2+\frac{12}{3}\right)=6A$ تبدیل شده است.

پس جریان هم سه برابر می‌شود:

$$\frac{1}{6}\times 3 = \frac{1}{2}A$$

حواسمان باشد که این جریان مقاومت سه اهم است ولی i که سؤال مشخص کرده جریان مقاومت سری با منبع ولتاژ است؛ پس:

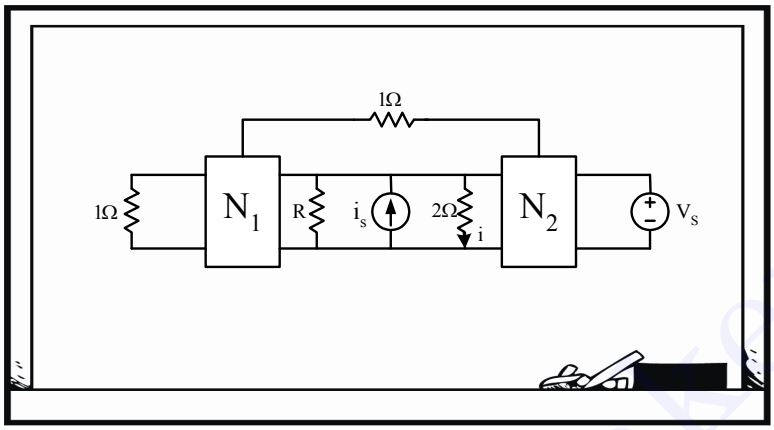


$$i_2 = \frac{1}{2} - 4 = \frac{-7}{2}$$

$$\Delta i = i_2 - i_1 = \frac{-7}{2} - \frac{1}{6} = \frac{-22}{6} = \frac{-11}{3}A$$

پس گزینه ۱ درست است.

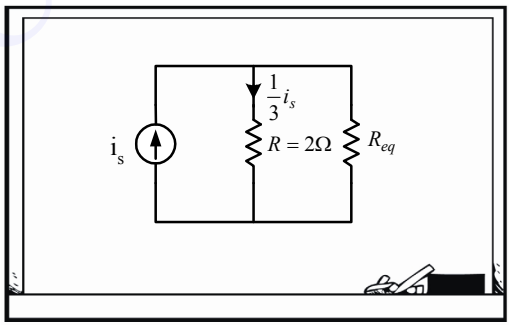
۷ـ در شکل زیر مدارهای N_1 و N_2 از مقاومت‌های خطی مثبت تشکیل شده و به ازای $R = 2\Omega$، $i = \frac{1}{3}i_s + \frac{1}{4}v_s$ است. به ازای چه مقدار R، توان آن ماکزیمم است؟ (مهندسی برق ۸۴)



۱) -1Ω ۲) 1Ω ۳) 2Ω ۴) $\frac{2}{5}\Omega$

باید R با مقاومت معادل از دو سرش برابر باشد تا ماکزیمم توان به آن برسد و از طرف دیگر زمانی‌که $R = 2\Omega$ بوده است، جریانش به دلیل تساوی دو مقاومت با i داده‌شده در صورت سؤال برابر است.

و چون شبکه‌های N_1 و N_2 مقاومتی هستند، باید v_s را صفر کنیم و از دو سر R موازی با i_s یک مقاومت معادل ببینیم:



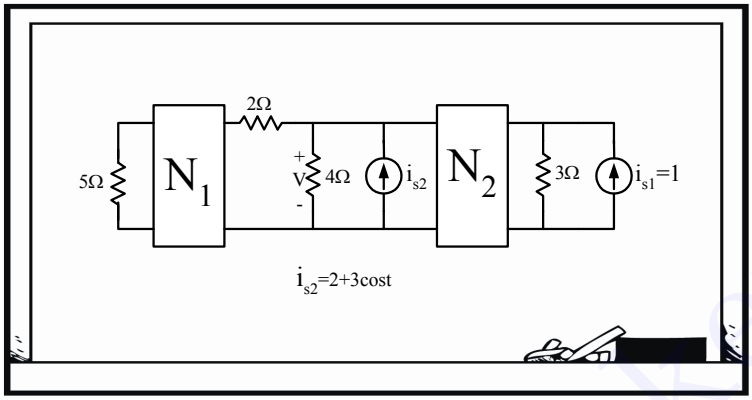
$$\frac{1}{3}i_s = \frac{R_{eq}}{R_{eq}+2}i_s \quad \Rightarrow \quad R_{eq} = 1\Omega$$

پس گزینه ۲ درست است.

www.ControlMakers.ir

www.ControlMakers.ir

۸ـ در مدار زیر N_1 و N_2 مدارهای مقاومتی خطی و هم‌پاسخ و بدون منابع نابسته هستند. برای $i_{s_1}=1$ و $i_{s_2}=2+3\cos t$ به‌دست می‌آوریم $v=8+9\cos t$. برای $i_{s_1}=0$ و $i_{s_2}=\cos t$ توان متوسط مقاومت 3 اهمی چند وات است؟ (مهندسی برق ۸۵)



۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) 6

می‌توانیم از قضایای هم‌پاسخی استفاده کنیم؛ که با توجه به شرایط داده‌شده، قضیهٔ اول می‌شود. در حالت اول با صفر کردن جریان i_{s_2}، ولتاژ V داده‌شده، همان ولتاژ ولت‌متر طرف دوم می‌شود برای جریان i_{s_1} و در حالت دوم هم i_{s_1} را صفر در نظر گرفته و درواقع دو سر مقاومت 3Ω ولت‌متر قرار داده که ولتاژش را برای یافتن توان باید بخوانیم.

و نسبت ولت‌متر به منبع جریان را در دو حالت باید برابر قرار دهیم:

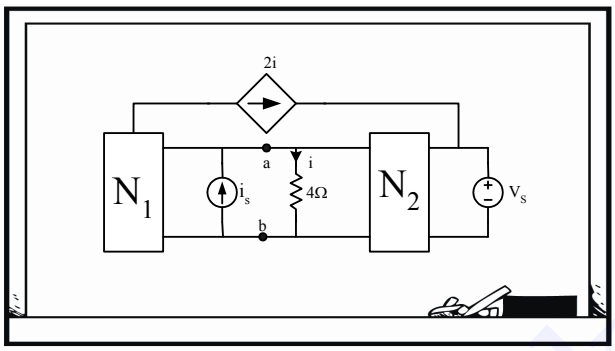
$$\frac{V_{4\Omega}}{i_{s_1}}=\frac{8}{1}$$

اشتباه نکنید! همه 8V ناشی از i_{s_1} نیست، i_{s_2} هم بخش DC دارد و باید سهم هرکدام را جداگانه با توجه به جمع آثار به دست آوریم.

$$V_{4\Omega}=3i_{s_2}+2i_{s_1} \Rightarrow \left.\frac{V_{4\Omega}}{i_{s_1}}\right|_{i_{s_2}=0}=2=\left.\frac{V_{3\Omega}}{i_{s_2}}\right|_{i_{s_1}=0} \Rightarrow V_{3\Omega}=2\cos t \Rightarrow P_{3\Omega}=\frac{1}{2}\frac{|V|^2}{R}=\frac{1}{2}\frac{2^2}{3}=\frac{2}{3}\,W$$

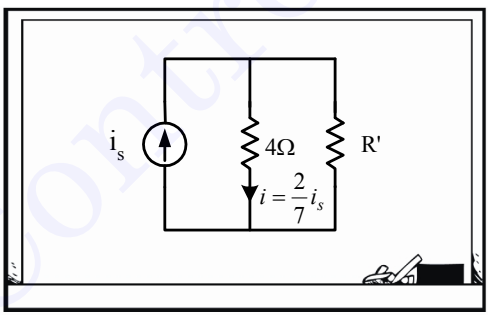
گزینه ۱ درست است.

۹ـ در مدار زیر (با فرض جواب یکتا)، N_1 و N_2 از مقاومت‌های خطی تشکیل شده‌اند و $i=\frac{2}{7}(v_s+i_s)$ است. به‌جای مقاومت 4Ω چه مقاومتی بگذاریم تا مقاومت کل مدار از دو سر a و b برابر $\frac{8}{9}\Omega$ شود؟ (مهندسی برق ۸۶)



۱) $\frac{8}{7}\Omega$ ۲) $\frac{8}{5}\Omega$ ۳) 2Ω ۴) 4Ω

شبیهش را دیده‌ایم؛ دوباره باید v_s را صفر کنیم و چون شبکه‌ها مقاومتی هستند از دو سر منبع جریان موازی با مقاومت 4Ω یک مقاومت معادل ببینیم:



$$i=\frac{2}{7}i_s=\frac{R'}{R'+4}i_s \quad\Rightarrow\quad R'=\frac{8}{5}\Omega$$

حالا باید ببینیم $\frac{8}{5}\Omega$ موازی چه مقاومتی بشود تا معادل $\frac{8}{9}\Omega$ شود:

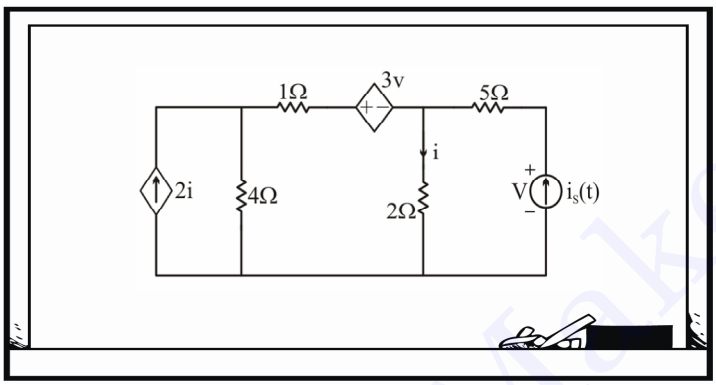
$$\frac{1}{R_{ab}}=\frac{9}{8}=\frac{5}{8}+\frac{1}{R} \quad\Rightarrow\quad R=2\Omega$$

www.ControlMakers.ir

سؤالات مدارهای الکتریکی کنکور کارشناسی ارشد

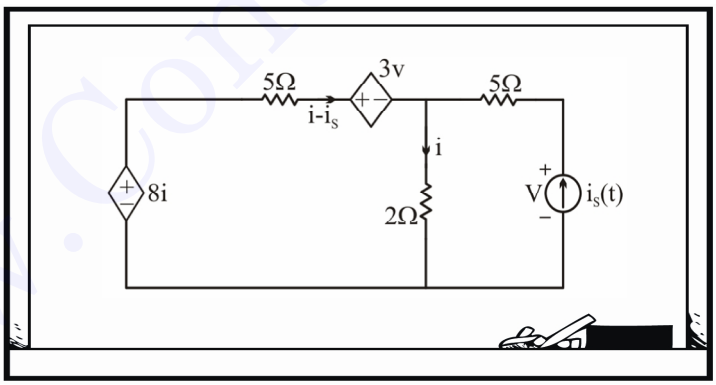
مهندسی برق ـ سراسری ۱۳۸۸

۱ـ اگر $i_s(t)=1+\frac{2\cos t}{3}$ باشد، توان متوسط منبع ولتاژ وابسته وات است؟



۱) $+11$ ۲) -11 ۳) 13 ۴) -13

پس از تبدیل نورتن به تونن در سمت چپ مدار ، با KCL بازی کردن و KVL زدن داریم:



$$KVL: V=5i_s(t)+2i$$

$$KVL: -8i+5(i-i_s)+3(5i_s(t)+2i)+2i=0 \quad \Rightarrow \quad i=-2i_s$$

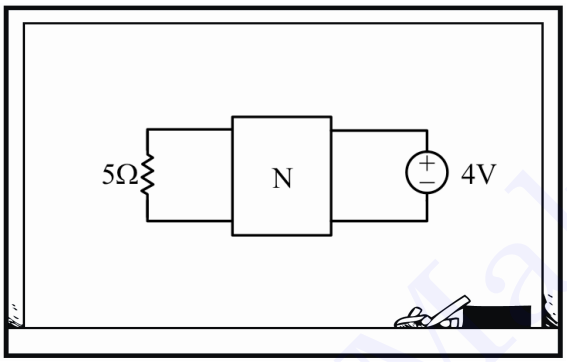
حالا توان منبع وابسته را در حالت‌های dc و ac حساب کرده و جمع می‌کنیم:

$$P=3V(i-i_s)=3(5i_s+2(-2i_s))(-2i_s-i_s)=-9i_s^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_{dc} = -9 \\ P_{ac} = -9 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = -2 \end{cases} \Rightarrow P_t = -11\,W$$

پس گزینه ۲ درست است.

۲ـ مدار داده شده در شکل مقابل مقاومتی، خطی و تغییرناپذیر با زمان است. 80 درصد توان متوسط توسط N جذب می‌شود. اندازه منبع ولتاژ ثابت را چند برابر کنیم تا 30 درصد توان به مقاومت 5Ω برسد؟



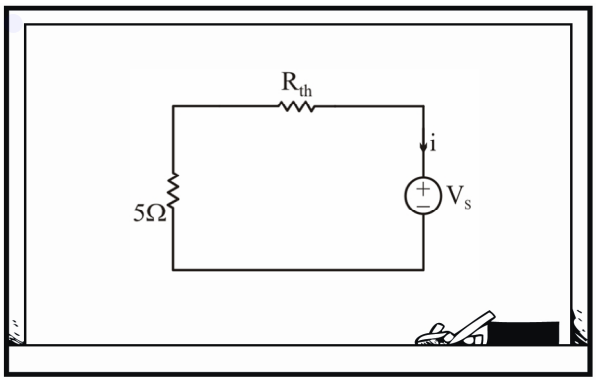
۱) $\frac{3}{2}$ برابر

۲) $\frac{9}{4}$ برابر

۳) درصدتوان جذب شده توسط 5Ω فقط به مقدار مقاومت بستگی دارد و مستقل از منبع ولتاژ است.

۴) درصد توان جذب شده توسط 5Ω به مقدار مقاومت و N بستگی دارد و مستقل از اندازه منبع ولتاژ است.

با توجه به مقاومتی و LTI بودن شبکه N ازدو سر مقاومت 5Ω می‌توانیم یک مدار معادل تونن ببینیم؛ این لطفی است که قضیه‌ی مدار معادل به ما می‌کند و به ما اجازه می‌دهد که به جای یک هیولای ناشناخته، فقط یک مقاومت فسقلی و یک منبع مستقل قرار بدهیم:



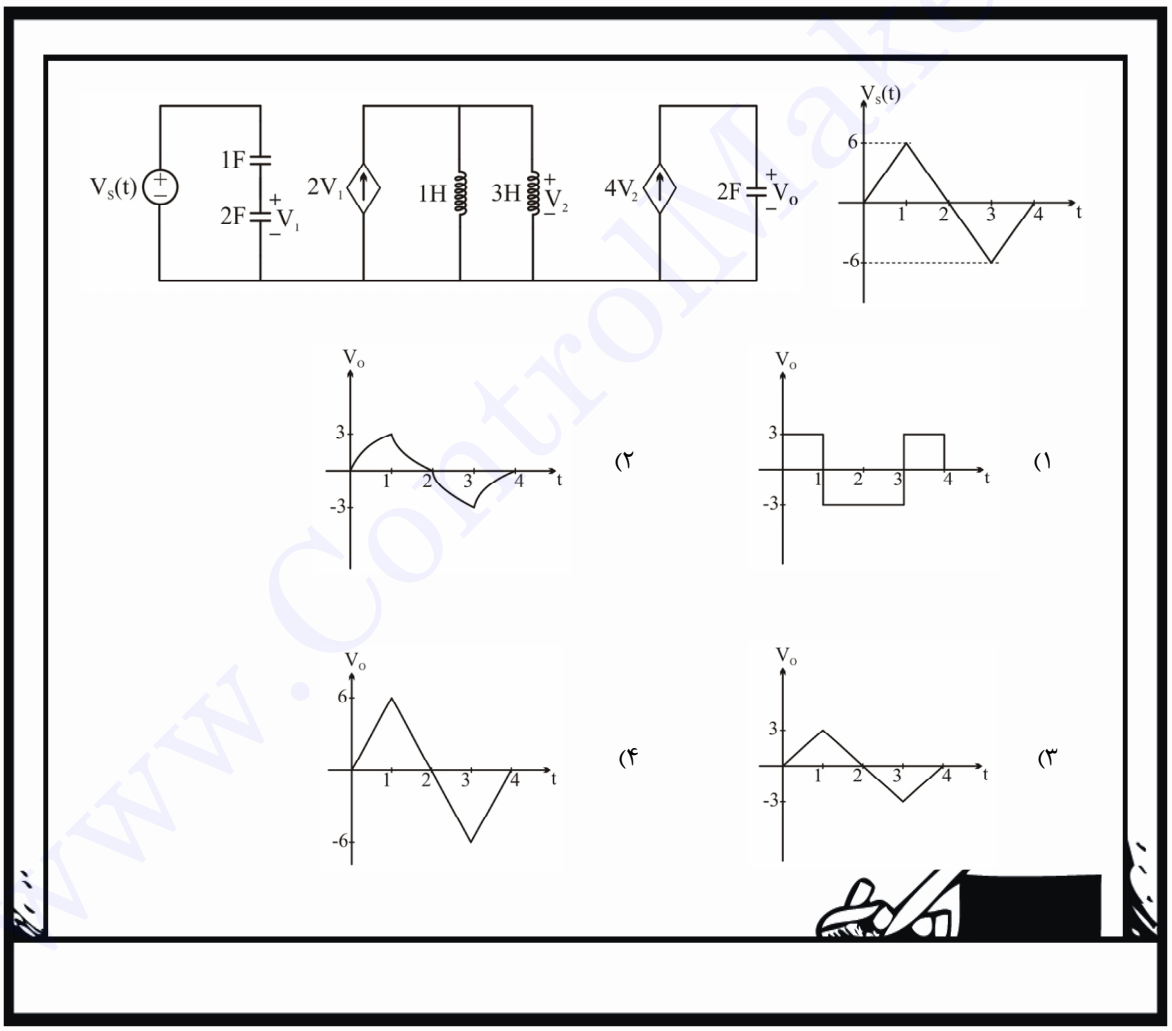
www.ControlMakers.ir

به نظر می‌رسد درصدی از توان کل که به مقاومت 5Ω می‌رسد به مقدار این مقاومت و همچنین مقدار R_{th} بستگی دارد و میزان V_s روی این درصد اثر نمی‌گذارد و به‌طور دقیق داریم:

$$\left|\frac{P_{5\Omega}}{P_t}\right| = \left|\frac{5i^2}{V_s i}\right| = \left|\frac{5i}{V_s}\right| = \left|\frac{5}{V_s}\times\frac{-V_s}{5+R_{th}}\right| = \frac{5}{5+R_{th}}$$

پس گزینه ۴ درست است.

۳ـ شکل موج $V_s(t)$ مدار شکل مقابل به صورت زیر داده شده است. شکل موج ولتاژ خروجی V_o کدام است؟ (شرایط اولیه صفر)



بدون شرح[۱]

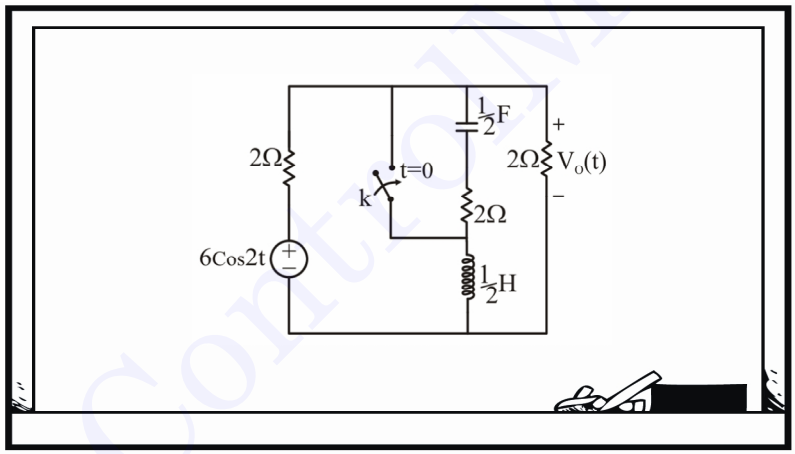
$$V_1 = \frac{1}{1+2}V_s = \frac{1}{3}V_s$$

$$V_2 = 3\frac{di_{3H}}{dt} = 3\frac{d\left(\frac{1}{1+3}2V_1\right)}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dV_s}{dt}$$

$$V_o = \frac{1}{2}\int i_{2F}dt = \frac{1}{2}\int 4V_2 dt = \frac{1}{2}\int 4\times\frac{1}{2}\frac{dV_s}{dt}dt = V_s$$

پس گزینه ۴ درست است.

۴ـ در مدار شکل زیر که در حالت دائمی قرار دارد، کلید k در لحظه $t = 0$ بسته می‌شود. بخش گذرای پاسخ $V_o(t)$ برای $t \geq 0$ کدام است؟



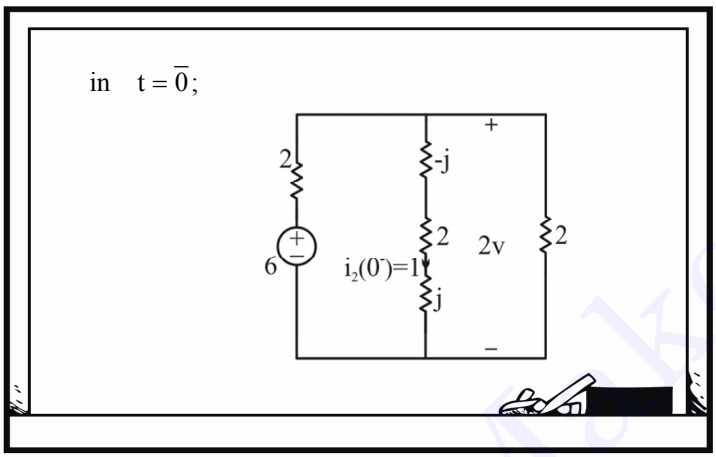
۱) $-e^{-2t}$ ۲) $-\frac{3}{2}e^{-2t}$ ۳) $\frac{1}{2}e^{-2t}$ ۴) $\frac{5}{4}e^{-2t}$

۱ـ خدا وکیلی بعد این همه مدت غواصی در دریاچه‌ی عمیق مدارهای الکتریکی، دیگه یاداوری روابط تقسیم ولتاژ و تقسیم جریان و فرمول‌های خازن و سلف و ... بی انصافیه!

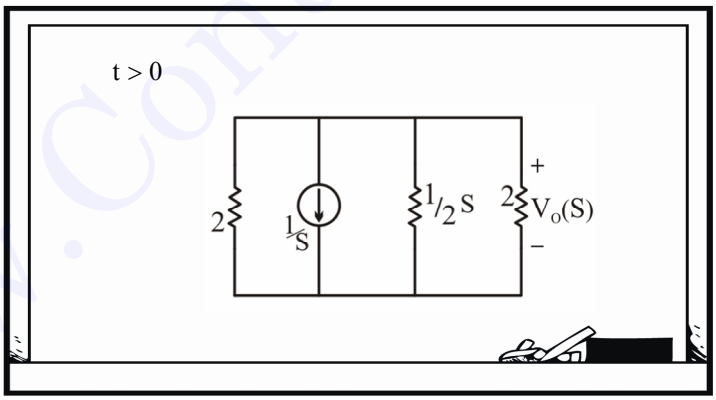
هم برای گوینده و هم برای شنونده!

www.ControlMakers.ir

ابتدا قبل از بسته شدن کلید مقدار اولیه جریان سلف که در $t \geq 0$ مورد احتیاج است را به کمک آن قدم صفرم دوست داشتنی! و رسم مدار در 0^- به کمک رابطه بی نهایته پیدا می‌کنیم:



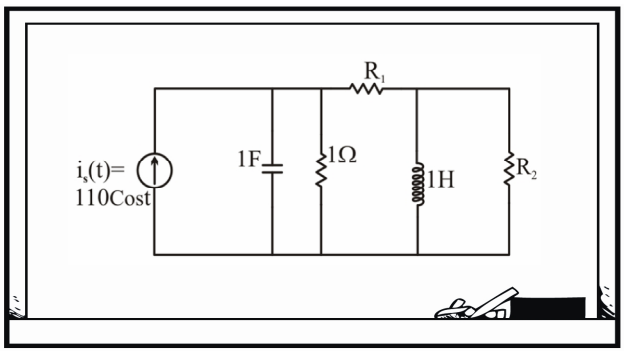
حالا برای $t > 0$ که کلید بسته شده است، مدار را در حوزه لاپلاس در نظر می‌گیریم و می‌دانیم که منبع $6\cos 2t$ حالت دائمی ایجاد می‌کند و مقدار اولیه جریان سلف حالت گذرا ایجاد می‌کند، پس دست به کار می‌شویم:



$$V_o(S) = \frac{-1}{S}\left(2 \parallel 2 \parallel \frac{1}{2}S\right) = \frac{-1}{S}\frac{\frac{1}{2}S}{1+\frac{1}{2}S} = \frac{-1}{2+S} \quad \Rightarrow \quad V_0(t) = -e^{-2t}$$

بنابراین گزینه ۱ درست است.

۵ـ در مدار شکل مقابل توان متوسط (یا توان مصرفی) مقاومت R_1 برابر P_1 وات و توان مصرفی مقاومت R_2 برابر P_2 وات است. مقاومت‌های R_1 و R_2 چند اهمی باشند تا P_1+P_2 حداکثر باشد؟



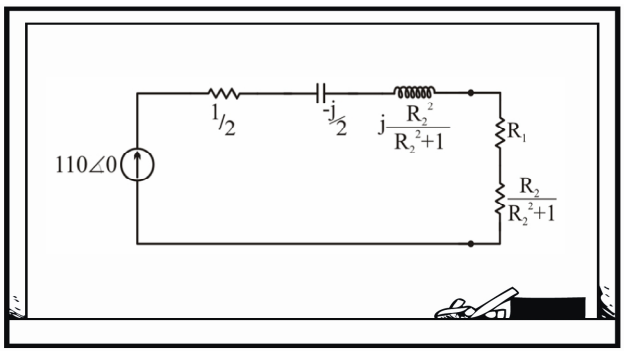
۱) $R_2=\frac{1}{2}\ ,\ R_1=\frac{1}{2}$ ۲) $R_2=0\ ,\ R_1=1$ ۳) $R_2=1\ ,\ R_1=0$ ۴) $R_2=2\ ,\ R_1=2$

اگر بخواهیم ماکزیمم توان به مقاومت‌های R_1 و R_2 برسد، بهتر است این مقاومت‌ها را کنار هم بیاوریم و از قضیه انتقال توان ماکزیمم استفاده کنیم.

ابتدا شاخه R_2 موازی با سلف 1H را به سری تبدیل می‌کنیم:

$$Z=\frac{R_2 j}{R_2+j}=\frac{R_2 j(R_2-j)}{R_2^2+1}=\frac{R_2}{R_2^2+1}+j\frac{R_2^2}{R_2^2+1}$$

نهایتاً بعد از تبدیل RC موازی به سری مدار به این صورت در می‌آید:



و حالا طبق قضیه انتقال توان ماکزیمم باید $R_L = |Z_s|$ باشد، پس:

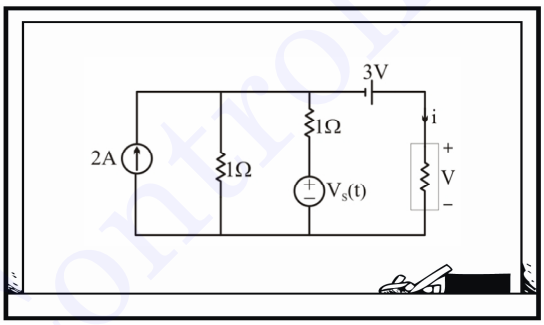
$$R_1 + \frac{R_2}{R_2^2+1} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{R_2^2}{R_2^2+1} - \frac{1}{2}\right)^2}$$

اگر نخواهیم معادله را کامل حل کنیم، می‌توانید گزینه‌ها را در آن جایگذاری کنیم که به سادگی دیده می‌شود که $R_1 = 0$ و $R_2 = 1$ در آن صدق می‌کند.

پس گزینه ۳ درست است. مسأله‌ی قشنگی بود؛ یک‌بار دیگر خودتان از اول آن را حل کنید.

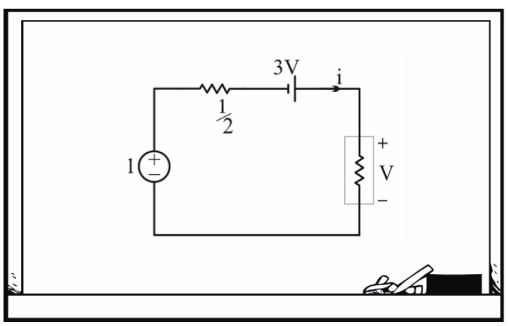
۶ـ در مدار شکل زیر، ولتاژ $V(t)$ دو سر مقاومت غیر خطی به کدام جواب نزدیک‌تر است؟

$v_s(t) = 0.18\cos 2t$ و مشخصه مقاومت غیر خطی $i = \begin{cases} v^2 & v > 0 \\ 0 & v < 0 \end{cases}$، است.



۱) $2 + 0.03\cos 2t$ ۲) $2 + 0.06\cos 2t$ ۳) $4 + 0.018\cos 2t$ ۴) $4 + 0.036\cos 2t$

به نظرم بهتر است که ابتدا بخش dc مدار را در نظر بگیریم تا نقطه کار این مقاومت غیر خطی را بیابیم. با تبدیل نورتن به تونن داریم:



$$KVL: -1+\frac{1}{2}v^2-3+v=0$$

$$\frac{1}{2}v^2+v=4 \quad \Rightarrow \quad v=2$$

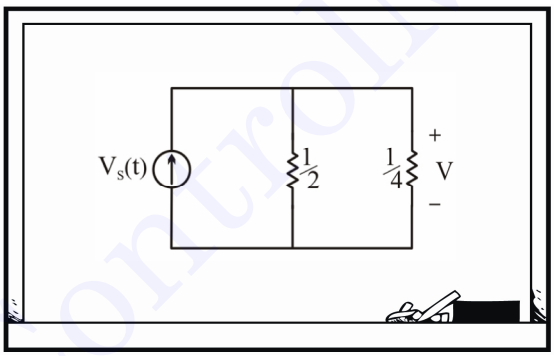
ادامه کار را می‌سپرم به دوستم!

حال که نقطه کار این مقاومت پیدا شده می‌توانیم مقاومت معادل آن در این نقطه را به دست آوریم:

$$\frac{1}{R}=\frac{di}{dv}=2v=4 \quad \Rightarrow \quad R=\frac{1}{4}$$

من هم جمع‌بندی کار را می‌سپرم به دوست عزیزم[۱]!

برای بخش سیگنال کوچک داریم:

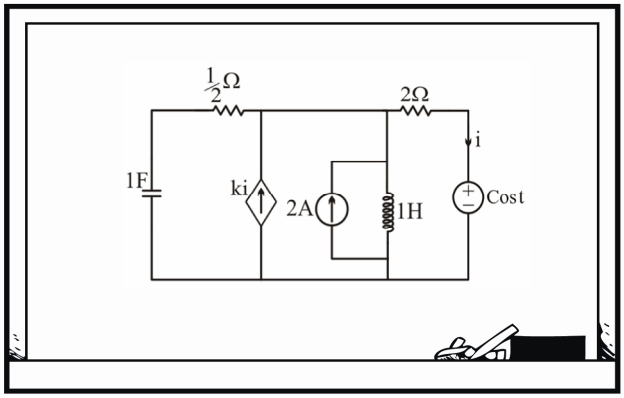


$$v=\left(\frac{1}{2}\|\frac{1}{4}\right)v_S(t)=\frac{1}{6}v_S(t)=0.03\cos 2t$$

پس گزینه ۱ درست است.

۱ـ ظاهراً دوستان بزرگوار، کلاس را با زمین والیبال اشتباه گرفته‌اند!

۷ـ در مدار شکل زیر با فرض $k=2$ ، حالت دائمی جریان $i(t)$:



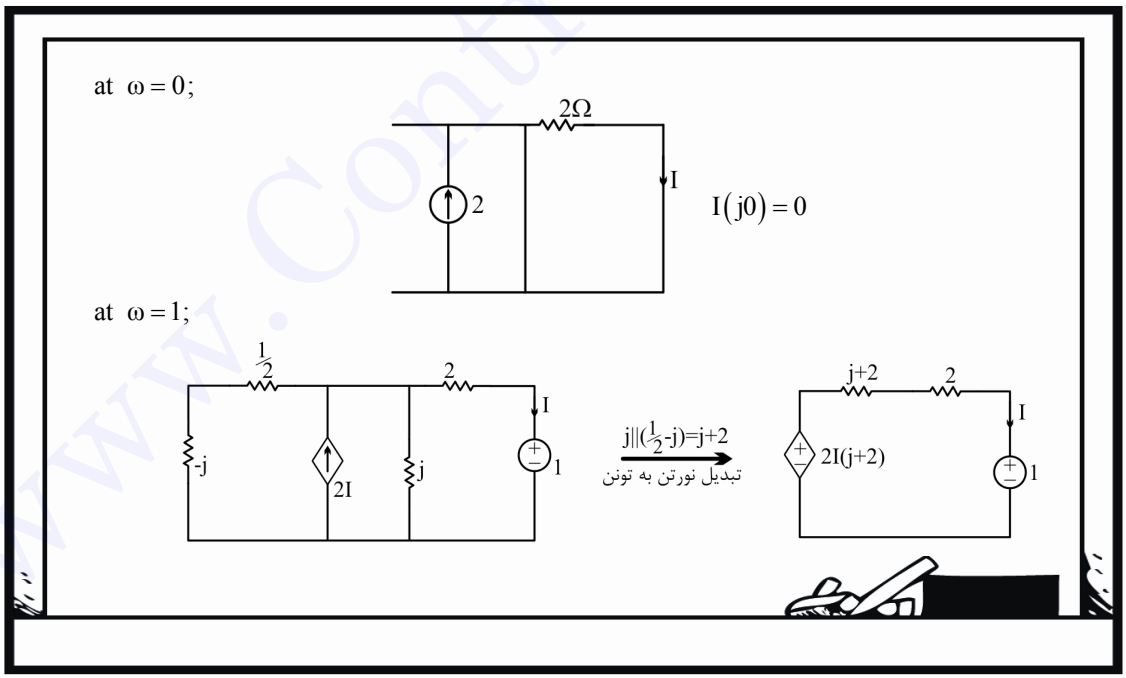
۱) فرکانس‌های $\omega=1$ و $\omega=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ دارد.

۲) فرکانس‌های $\omega=1$ و $\omega=2\sqrt{3}$ دارد.

۳) فرکانس‌های $\omega=1$ ، $\omega=0$ و $\omega=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ دارد.

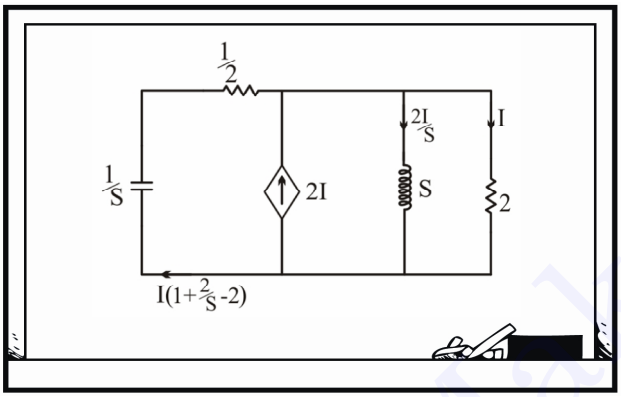
۴) حالت دائمی ندارد.

من قدم‌های اولیه را بر می‌دارم تا ببینیم چه می‌شود! مدار دارای دو منبع با فرکانس‌های 0 و 1 است، ابتدا این دو را بررسی کنیم:



$$KVL:-2I(j+2)+(j+2+2)I+1=0 \quad \Rightarrow \quad I=\frac{-1}{-j}=-j=1\angle -90^\circ$$

پس در فرکانس 1، $i(t)$ حالت دائم سینوسی دارد. ممکن است ساختار مدار هم در خروجی فرکانسی را اضافه کند. برای یافتن فرکانس طبیعی مدار می‌توانیم ورودی‌ها را صفر کرده و برای I معادله‌ای بنویسیم تا از روی آن به فرکانس‌های طبیعی پی ببریم!

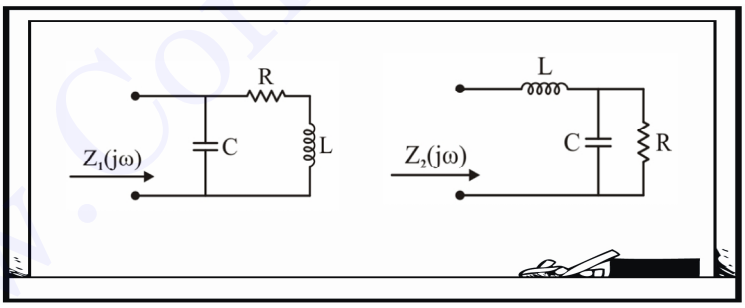


$$KVL: I\left(\frac{2}{S}-1\right)\left(\frac{1}{S}+\frac{1}{2}\right)+2I=0$$

$$\xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} \frac{3}{2}S^2+2=0 \quad \Rightarrow \quad S=\pm 2\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

پس گزینه ۱ درست است.

۸ـ برای آنکه فرکانس تشدید دو مدار شکل زیر یکسان باشند، کدام شرط باید برقرار باشد؟



۱) $R=\frac{L}{C}$ ۲) $R=\frac{C}{L}$ ۳) $R=\sqrt{\frac{L}{C}}$ ۴) $R=\sqrt{\frac{C}{L}}$

اگر جزو آن دسته از دانشجویانی نیستید که فرکانس تشدید را برای چندین مدار مشهور حفظ کرده‌اید، چاره‌ای ندارید جز این که تست را از راه تشریحی حل کنید. یعنی برای یافتن فرکانس تشدید، باید امپدانس یا ادمیتانس (هر کدام راحت‌تر است) را به دست آورده و بخش موهومی آن را برابر صفر قرار دهیم.

www.ControlMakers.ir

www.ControlMakers.ir

اینم که کاری نداره، من می‌نویسم؛ هر کجا اشکالی داشتید، بفرمایید تا توضیح بدهم!

$$Y_1(j\omega)=jC\omega+\frac{1}{R+jL\omega}=jC\omega+\frac{R-jL\omega}{R^2+(L\omega)^2}$$

$$\mathrm{Im}\left(Y_1(j\omega)\right)=0 \;\Rightarrow\; C\omega-\frac{L\omega}{R^2+(L\omega)^2}=0 \;\Rightarrow\; \omega_r=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{L^2}}$$

$$Z_2(j\omega)=jL\omega+\frac{R\times\frac{1}{jC\omega}}{R+\frac{1}{jC\omega}}=jL\omega+\frac{R}{RjC\omega+1}=jL\omega+\frac{R(1-jRC\omega)}{1+(RC\omega)^2}$$

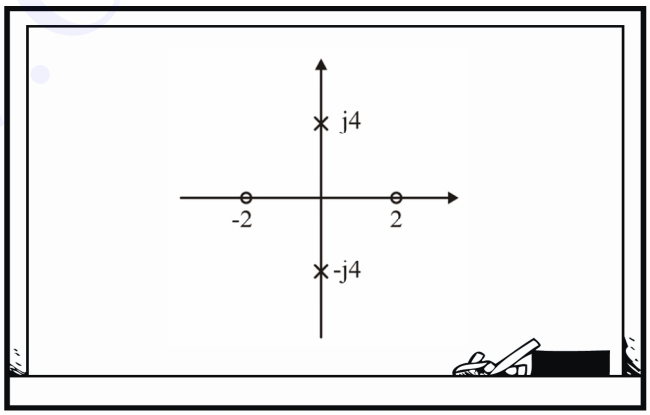
$$\mathrm{Im}\left(Z_2(j\omega)\right)=0 \;\Rightarrow\; L\omega-\frac{R^2C\omega}{1+(RC\omega)^2}=0 \;\Rightarrow\; \omega_r=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{1}{R^2C^2}}$$

و سرانجام قدم بسیار دشوار کار را بنده انجام می‌دهم!! اگر این فرکانس‌ها را با هم برابر قرار دهیم داریم:

$$\frac{R^2}{L^2}=\frac{1}{R^2C^2} \;\Rightarrow\; R^4=\frac{L^2}{C^2} \;\Rightarrow\; R=\sqrt{\frac{L}{C}}$$

پس گزینه ۳ درست است.

۹ـ محل صفرها و قطب‌های یک تابع شبکه در شکل زیر نشان داده شده است. اگر بدانیم بهره dc این شبکه -1 است، به ازای کدام مقدار $a>0$ ، ورودی به صورت $e^{-at}u(t)$ پاسخی به صورت ke^{-at} ایجاد نخواهد کرد؟



۱) 1

۲) 2

۳) 4

۴) یافتن چنین مقدار a ممکن نیست.

باتوجه به محل صفر و قطب‌های تابع شبکه و بهره dc برابر -1 و سر سوزن ذوق کنترلی! داریم:

$$H(S)=\frac{4(S+2)(S-2)}{(S^2+16)}$$

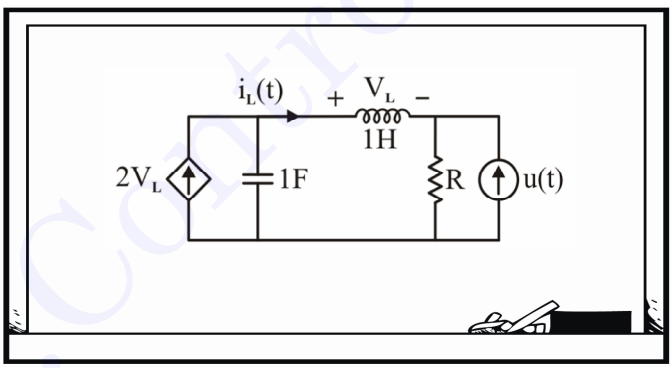
$$Y(S)=X(S)H(S)=\frac{1}{S+a}\frac{4(S+2)(S-2)}{S^2+16}=\frac{k(-a+2)(-a-2)}{S+a}+\frac{As+B}{s^2+16}$$

برای آنکه جمله‌ای به صورت ke^{-at} در خروجی نداشته باشیم باید صورت کسر با مخرج $S+a$ را برابر صفر قرار دهیم (تا پاسخ گذرا صفر گردد) و با توجه به $a>0$ داریم:

$$(-a+2)=0 \quad \Rightarrow \quad a=2$$

یعنی گزینه ۲ درست است.

۱۰ـ در مدار مرتبه دوم شکل مقابل پاسخ حالت صفر $i_L(t)$ به ورودی پله واحد کدام مشخصه زیر را دارد؟



۱) به ازای $R=2\Omega$ پاسخ مدار بی‌اتلاف خواهد بود.
۲) به ازای $R=2\Omega$ پاسخ مدار میرای بحرانی خواهد بود.
۳) به ازای $R=4\Omega$ پاسخ مدار میرای شدید خواهد بود.
۴) به ازای $R>4\Omega$ پاسخ مدار میرای ضعیف خواهد بود.

برای مشخص شدن فرم پاسخ باید به دنبال معادله مشخصه و فرکانس‌های طبیعی برویم، می‌دانیم معادله مشخصه هم مستقل از منابع مستقل است، پس منبع $u(t)$ را صفر کرده، سپس برای خروجی i_L یک KVL در حوزه لاپلاس می‌نویسیم؛ داستان از این قرار خواهد شد:

$$SI_L+RI_L+\frac{1}{S}(I_L-\underbrace{2V_L}_{sI_L})=0$$

www.ControlMakers.ir

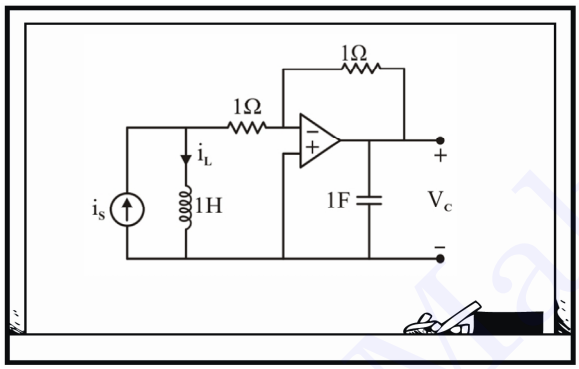
$$I_L\left(S+R+\frac{1}{S}-2\right)=0$$

$$\xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} S^2+(R-2)S+1=0 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha=R-2$$

اگر $R=2 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha=0$ پاسخ مدار بی تلف خواهد بود

پس گزینه ۱ درست است.

۱۱ـ در مدار شکل زیر آپ‌امپ ایده‌آل است. اگر i_s ورودی و $V_c(t)$ پاسخ باشد، پاسخ حالت صفر به ورودی ضربه واحد کدام مورد خواهد بود؟



۱) $V_c(t)=e^{-t}u(t)$

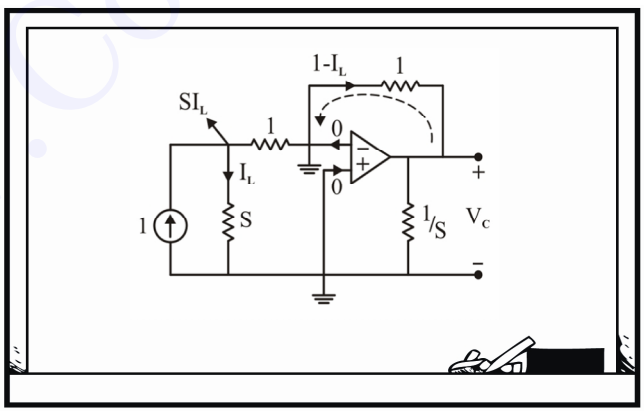
۲) $V_c(t)=\delta(t)-e^{-t}u(t)$

۳) $V_c(t)=e^{-t}u(t)-\delta(t)$

۴) $V_c(t)=e^{-t}u(t)+\delta(t)$

با توجه به صفر بودن جریان ورودی آپ‌امپ و هم‌پتانسیل بودن دو سرش و عشقی که به KCL زدن در ورودی آپ‌امپ داریم،

چنین به دست می‌آوریم:



$$KCL: I=I_L+SI_L$$

$$I_L=\frac{1}{S+1}$$

حالا با KVL زدن V_c را به راحتی پیدا می‌کنیم:

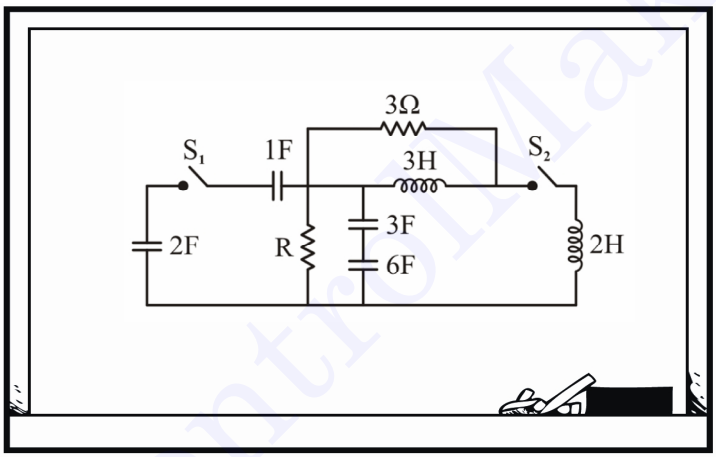
$$KVL: V_c = -1(1-I_L) = \frac{1}{S+1} - 1$$

$$V_c(t) = e^{-t}u(t) - \delta(t)$$

طبق معمول مدارهای شامل آپ‌امپ، این مسأله هم بسیار راحت و سریع حل شد.

گزینه ۳ درست است.

۱۲ـ در مدار شکل مقابل R بر حسب اهم چقدر باشد تا در حالت باز بودن کلیدها مقدار یکی از فرکانس‌های طبیعی مخالف صفر برابر $\frac{1}{10}$ تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر این مدار باشد؟



۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) 1 ۴) $\frac{10}{27}$

در حالت باز بودن کلید، فرکانس طبیعی غیر صفری که به مقدار R هم مربوط باشد به شاخه RC سری اختصاص دارد، پس مقدار فرکانس طبیعی غیر صفر به این صورت است:

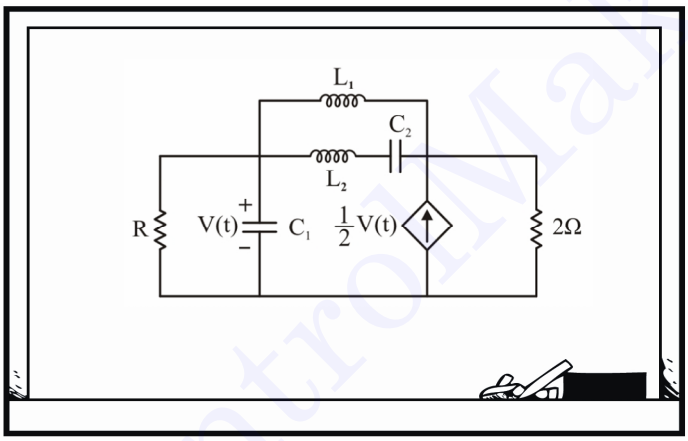
$$R + \frac{1}{\left(\underbrace{3 \text{ سری } 6}_{2}\right)S} = 0 \quad \Rightarrow \quad |S| = \left|\frac{-1}{2R}\right|$$

تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر هم برابر تعداد کات‌ست‌های خازنی و حلقه‌های سلفی است که به دلیل داشتن دو کات ست خازنی برابر 2 می‌شود، پس:

$$\frac{1}{2R}=\frac{1}{10}\times 2=\frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad R=\frac{5}{2}\Omega$$

گزینه ۱ درست است.

۱۳ـ در مدار شکل زیر اگر $\left[V_{C1}\ ,\ V_{C2}\ ,\ i_{L1}\ ,\ i_{L2}\right]$ بردار شرایط اولیه باشد، کدام یک از مقادیر داده شده برای این بردار، یک بردار ویژه ماتریس حالت خواهد بود؟



۱) $[2\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$ ۲) $[0\ \ 2\ \ 0\ \ 0]$ ۳) $[0\ \ 0\ \ 2\ \ 0]$ ۴) $[0\ \ 0\ \ 2\ \ -2]$

مقادیر ویژه، s_i ، رو که می‌شناسید، صفرهای معادله زیر هستند:[1]

$$\left|SI-A\right|=0$$

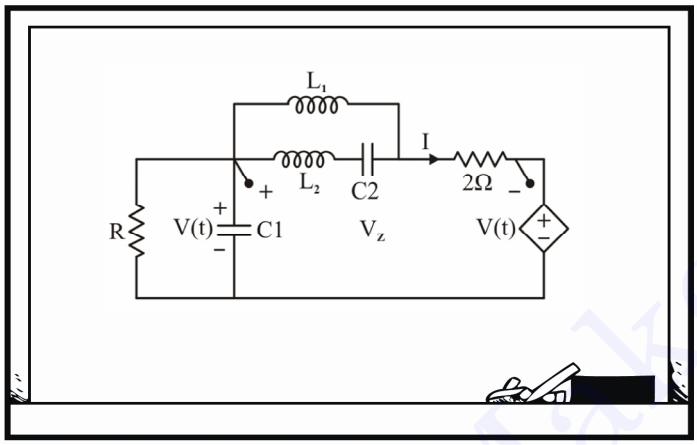
که روشی هم برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی است. بردار ویژه ، u_i ، هم برداری است که در معادله زیر صدق کند:

$$Au_i=S_iu_i \qquad (*)$$

۱ـ یا به عبارت باکلاس‌تر، فرکانس‌های طبیعی برابر مقادیر ویژه ماتریس ضرایب حالت A هستند.

www.ControlMakers.ir

بعد از یک تبدیل نورتن به تونن داریم:



$$V_z = V(t) - V(t) = 0$$

$$I = \frac{V_z}{z} = 0$$

$$KCL: V(S)\left(\frac{1}{R} + C_1 S\right) = 0$$

$$S = -\frac{1}{RC_1}$$

فرکانس طبیعی متغیر V:

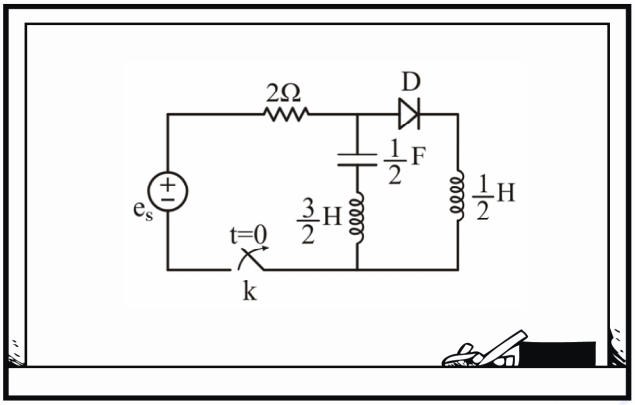
صفر شدن ولتاژ دو سر این شاخه باعث می‌شود که سه پارامتر $\dot{I}_{L1}$، $\dot{I}_{L2}$، $\dot{V}_{C2}$ مستقل از V_{C1} شوند، بنابراین معادله $(*)$ به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} u_i = -\frac{1}{RC_1} u_i$$

واضح است که گزینه ۱ در این معادله صدق می‌کند و گزینه درست همان است.

www.ControlMakers.ir

۱۴ـ در مدار شکل مقابل $e_s = u(-t)$. اگر کلید K را در لحظه $t = 0$ باز کنیم حداکثر انرژی ذخیره شده در خازن چقدر خواهد بود؟



۱) فقط در لحظه $t = \frac{\pi}{2}$ ثانیه انرژی خازن حداکثر بوده و برابر با $\frac{1}{2}$ ژول است.

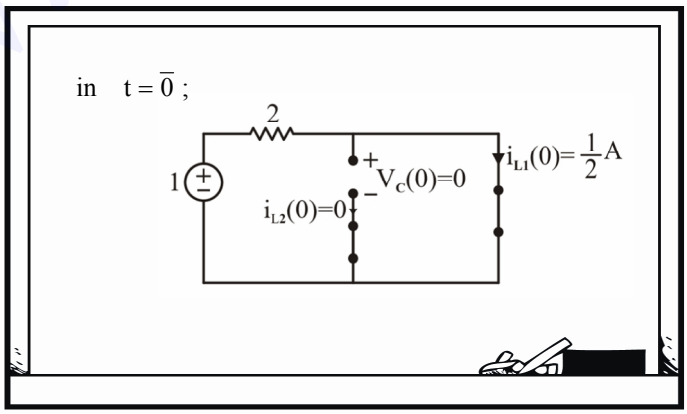
۲) فقط در لحظه $t = \frac{\pi}{2}$ ثانیه انرژی خازن حداکثر بوده و برابر با $\frac{1}{16}$ ژول است.

۳) فقط در $t \geq \frac{\pi}{2}$ ثانیه انرژی ذخیره شده در خازن ثابت و برابر با $\frac{1}{32}$ ژول است.

۴)فقط در $t \geq \frac{\pi}{2}$ ثانیه انرژی ذخیره شده در خازن ثابت و برابر با $\frac{1}{64}$ ژول است.

اگر تست‌های چند سال اخیر را حل کرده باشید، این مدار را عیناً دیده‌اید و لذا حل کردن این تست برایتان بسیار ساده خواهد بود.

با تحلیل مدار، قبل از باز شدن کلید در قدم صفرم مدار اینجوری می‌شود:



در $t = 0^+$ که سلف‌ها با یکدیگر سری می‌شوند، مقدار اولیه را از قانون بقای شار می‌یابیم.

بار قبلی این تست را در تمرینات فصل چهارم در حوزهٔ زمان تحلیل کردیم، این بار سعی کنید آن را در حوزهٔ لاپلاس تحلیل کنید تا مشکل سری شدن سلف‌ها هم نداشته باشیم.

با یک KVL در حوزهٔ لاپلاس داریم:

$$\frac{1}{2}S\,I(S)-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{2}S\,I(S)+\frac{1}{\frac{1}{2}S}I(S)=0$$

$$I(S)=\frac{\frac{1}{4}}{2S+\frac{2}{S}}=\frac{1}{8}\frac{S}{S^2+1}\quad\Rightarrow\quad i(t)=\frac{1}{8}\cos t$$

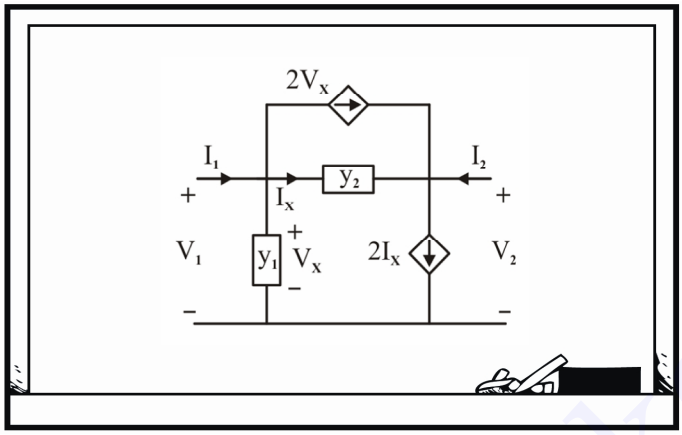
در نتیجه جریان سلف که همان جریان دیود هم هست در $t=\frac{\pi}{2}\sec$ صفر شده و دیود خاموش می‌شود، به دلیل مدار باز شدن حلقه و صفر شدن جریان خازن، ولتاژ خازن ثابت باقی می‌ماند.

$$V_C\left(\frac{\pi^-}{2}\right)=V_L\left(\frac{\pi^-}{2}\right)=L\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=-2\times\frac{1}{8}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{4}\quad\Rightarrow\quad W_c=\frac{1}{2}CV^2\,\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{64}j$$

پس گزینه ۴ درست است.

www.ControlMakers.ir

۱۵ـ پارامترهای y دو قطبی شکل مقابل کدام است؟



۱) $\begin{bmatrix} y_1+y_2 & -y_2 \\ y_2-y_1 & -y_2 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} y_1+y_2+2 & -y_2 \\ y_2+2 & -y_2 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} y_1+y_2-2 & -y_2 \\ y_2-2 & -y_2 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} y_1+y_2+2 & -y_2 \\ -2+y_2 & -y_2 \end{bmatrix}$

با یک نگاه اجمالی به گزینه‌ها مشخص است که y_{11} در همه آنها متفاوت است، پس:

$$y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0}$$

$$KCL: I_1 = y_1 V_x + I_x + 2V_x$$

$V_1 = V_x$ است و پس از اتصال کوتاه کردن سر دوم دو قطبی $(V_2 = 0)$ با KVL زدن داریم:

$$V_1 = \frac{I_x}{y_2} \Rightarrow I_x = V_1 y_2$$

$$I_1 = y_1 V_1 + V_1 y_2 + 2V_1 \Rightarrow y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} = y_1 + y_2 + 2$$

پس گزینه ۴ درست است.

«به پایان آمد این دفتر حکایت همچنان باقیست»

www.ControlMakers.ir